УДК 517.9 DOI: 10.14529/mmph150406

СУЩЕСТВОВАНИЕ ИНВАРИАНТНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ И ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ДИХОТОМИЙ РЕШЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА В КВАЗИБАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

***М.А. Сагадеева*[1], *Ф.Л. Хасан*[2]**

Уравнения, неразрешенные относительно производной, начал изучать еще А. Пуанкаре в конце позапрошлого века. Однако систематическое изучение таких уравнений берет начало с работ С.Л. Соболева во второй половине прошлого века, поэтому такие уравнения часто называют уравнениями соболевского типа. В последнее время существенно вырос интерес к уравнениям соболевского типа, в силу чего возникла необходимость их рассмотрения в квазибанаховых пространствах.

Рассматривается вопрос существования экспоненциальных дихотомий решений динамических уравнений соболевского типа, рассматриваемых в квазибанаховых пространствах. При изучении этого вопроса необходимо рассмотреть относительно спектральную теорему и вопрос существования инвариантных пространств решений. Интерес к такому поведению решений обусловлен тем, что именно оно является наиболее распространенным и отвечающим экспериментальным данным при решении практических задач.

Статья содержит две части. В первой из них вводятся необходимые понятия и приводится относительно спектральная теорема в квазибанаховых пространствах. Во второй – показывается существование инвариантных пространств и экспоненциальных дихотомий решений динамического уравнения соболевского типа в квазибанаховых пространствах.

Ключевые слова: квазисоболево пространство; относительно спектральная теорема; инвариантные пространства решений; экспоненциальные дихотомии решений; уравнения соболевского типа.

Введение

Пусть U, F – банаховы пространства, обозначим $L, M \in \mathbf{L}(U;F)$ (т.е. линейны и непрерывны). Рассмотрим линейное уравнение соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu. \tag{1}$$

Вектор-функцию $u \in C^{\infty}(R;U)$, удовлетворяющую уравнению (1), назовем его *решением*. Множество $D \subset U$ назовем *фазовым пространством* уравнения (1), если, во-первых, любое решение $u = u(t)$ лежит в D поточечно (т.е. $u(t) \in D$ при всех $t \in R$), а во-вторых, при любом $u_0 \in D$ существует единственное решение задачи Коши

$$u(0) = u_0 \tag{2}$$

для уравнения (1). Заметим, что если существует оператор $L_1^{-1} \in \mathbf{L}(F;U)$, то фазовым пространством уравнения (1) служит все пространство U. В случае же необратимости оператора L фазовое пространство D может быть подпространством в U.

Далее, пусть оператор M (L, p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup N$ (т.е. L-спектр оператора M ограничен, а точка ∞ является либо устранимой особой точкой ($p = 0$), либо полюсом порядка $p \in N$ L-резольвенты оператора M). В этом случае фазовое пространство D уравнения (1) либо совпадает с пространством U, либо является подпространством в U [1]. Если вдобавок

[1] Сагадеева Минзиля Алмасовна – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математического моделирования, Южно-Уральский государственный университет
E-mail: sam79@74.ru
[2] Хасан Фаза Лафта – аспирант, кафедра уравнений математической физики, Южно-Уральский государственный университет.
E-mail: fahas90@yahoo.co.uk

$\sigma^L(M)\cap iR=\varnothing$, то фазовое пространство то фазовое пространство расщепляется в прямую сумму инвариантных относительно уравнения (1) пространств: $D=J^s\oplus J^u$, причем $\|u(t)\|\le C_s\|u_0\|e^{-at}$, если $a\in R_+$, $u_0\in J^s$, $t\in R_+$, и $\|u(t)\|\ge C_u\|u_0\|e^{at}$, если $a\in R_+$, $u_0\in J^u$, $t\in R_+$, для любых решений задачи (1), (2). Такое поведение решений задачи (1), (2) было названо в [2] экспоненциальной дихотомией. К настоящему времени дихотомии решений линейных уравнений соболевского типа как динамических (т.е. тех, чьи решения существуют на всей оси R), так и эволюционных (их решения существуют только на полуоси R_+) полностью изучены в банаховых пространствах [3]. Настало время распространить эту теорию на квазибанаховы пространства. Причем нами руководит не столько желание пополнить теорию, сколько стремление к осмыслению неклассических моделей математической физики [4] в квазисоболевых пространствах [5].

