

О ЧИСЛЕ ОЕ-ЦЕПЕЙ ДЛЯ ЗАДАННОЙ СИСТЕМЫ ПЕРЕХОДОВ

Т.А. Макаровских¹

Ранее установлено существование *ОЕ*-цепи в плоском эйлеровом графе и предложен алгоритм построения такой цепи. В статье исследуется вопрос о числе *ОЕ*-цепей с системой переходов, индуцируемой отдельной *ОЕ*-цепью и установлено, что верхняя оценка этого числа не превышает удвоенной суммы количества вершин, смежных внешней грани, и суммы степеней разделяющих вершин. Построенная оценка достижима, если система переходов является системой переходов *A*-цепи. Исследован вопрос существования *ОЕ*-цепей, удовлетворяющих произвольной системе переходов.

Ключевые слова: плоский граф; эйлеров цикл; система переходов; *A*-цепь; упорядоченное охватывание.

Введение

В настоящее время активно развивается раздел теории графов, посвященный построению различных цепей с ограничениями. Данный интерес обусловлен тем, что граф является математической моделью объектов из различных прикладных областей.

Например, при технологической подготовке процесса раскроя в качестве математической модели раскройного плана рассматривается топологический плоский граф G , который с точностью до гомеоморфизма отображает раскройный план. Задача заключается в построении в графе G маршрута, представляющего собой покрытие упорядоченным множеством цепей, удовлетворяющих следующим ограничениям на траекторию движения режущего инструмента:

(P1) отрезанная часть листа не должна требовать дополнительных разрезов (данная задача рассмотрена в [1, 2]);

(P2) при огненной резке (*flame cutting*) должны отсутствовать пересечения резов [3].

В работе [4] для плоских эйлеровых графов введено понятие *ОЕ*-цепи и предложен алгоритм ее построения. Понятие *ОЕ*-цепи решает задачу с ограничением (P1). Если граф является полуэйлеровым и хотя бы одна из вершин нечетной степени смежна внешней грани, то применение алгоритма из работы [4] с небольшими модификациями решает задачу и в этом случае. В работе [1] решена задача с ограничением (P1) для плоских связных графов G общего вида. Задача решается построением *ОЕ*-маршрута, представляющего минимальное по мощности упорядоченное реберно-непересекающееся покрытие графа *ОЕ*-цепями. Таким образом, любая *ОЕ*-цепь в построенном *ОЕ*-маршруте покрывает некоторый полуэйлеров подграф графа G .

В связи с изложенным выше представляет интерес оценка количества *ОЕ*-цепей в эйлеровом графе. Любая *ОЕ*-цепь индуцирует систему переходов [5], для которой существует множество *ОЕ*-цепей M . В результате встает задача оценки мощности множества M .

1. Основные определения

Общепринято формализовать локальные ограничения на маршрут в терминах системы переходов. Приведем определения системы переходов из монографии [5].

Определение 1. *Графом разрешенных переходов (или короче, графом переходов) $T_G(v)$ вершины $v \in V(G)$ будем называть граф, вершинами которого являются ребра, инцидентные вершине v , т.е. $V(T_G(v)) = E_G(v)$, а множеством ребер – разрешенные переходы между ребрами.*

¹ Макаровских Татьяна Анатольевна – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра «Экономико-математические методы и статистика», Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация.

Е-mail: kward@mail.ru, paniukovata@susu.ac.ru

Определение 2. Системой разрешенных переходов (или короче, системой переходов) T_G будем называть множество $\{T_G(v) \mid v \in V(G)\}$, где $T_G(v)$ – граф переходов в вершине v .

В соответствии с работой [6] будем использовать следующее определение.

Определение 3. Эйлеров цикл в плоском графе G называется **самонепересекающимся**, если он гомеоморфен циклическому графу \tilde{G} , который может быть получен из графа G с помощью применения $|E(G)|$ операций расщепления вершин.

Определение 4. Систему переходов цепи, соответствующую самонепересекающейся цепи, будем называть **системой непересекающихся переходов**.

Далее рассмотрим задачу пересчета цепей в графе G , совместимых с системой переходов $X_T(G)$ некоторой цепи T , удовлетворяющей условию упорядоченного охватывания [4].

