Краткие сообщения

УДК 517.956.32 DOI: 10.14529/mmph150410

О РЕШЕНИЯХ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С МЛАДШИМ ЧЛЕНОМ

Е.Ю. Чистяков[1]

Установлено взаимно однозначное соответствие между решениями волнового уравнения и волнового уравнения с младшим членом в звёздной области. Этот результат является аналогом соответствующего результата, полученного ранее для уравнения Лапласа и уравнения Гельмгольца.

Ключевые слова: волновое уравнение; нормированная система функций.

В работе [1] для решений уравнения Лапласа и уравнения Гельмгольца

$$\Delta v(x) + \lambda v(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad \lambda \in R,$$

в звездной области Ω было установлено взаимно-однозначное соответствие. Это было сделано с помощью метода нормированных систем функций [2], на основании результатов, полученных в работах [3–5]. Пусть L – линейный оператор, действующий на функции $f(x)$, $x \in \Omega$, определенные в некоторой области $\Omega \in R^n$ и принадлежащие множеству X такому, что $LX \subset X$.

Определение 1. Упорядоченную систему функций $\{f_k(x): k \in N_0\}$ из X, где $N_0 = N \cup \{0\}$ назовем f – нормированной относительно (L_1, L_2) в области Ω с основанием $f_0(x)$, если всюду в этой области

$$L_1 f_0(x) = f(x), L_1 f_k(x) = L_2 f_{k-1}(x), \ k \in N, \ x \in \Omega.$$

Важным частным случаем введенного понятия является случай, когда $L_2 = I$, а I – единичный оператор. Тогда, f – нормированная система функций $\{f_k(x): k \in N_0\}$ относительно (L, I) обладает свойством

$$Lf_0(x) = f(x), \ Lf_k(x) = f_{k-1}(x), \ k \in N, \ x \in \Omega. \tag{1}$$

Будем называть систему функций $\{f_k(x): k \in N_0\}$, обладающую свойством (1) f – нормированной относительно оператора L. Приведем основное свойство f – нормированных систем функций. Пусть задано линейное уравнение вида

$$(L_1 - L_2)u(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

и пусть $\{f_k(x): k \in N_0\}$ – некоторая f – нормированная относительно (L_1, L_2) в области Ω система функций. Тогда функциональный ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ будет формальным решением уравнения (2) в области Ω. Метод нормированных систем функций позволил построить полиномиальные решения уравнений в частных производных [6, 7].

Рассмотрим волновой оператор $\Box = \Delta_x - \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$, где Δ_x – оператор Лапласа. Исследуем связь между решениями уравнения

$$\Box v(x,t) + \lambda v(x,t) = 0, \tag{3}$$

при $\lambda \in R$ и волновыми в Ω функциями – решениями уравнения $\Box v(x,t) = 0$. Для этого определим функции $g_m(t)$, зависящие от целого параметра m равенством

$$g_m(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^k}{(2,2)_k (m,2)_k}.$$

где $(a,b)_k = a(a+b)\ldots(a+kb-b)$ – обобщенный символ Похгаммера.

[1] Чистяков Евгений Юрьевич – бакалавр, кафедра математического и функционального анализа, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация.
E-mail: evgeniy_chistyak@mail.ru

Теорема 1. Система функций $\{G_k(x,t;u): k\in N_0\}$, где $G_0(x,t;u)=u(x,t)$ и

$$G_k(x,t;u)=\frac{1}{4^k}\frac{|x|_t^{2k}}{k!}\int_0^1\frac{(1-\alpha)^{k-1}\alpha^{(n+1)/2-1}}{(k-1)!}u(\alpha x,\alpha t)d\alpha,\ k\in N,$$

где $|x|_t^2=|x|^2-t^2$, а $u(x,t)$ – некоторая волновая в Ω функция, является 0 – нормированной системой функций относительно волнового оператора $\square$ в Ω.

На основании этой теоремы сформулируем следующий основной результат.