Заметим еще, что хотя уравнения вида (1) изучать начал еще А. Пуанкаре в конце позапрошлого века, их систематическое изучение началось с работ С.Л. Соболева во второй половине прошлого века (см. прекрасный исторический обзор в [6]). Термин «уравнения соболевского типа» ввел в обиход Р. Шоуолтер [7]. В настоящее время уравнения соболевского типа привлекают внимание все большего числа исследователей, и аспекты, в которых они изучаются, весьма разнообразны [8–10].

Статья содержит две части. В первой вводятся необходимые понятия и приводится доказательство относительно спектральной теоремы в квазибанаховых пространствах. Во второй – доказывается существование инвариантных пространств и экспоненциальных дихотомий решений уравнения (1) в квазибанаховых пространствах при условии (L,p)-ограниченности оператора M. Список литературы не претендует на полноту и отражает лишь вкусы и пристрастия авторов.

Относительно спектральная теорема в квазибанаховых пространствах

Пусть U – линеал над полем R. Упорядоченная пара $(U, {}_U\|\cdot\|)$ называется *квазинормированным пространством*, если функция ${}_U\|\cdot\|: U\to R$ удовлетворяет следующим условиям:

(i) ${}_U\|u\|\ge 0$ при всех $u\in U$, причем ${}_U\|u\|=0$ точно тогда, когда $u=\mathbf{0}$, где $\mathbf{0}$ – нуль линеала U;

(ii) ${}_U\|\alpha u\|=|\alpha|\,{}_U\|u\|$ при всех $u\in U$, $\forall\alpha\in R$;

(iii) ${}_U\|u+v\|\le C\left({}_U\|u\|+{}_U\|v\|\right)$ при всех $u,v\in U$, где константа $C\ge 1$.

Функция ${}_U\|\cdot\|$ со свойствами (i)–(iii) называется *квазинормой*. Ясно, что в случае $C=1$ эта функция будет нормой.

Квазинормированные пространства нормируемы только в случае $C=1$, но в любом случае они метризуемы [11, гл. 3]. Значит, в них мы располагаем понятиями фундаментальной последовательности и полноты. Полное квазинормированное пространство называется *квазибанаховым*. Широко известным примером квазибанахова пространства служит пространство последовательностей, ℓ_q при $q\in(0,1)$, константа $C=2^{1/q}$ (при $q\in[1,+\infty)$ пространство ℓ_q – банахово). Кроме того, в [5] построены так называемые квазисоболевы пространства ℓ_q^m при всех $m\in R$, $q\in R_+$, причем $\ell_q^0=\ell_q$.

Далее, пусть $(U, {}_U\|\cdot\|)$ и $(F, {}_F\|\cdot\|)$ – квазибанаховы пространства. Линейный оператор $L: U\to F$ назовем *непрерывным*, если $\lim\limits_{k\to\infty} Lu_k = L(\lim\limits_{k\to\infty} u_k)$ для любой последовательности $\{u_k\}\subset U$ сходящейся в U, и ограниченным, если при любом $u\in U$ справедливо ${}_F\|Lu\|\le K\,{}_U\|u\|$ и $K\in R_+$ не зависит от u. Нетрудно показать, что линейный оператор $L: U\to F$ с областью определения $dom\,L=U$ непрерывен точно тогда, когда он ограничен (т.е. отображает ограниченные множества в ограниченные).

Линеал $\mathbf{L}(U;F)$ линейных ограниченных операторов – квазибанахово пространство с квазинормой

$${}_{L(U;F)}\|L\| = \sup_{U\|u\|=1} {}_F\|Lu\|.$$

Пример. [12] Пусть $\{\lambda_k\} \subset R_+$ – монотонная последовательность такая, что $\lim_{k\to\infty}\lambda_k = +\infty$, а $q \in R_+$. В квазисоболевых пространствах

$$\ell_q^m = \left\{ u = \{u_k\} \subset R : \sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^{\frac{m}{2}} \,|\, u_k \,| \right)^q < +\infty \right\}$$

рассмотрим квазиоператор Лапласа $\Lambda : \ell_q^{m+2} \to \ell_q^m$, заданный с помощью формулы $\Lambda u = \{\lambda_k u_k\}$, $u \in \ell_q^m$. Этот оператор $\Lambda : \ell_q^{m+2} \to \ell_q^m$ является линейным, ограниченным и непрерывно обратимым при всех $m \in R$, $q \in R_+$.