Определение 5. Пусть S – плоскость, на которой представлен плоский граф $G = (V, E)$. Пусть f_0 – внешняя грань графа G . Для любого подмножества $H \subset S$ через $\text{Int}(H)$ определим подмножество S , являющееся объединением всех компонент связности множества $S \setminus H$, не содержащих внешней грани f_0 . При этих условиях цикл $C = v_1 e_1 v_2 e_2 \dots v_k$ в плоском эйлеровом графе G называется **циклом с упорядоченным охватыванием** (или для краткости **ОЕ-циклом**), если для $C_l = v_1 e_1 v_2 e_2 \dots v_l$, $l \leq |E|$ выполнено условие $\text{Int}(C_l) \cap E = \emptyset$.

Построенный в графе ОЕ-цикл $T(G)$ однозначно определяет систему переходов $X_T(G)$ графа G . Например, для графа, приведенного на рис. 1, цикл

$$C_1 = v_1 e_1 v_3 e_3 v_2 e_2 v_1 e_6 v_2 e_5 v_3 e_4 v_1$$

соответствует системе переходов $X_{C_1}(G)$, представленной жирными линиями на рис. 1.

Для дальнейших рассуждений потребуется понятие **ранг** ребра e в плоском графе $G(V, E)$ [1], в работе [1] эта величина определялась как уровень вложенности.

Определение 6. Рангом ребра e , обозначаемым как $\text{rank}(e)$, плоского графа $G(V, E)$ является величина, определенная следующим образом:

- все ребра, ограничивающие внешнюю грань f_0 графа $G(V, E)$, образуют множество ребер $E_1 = \{e \in E : e \subset f_0\}$ ранга 1: $(\forall e \in E_1)(\text{rank}(e) = 1)$.

- Ребра ранга 1 для графа

$$G_k \left(V, E \setminus \left(\bigcup_{l=1}^{k-1} E_l \right) \right)$$

образуют множество E_k ребер ранга k исходного графа G , т.е. $(\forall e \in E_k)(\text{rank}(e) = k)$.

Таким образом, ранги всех ребер графа возможно определить рекурсивно за полиномиальное время [7]. С помощью введенных определений покажем, что при соответствующем выборе начальной вершины и начального ребра ОЕ-цикла возможно построить и другие ОЕ-циклы, удовлетворяющие той же системе переходов.

2. О числе ОЕ-циклов

Рассмотрим плоский эйлеров граф G и построенный в нем, например, с использованием алгоритма из [7] ОЕ-цикл T . Если $X_T(G)$ – система переходов, соответствующая циклу T , тогда справедливо следующее утверждение.

Предложение 1. Пусть $G(V, E)$ – плоский эйлеров граф без точек сочленения и T представляет ОЕ-цепь в графе G , которой соответствует система переходов $X_T(G)$. Тогда число ОЕ-цепей N для системы переходов $X_T(G)$ удовлетворяет неравенству $1 \leq N \leq 2 \cdot |V(f_0)|$, $V(f_0) = \{v \mid v \in f_0\}$, причем как верхняя, так и нижняя оценки достижимы.

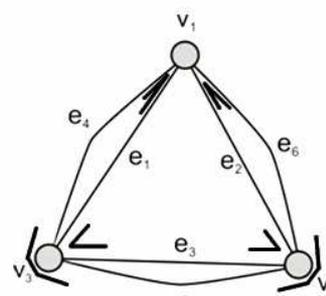


Рис. 1. Пример графа с системой непересекающихся переходов

Доказательство. Существование ОЕ-цепи T доказано в работе [4], откуда следует нижняя оценка. Зафиксируем систему переходов $X_T(G)$ ОЕ-цепи T . Для данной системы переходов все вершины множества $V(f_0)$ можно разбить на два класса: $V_1 = \{v \mid E(T_G(v)) \in \{e_1, e_2\}, e_1, e_2 \in f_0\}$ и $V_2 = \{v \mid E(T_G(v)) \in \{e_1, e_2\}, e_1, e_2 \notin f_0\}$. Система переходов для $v \in V_1$ допускает не более двух ОЕ-цепей, стартующих с ребер, ограничивающих внешнюю грань. Если предположить, что цепь стартует с ребра, которое не принадлежит внешней грани, то она и закончится ребром, которое не принадлежит внешней грани, что не удовлетворяет требованию ОЕ-цепи. Для вершин из множества V_2 , наоборот, построение ОЕ-цепи возможно только при условии старта по ребру, не принадлежащему внешней грани. В противном случае при возврате в выбранную вершину v будет охвачено по крайней мере одно ребро, не смежное внешней грани. Таким образом, заданная система переходов допускает не более $2 \cdot |V(f_0)|$ ОЕ-цепей. Покажем, что эта оценка достижима. Рассмотрим граф, приведенный на рис.1. В этом графе ОЕ-цепь $C_{1,1} = v_1 e_1 v_3 e_3 v_2 e_2 v_1 e_6 v_2 e_5 v_3 e_4 v_1$ индуцирует систему переходов $X_{C_{1,1}}(G) = \{T_G(v_1), T_G(v_2), T_G(v_3)\}$, где