Теорема 2. Для любой функции $v\in C^2(\Omega)$, удовлетворяющей в Ω уравнению (3) существует единственная волновая в Ω функция $u(x,t)$ такая, что выполнено равенство

$$v(x,t)=u(x,t)-\lambda\frac{|x|_t^2}{4}\int_0^1 g_4\left(\lambda(1-\alpha)|x|_t^2\right)u(\alpha x,\alpha t)\alpha^{(n+1)/2-1}d\alpha.$$

Пример. Возьмем волновой полином 2-й степени вида $u(x,t)=|x|^2+nt^2$. По методу нормированных систем функций решение уравнения (3), которое ему соответствует, имеет вид

$$v(x,t)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}|x|_t^{2k}\frac{(-\lambda)^k u_m^{(0)}(x,t)}{(2,2)_k(n+1+2m,2)_k},$$

откуда для $u_2^{(0)}(x,t)=|x|^2+nt^2$ и $u_m^{(0)}(x,t)=0$ при $m\neq 2$, получаем

$$v(x,t)=\left(|x|^2+nt^2\right)\sum_{k=0}^{\infty}(-\lambda)^k\frac{\left(|x|^2-t^2\right)^k}{(2,2)_k(n+5,2)_k}=\left(|x|^2+nt^2\right)g_{n+5}\left(\lambda\left(|x|^2-t^2\right)\right).$$

Это решение волнового уравнения с младшим членом (3), которому соответствует волновой полином $u(x,t)=|x|^2+nt^2$.

Литература

1. Karachik, V.V. Normalized system of functions with respect to the Laplace operator and its applications / V.V. Karachik // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2003. – Vol. 287, № 2. – P. 577–592. DOI:10.1016/S0022-247X(03)00583-3

2. Карачик, В.В. Метод нормированных систем функций / В.В. Карачик. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2014. – 452 с.

3. Карачик, В.В. Об одном представлении аналитических функций гармоническими / В.В. Карачик // Математические труды. – 2007. – Т. 10, № 2. – С. 142–162.

4. Карачик, В.В. Об одном разложении типа Альманси / В.В. Карачик// Математические заметки. – 2008. – Т. 83, № 3. – С. 370–380. DOI: 10.4213/mzm4525

5. Карачик, В.В. Об одном разложении типа Альманси / В.В. Карачик // Математические заметки. – 2014. – Т. 96, № 2. – С. 228–238. DOI: 10.4213/mzm10114

6. Karachik, V.V. On one set of orthogonal harmonic polynomials / V.V. Karachik // Proceedings of AMS. – 1998. – Vol. 126, № 12. – P. 3513–3519.

7. Карачик, В.В. Полиномиальные решения дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами I / В.В. Карачик // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2011. – Вып. 4. – № 10(227). – С. 4–17.

Поступила в редакцию 27 июня 2015 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2015, vol. 7, no. 4, pp. 74–76

DOI: 10.14529/mmph150410

ON SOLUTIONS OF THE WAVE EQUATION WITH A MINOR TERM

E.Y. Chistyakov[1]

A correspondence between solutions of the wave equation and the wave equation with a minor term in a star-like domain was obtained. This result is an analogue of the corresponding result obtained earlier for both the Helmholtz equation and the Laplace equation.

Keywords: wave equation; normalized system of functions.

References

1. Karachik V.V. Normalized system of functions with respect to the Laplace operator and its applications. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2003, Vol. 287, no. 2, pp. 577–592. DOI: 10.1016/S0022-247X(03)00583-3

2. Karachik V.V. *Metod normirovannykh sistem funktsiy* [Method of normalized systems of functions] Chelyabinsk: Izdatel'skiy tsentr YuUrGU, 2014. 452 p. (in Russ.).

3. Karachik V.V. On one representation of analytic functions by harmonic functions. *Siberian Advances in Mathematics*, 2008, Vol. 18, no. 2, pp.103–117. DOI: 10.3103/S1055134408020041

4. Karachik V.V. On an expansion of Almansi type. *Mathematical Notes,* 2008, Vol. 83, no. 3, pp. 335–344. DOI: 10.1134/S000143460803005X

5. Karachik V.V. On the arithmetic triangle arising from the solvability conditions for the Neumann problem. *Mathematical Notes*, 2014, Vol. 96, no. 2, pp. 217–227. DOI: 10.1134/S0001434614070232

6. Karachik V.V. On one set of orthogonal harmonic polynomials. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1998, Vol. 126, no. 12, pp. 3513–3519. DOI: 10.1090/S0002-9939-98-05019-9

7. Karachik V.V. Polynomial solutions to partial differential equations with constant coefficients I. *Bulletin of South Ural State University. Series of "Mathematics. Mechanics. Physics"*, 2011, Issue 4, no. 10(227), pp. 4–17. (in Russ.).

Received June 27, 2015

[1] Chistyakov Evgeny Yuryevich is Bachelor Student, Mathematical and Functional Analysis Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russia.
E-mail: evgeniy_chistyak@mail.ru