Замечание 1. В примере приведено построение оператора в квазибанаховых пространствах последовательностей в явном виде. Соответственно в квазибанаховых пространствах последовательностей (а именно в квазисоболевых пространствах) существуют линейные отображения отличные от нулевого и тривиального, что в функциональных квазибанаховых пространствах не всегда очевидно, а иногда и просто неверно [13].

Замечание 2. В дальнейших рассуждениях пространства U, F – квазисоболевы.

Теперь, пусть операторы $L, M \in \mathbf{L}(U;F)$, введем в рассмотрение L*-резольвентное множество* $\rho^L(M) = \left\{ \mu \in C : (\mu L - M)^{-1} \in \mathbf{L}(F;U) \right\}$ и L*-спектр* $\sigma^L(M) = C \setminus \rho^L(M)$ оператора M. В работе [14] показано, что множество $\rho^L(M)$ всегда открыто, поэтому L-спектр $\sigma^L(M)$ оператора M всегда замкнут.

Операторнозначные функции комплексного переменного $\mu \in \rho^L(M) \subset C$ вида $(\mu L - M)^{-1}$, $R_\mu^L(M) = (\mu L - M)^{-1} L$ и $L_\mu^L(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ назовем соответственно L*-резольвентой, правой* L*-резольвентой* и *левой* L*-резольвентой* оператора M.

Лемма 1. [14] *Пусть* $L, M \in \mathbf{L}(U;F)$, *тогда* L*-резольвента, правая и левая* L*-резольвенты оператора* M *аналитичны в* $\rho^L(M)$.

Введем в рассмотрение условие

$$\left.\begin{array}{l} \text{пусть } \sigma^L(M) = \sigma_1^L(M) \cup \sigma_2^L(M) \text{ и } \sigma_1^L(M) \text{ не пусто,} \\ \text{причем существует ограниченная область } \Omega_1 \subset C \\ \text{с границей класса } C^1\text{, что } \Omega_1 \supset \sigma_1^L(M) \text{ и } \overline{\Omega}_1 \cap \sigma_2^L(M) \text{ пусто.} \end{array}\right\} \quad (3)$$

При выполнении этого условия, в силу леммы 1, а также результатов из [15] ясно, что существуют операторы, заданные с помощью интегралов

$$P_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} R_\mu^L(M) d\mu \text{ и } Q_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} L_\mu^L(M) d\mu,$$

где $\gamma_1 = \partial\Omega_1$. По построению операторы $P_1 \in \mathbf{L}(U)$ и $Q_1 \in \mathbf{L}(F)$.

Лемма 2. *Пусть* $L, M \in \mathbf{L}(U;F)$ *и выполнено условие (3), тогда операторы* $P_1 \in \mathbf{L}(U)$ *и* $Q_1 \in \mathbf{L}(F)$ *являются проекторами в соответствующих пространствах.*

Доказательство. Операторы $P_1 \in \mathbf{L}(U)$ и $Q_1 \in \mathbf{L}(F)$ по построению. Для доказательства утверждения теоремы надо показать идемпотентность этих операторов.

Из условия (3) и замкнутости $\sigma^L(M)$ следует существование замкнутого контура $\gamma' \subset C$, такого, что $\sigma^L(M) \cap \gamma' = \emptyset$ и ограничивающего область, содержащую контур γ_1. Из аналитичности резольвенты $R_\mu^L(M)$ следует, что оператор

$$P_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} R_\lambda^L(M) d\lambda.$$

Используя аналоги тождеств Гильберта [16] и теорему о вычетах, которая справедлива в силу [15], нетрудно показать, что

$$P_1^2=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int\limits_{\gamma_1}\int\limits_{\gamma'}R_\lambda^L(M)R_\mu^L(M)d\mu d\lambda=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\left(\int\limits_{\gamma_1}\frac{d\lambda}{\lambda-\mu}\int\limits_{\gamma'}R_\mu^L(M)d\mu+\int\limits_{\gamma_1}R_\lambda^L(M)d\lambda\int\limits_{\gamma'}\frac{d\mu}{\lambda-\mu}\right)=P_1.$$

Здесь $\mu\in\gamma'$ лежит внутри области, ограниченной контуром γ_1, а точка $\lambda\in\gamma_1$ находится вне области, ограниченной контуром γ'.

Утверждение относительно Q_1 доказывается аналогично. Лемма доказана.

Положим $U^{11}=im\,P_1$, $F^{11}=im\,Q_1$, $U^{10}=\ker P_1$, $F^{10}=\ker Q_1$; и через L_{11} (M_{11}) обозначим сужение оператора L (M) на U^{11}.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия леммы 2. Тогда*

(i) *операторы* $L_{11},M_{11}\in\mathbf{L}(U^{11};F^{11})$;

(ii) *существует оператор* $L_{11}^{-1}\in\mathbf{L}(F^{11};U^{11})$.

Доказательство. Утверждение (i) следует из построения операторов $P_1\in\mathbf{L}(U)$ и $Q_1\in\mathbf{L}(F)$, так как $LP_1=Q_1L=L_{11}$ и $MP_1=Q_1M=M_{11}$.

Утверждение (ii) следует из леммы 1 в силу того, что оператор L_{11}^{-1} равен сужению на подпространство F^{11} оператора

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1}(\mu L-M)^{-1}d\mu.$$

Теорема доказана.

Наконец, рассмотрим случай, когда существует ограниченная область $\Omega\subset C$, содержащая весь L-спектр $\sigma^L(M)$ оператора M. По аналогии с банаховым [1] в этом случае оператор M называется (L,σ)-*ограниченным*. По лемме 2 (в которой $\sigma_2^L(M)=\varnothing$) существуют проекторы

$$P=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}R_\mu^L(M)d\mu \quad \text{и} \quad Q=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}L_\mu^L(M)d\mu,$$

где $\gamma\subset\rho^L(M)$ – замкнутый контур, ограничивающий область, содержащую область Ω.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия леммы 2 и оператор* M (L,σ)-*ограничен. Тогда* $P_1=PP_1=P_1P$ *и* $Q_1=QQ_1=Q_1Q$.

Построим операторы $P_2=P-P_1$ и $Q_2=Q-Q_1$. В силу следствия 1 эти операторы являются проекторами. Положим $U^0=\ker P$, $U^1=im\,P$, $F^0=\ker Q$, $F^1=im\,Q$; $U^{12}=im\,P_2$, $F^{12}=im\,Q_2$ и через L_{12} (M_{12}) обозначим сужение оператора L (M) на U^{12}.

Следствие 2. *Пусть выполнены условия следствия 1. Тогда*

(i) $U=U^0\oplus U^1$, $F=F^0\oplus F^1$, $U^1=U^{11}\oplus U^{12}$, $F^1=F^{11}\oplus F^{12}$;

(ii) *операторы* $L_{12},M_{12}\in\mathbf{L}(U^{12};F^{12})$;

(iii) *существует оператор* $L_{12}^{-1}\in\mathbf{L}(F^{12};U^{12})$.

Инвариантные пространства и экспоненциальные дихотомии решений

Пусть U и F – квазибанаховы пространства, операторы $L,M\in\mathbf{L}(U;F)$. Рассмотрим линейное уравнение соболевского типа (1). Вектор-функцию $u\in C^\infty(R;U)$ назовем (*классическим*) *решением уравнения* (1), если она (поточечно) удовлетворяет этому уравнению. Решение $u=u(t)$ уравнения (1) назовем решением *задачи Коши* (2) для уравнения (1) (коротко, задачи (1), (2)), если оно вдобавок удовлетворяет условию Коши (2) при некотором $u_0\in U$.

Отображение $V^\bullet\in C(R;\mathbf{L}(U))$ назовем *группой операторов*, если

$$V^sV^t=V^{s+t} \tag{4}$$

при всех $t,s \in R$. Следуя традиции (см. напр. [1]), отождествим группу с ее графиком $\{V^t : t \in R\}$ и назовем ее *голоморфной*, если она аналитически продолжима во всю комплексную плоскость с сохранением свойства (4). Далее группу $\{V^t : t \in R\}$ назовем *вырожденной*, если $\ker V^0 \neq \{\mathbf{0}\}$ (в силу (4) единица V^0 группы $\{V^t : t \in R\}$ является проектором в U). Наконец, назовем $\{V^t : t \in R\}$ *разрешающей группой* уравнения (1), если вектор-функция $u(t) = V^t u_0$ является решением уравнения (1).

Теорема 2. *[16] Пусть оператор M (L,σ)-ограничен. Тогда существует голоморфная разрешающая группа уравнения (1).*

Искомая группа может быть задана, например [15], интегралом

$$V^t = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} R^L_\mu(M) e^{\mu t} d\mu \, , t \in R \, , \tag{5}$$

где контур $\gamma \subset \rho^L(M) \subset C$ такой же, как выше.

Группа (5) не единственная голоморфная разрешающая группа уравнения (1), что легко увидеть, заменив контур γ в интеграле, например на контур γ_1. Однако, она обязательно вырождена, если $\ker L \neq \{\mathbf{0}\}$.

Для решения вопроса о единственности группы (5) введем несколько понятий.

Определение 1. Множество $D \subset U$ называется *фазовым пространством* уравнения (1), если

(i) любое решение $u = u(t)$ уравнения (1) лежит в D поточечно (то есть $u(t) \in D$ при всех $t \in R$);

(ii) при любом $u_0 \in D$ существует единственное решение задачи (1), (2).

Далее, пусть $\{V^t : t \in R\}$ – голоморфная группа, введем в рассмотрение ее образ $imU^\bullet = imU^0$. Ввиду голоморфности группы (5) имеем $imU^\bullet = imU^t$ при всех $t \in R$. Очевидно, образ группы (5) – первый кандидат на роль фазового пространства уравнения (1). Найдем условия, когда эти множества совпадают. Обозначим через L_0 (M_0) сужение оператора L (M) на U^0.

Теорема 3. [16] *Пусть оператор M (L,σ)-ограничен, тогда $L_0, M_0 \in \mathbf{L}(U^0;F^0)$, причем существует оператор $M_0^{-1} \in \mathbf{L}(F^0;U^0)$.*

Определение 2. Построим оператор $H = M_0^{-1}L_0 \in \mathbf{L}(U^0)$. Назовем ($L,\sigma$)-ограниченный оператор M (L,p)-*ограниченным*, $p \in N$, если $H^p \neq \mathbb{O}$ и $H^{p+1} = \mathbb{O}$. Присовокупим сюда случай ($L,0$)-ограниченного оператора M, т.е. случай когда $\ker L = U^0$.

Теорема 4. [16] *Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup N$. Тогда образ группы (5) совпадает с фазовым пространством уравнения (1).*

Определение 3. Пусть D – фазовое пространство уравнения (1), подмножество $J \subset D$ называется *инвариантным пространством* уравнения (1), если при любом $u_0 \in J$ решение $u = u(t)$ задачи (1), (2) лежит в J поточечно (т.е. $u(t) \in J$ при всех $t \in R$).

Теорема 5. *Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup N$ и выполнено условие (3). Тогда образ группы*

$$V^t = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} R^L_\mu(M) e^{\mu t} d\mu \, , t \in R \, , \tag{6}$$

будет инвариантным пространством уравнения (1).

Доказательство следует из равенства $imU^\bullet = im P_1 = U^{11}$, которое в свою очередь очевидно следует из теоремы 2 и следствий 1, 2.

Определение 4. Будем говорить, что решения уравнения (1) имеют *экспоненциальную дихотомию*, если

(i) фазовое пространство уравнения (1) представимо в виде $D = J^1 \oplus J^2$, где $J^{1(2)}$ – инвариантное пространство уравнения (1);

(ii) для любого $u_0 \in J^1$ ($u_0 \in J^2$) решение $u = u(t)$ задачи (1), (2) таково, что ${}_U\|u(t)\| \le C_1(u_0)e^{-at}$ (${}_U\|u(t)\| \ge C_2(u_0)e^{at}$) при некотором $a > 0$ и всех $t \in R$.

Теорема 6. *Пусть оператор M (L, p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup N$ и выполнено условие*

$$\sigma^L(M) \cap iR = \varnothing \qquad (7)$$

Тогда решения уравнения (1) имеют экспоненциальную дихотомию.

Идея **доказательства** этой теоремы основана на построении оценок решений в зависимости от расположения компонент относительного L-спектра оператора M. Опираясь на результаты относительно спектральной теоремы в квазибанаховых пространствах [3], по аналогии с результатами [4,5] можно получить указанные оценки.

Заметим, что если при выполнении (7) окажется, что $\sigma_2^L(M) = \varnothing$, то $J^1 = imV^\bullet$, где $imV^\bullet$ – фазовое пространство уравнения (1). В этом случае решения уравнения (1) уместно назвать *экспоненциально асимптотически устойчивыми*.

Авторы считают своим приятным долгом выразить искреннюю благодарность профессору Г.А. Свиридюку за плодотворные дискуссии и интерес, проявленный к данной работе.

Литература

1. Свиридюк, Г.А. К общей теории полугрупп операторов / Г.А. Свиридюк // Успехи мат. наук. – 1994. – Т. 49, № 4. – С. 47–74.

2. Свиридюк, Г.А. Инвариантные пространства и дихотомии решений одного класса линейных уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк, А.В. Келлер // Известия вузов. Математика. – 1997. – № 5. – С. 60–68.

3. Сагадеева, М.А. Дихотомии решений линейных уравнений соболевского типа / М.А. Сагадеева. – Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2012. – 139 с.

4. Свиридюк, Г.А. Неклассические модели математической физики / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2012. – № 40(299). – С. 7–18.

5. Аль-Делфи, Дж.К. Квазисоболевы пространства ℓ_p^m / Дж.К. Аль-Делфи // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2013. – Т. 5, № 1. – С. 107–109.

6. Demidenko, G.V. Partial differential equations and systems not solvable with respect to the highest – order derivative / G.V. Demidenko, S.V. Uspenskii. – New York–Basel–Hong Kong: Marcel Dekker, Inc., 2003. – 239 p.

7. Showalter, R.E. The Sobolev type equations. I (II) / R.E Showalter // Appl. Anal. – 1975. – V. 5, № 1 (2). – P. 15–22 (P. 81–99).

8. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов, Ю.Д. Плетнер. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 736 с.

9. Замышляева, А.А. Линейные уравнения соболевского типа высокого порядка / А.А. Замышляева. – Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2012. – 88 с.

10. Манакова, Н.А. Задачи оптимального управления для полулинейных уравнений соболевского типа / Н.А. Манакова. – Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2012. – 107 с.

11. Берг, Й. Интерполяционные пространства. Введение / Й. Берг, Й. Лёфстрём. – М.: Мир, 1980. – 264 р.

12. Аль-Делфи, Дж.К. Квазиоператор Лапласа в квазисоболевых пространствах / Дж.К. Аль-Делфи // Вестник СамГТУ. Серия Физ.-мат. науки. – 2013. – Вып. 2 (13). – С. 13–16.

13. Rolewicz, S. Metric Linear Spaces / S. Rolewicz. – Warsaw: PWN, 1985. – 459 p.

14. Аль-Делфи, Дж.К. Исследование вырожденных голоморфных групп в квазибанаховых пространствах: дис. … канд. физ.-мат. наук / Дж. К. Аль-Делфи. – Воронеж, 2015. – 98 с.

15. Keller, A.V. On Integration in Quasi-Banach Spaces of Sequences / A.V. Keller, A.A. Zamyshlyaeva, M.A. Sagadeeva // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2015. – Vol. 2, № 1. – P. 52–56.

16. Келлер, А.В. Голоморфные вырожденные группы операторов в квазибанаховых пространствах / А.В. Келлер, Дж.К. Аль-Делфи // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2015. – Т. 7, № 1. – С. 20–27.

Поступила в редакцию 25 мая 2015 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2015, vol. 7, no. 4, pp. 46–53

DOI: 10.14529/mmph150406

EXISTENCE OF INVARIANT SPACES AND EXPONENTIAL DICHOTOMIES OF SOLUTIONS OF DYNAMICAL SOBOLEV TYPE EQUATIONS IN QUASI-BANACH SPACES

M.A. Sagadeeva[1], F.L. Hasan[2]

At the end of the nineteenth century A. Poincare began to study equations which were unsolved with respect to high derivative equations. The systematical study of such equations began in S.L. Sobolev`s works in the second part of the last century. Therefore, such equations are called Sobolev type equations. The increased interest to Sobolev type equations led to the necessity to consider them in quasi-Banach spaces.

This article presents the results of the existence of exponential dichotomies of solutions of dynamical Sobolev type equations studied in quasi-Banach spaces.

The relatively spectral theorem and the problem of the existence of invariant solution spaces were considered. The interest to such solution is explained by the fact that it is the most popular and reflects experimental data while solving practical tasks.

Besides the introduction and the references the article contains two parts. The first part provides necessary notions and a relatively spectral theorem in qiasi-Banach spaces. The second one represents the existence of invariant spaces and exponential dichotomies of solutions of the dynamical Sobolev type equation in quasi-Banach spaces.

Keywords: quasi-Sobolev space; relatively spectral theorem; invariant spaces; exponential dichotomies of solutions; Sobolev type equations.

References

1. Sviridyuk G.A. On the general theory of operator semigroups. *Uspekhi Mat. Nauk*, 1994, Vol. 49, no. 4(298), pp. 47–74. (in Russ.). DOI: 10.1070/RM1994v049n04ABEH002390

2. Sviridyuk G.A., Keller A.V. Invariantnye prostranstva i dikhotomii resheniy odnogo klassa lineynykh uravneniy tipa Soboleva [Invariant spaces and dichotomies of solutions of a class of linear equations of Sobolev type]. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Matematika* [Russian Math.], 1997, Vol. 41, no. 5, pp. 57–65. (in Russ.).

3. Sagadeeva M.A. *Dihotomies of Solutions of Linear Sobolev Type Equations.* Chelyabinsk, Publishing center of SUSU, 2012. 139 p. (in Russ.).

4. Sviridyuk G.A., Zagrebina S.A. Nonclassical Models of Mathematical Physics. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software".* 2012, no. 40 (299), pp. 7–18. (in Russ.).

[1] Minzilia Almasovna Sagadeeva is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Mathematical Modelling Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russia.
E-mail: sam79@74.ru
[2] Hasan Faza Lafta is Post-graduate student, Equations of Mathematical Physics Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russia.
E-mail: fahas90@yahoo.co.uk

5. Al-Delfi J.K. Quasi-Sobolev Spaces ℓ_p^m. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematics. Mechanics. Physics"*, 2013, Vol. 5, no. 1, pp. 107–109. (in Russ.).

6. Demidenko G.V., Uspenskii S.V. *Partial Differential Equations and Systems not Solvable with Respect to the Highest–order Derivative*. New York–Basel–Hong Kong, Marcel Dekker Inc., 2003. 239 p. DOI: 10.1201/9780203911433

7. Showalter R.E. The Sobolev type equations. I (II). *Appl. Anal*, 1975, Vol. 5, no. 1 (2), pp. 15–22 (pp. 81–99).

8. Sveshnikov A.G., Al'shin A.B., Korpusov M.O., Pletner Yu.D. *Linear and Nonlinear Sobolev Type Equations*. Moscow, FizMatLit Publ., 2007. 736 p. (in Russ.).

9. Zamyshlyaeva A.A. *Linear Sobolev Type Equations of Hihg Order*. Chelyabinsk, Publishing center of SUSU, 2012. 88 p. (in Russ.).

10. Manakova N.A. *Problems of Optimal Control for the Semilinear Sobolev Type Equations*. Chelyabinsk, Publishing center of SUSU, 2012. 107 p. (in Russ.).

11. Bergh J., Löfström J. *Interpolation Spaces. An Introduction*. Berlin–Heidelberg–New York, Springer-Verlag, 1976. 207 p. DOI: 10.1002/zamm.19800600916

12. Al-Delfi J.K. The Laplace' Quasi-operator in Quasi-Sobolev spaces. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2013, Issue 2 (31), pp. 13–16. (in Russ.). DOI: 10.14498/vsgtu1213

13. Rolewicz S. *Metric Linear Spaces*. Warsaw, PWN, 1985. 459 p.

14. Al-Delfi J.K. *Issledovanie vyrozhdennykh golomorfnykh grupp v kvazibanakhovykh prostranstvakh* [The Study of Degenerated Holomorphic Groups in Quasi-Banach spaces]. Cand. phys. and math. sci. diss., Voronezh, 2015. 98 p. (in Russ.).

15. Keller A.V., Zamyshlyaeva A.A., Sagadeeva M.A. On Integration in Quasi-Banach Spaces of Sequences. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2015, Vol. 2, no. 1, pp. 52–56. DOI: 10.14529/jcem150106

16. Keller A.V., AL-Delfi J.K. Holomorphic Degenerate Groups of Operators in Quasi-Banach Spaces. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematics, Mechanics, Physics"*, 2015, Vol. 7, no. 1, pp. 20–27. (in Russ.).

Received May 25, 2015