$$\begin{aligned} V(T_G(v_1)) &= \{e_1, e_2, e_4, e_6\}; E(T_G(v_1)) = \{\{e_1, e_4\}, \{e_2, e_6\}\}; \\ V(T_G(v_2)) &= \{e_2, e_3, e_5, e_6\}; E(T_G(v_2)) = \{\{e_2, e_3\}, \{e_5, e_6\}\}; \\ V(T_G(v_3)) &= \{e_1, e_3, e_4, e_5\}; E(T_G(v_3)) = \{\{e_1, e_3\}, \{e_4, e_5\}\}. \end{aligned}$$

Для вершины v_1 существует еще одна ОЕ-цепь $C_{1,2} = v_1 e_2 v_2 e_3 v_3 e_1 v_1 e_4 v_3 e_5 v_2 e_6 v_1$. При этом для вершины $v_2 \in f_0$ ОЕ-цепи $C_{2,1} = v_2 e_6 v_1 e_2 v_2 e_3 v_3 e_1 v_1 e_4 v_3 e_5 v_2$ и $C_{2,2} = v_2 e_5 v_3 e_4 v_1 e_1 v_3 e_3 v_2 e_2 v_1 e_6 v_2$ удовлетворяют системе переходов $X_{C_{1,1}}(G)$, а для вершины v_3 данной системе удовлетворяют ОЕ-цепи $C_{3,1} = v_3 e_4 v_1 e_1 v_3 e_3 v_2 e_2 v_1 e_6 v_2 e_5 v_3$ и $C_{3,2} = v_3 e_5 v_2 e_6 v_1 e_2 v_2 e_3 v_3 e_1 v_1 e_4 v_3$. Таким образом в графе из трех вершин имеется шесть $X_T(G)$ -совместимых ОЕ-цепей.

Рассмотрим теперь тот же граф с другой системой переходов $X_C(G)$ (рис. 2). Основным отличием данной системы переходов от системы переходов, заданной на рис.1, является наличие пересечений переходов в вершинах v_2 и v_3 .

В данном случае граф имеет единственную ОЕ-цепь

$$C = v_2 e_3 v_3 e_4 v_1 e_1 v_3 e_5 v_2 e_2 v_1 e_6 v_2$$

для заданной $X_C(G)$. В случае выбора как вершины v_1 , так и вершины v_3 получим, что цикл $v_1 e_1 v_3 e_5 v_2 e_2 v_1$ охватывает еще непройденное ребро e_3 . Заметим, что стартовым ребром в данном случае может быть только ребро e_3 . Следовательно, достижима и нижняя оценка.

С практической точки зрения особый интерес представляют графы, для которых верхняя оценка достижима. Из доказательства предложения 1 видно, что не всякий ОЕ-цикл индуцирует систему переходов, для которой будет достигаться верхняя оценка. Отметим также, что для нахождения подходящей системы переходов, для которой достигается верхняя оценка, недостаточно знать только начальную вершину и начальное ребро.

2.1. Число ОЕ-циклов для системы переходов, соответствующей А-цепи

Рассмотрим эйлерову цепь $T = v_0, k_1, v_1, \dots, k_n, v_n, v_n = v_0$ в графе $G = (V, E)$. Предположим, что в каждой вершине $v \in V$ задан циклический порядок $O^\pm(v)$, определяющий систему переходов $A_G(v) \subset O^\pm(v)$ в этой вершине.

Определение 7. Систему переходов $A_G(v)$ называют полной, если $\forall v \in V(G) A_G(v) = O^\pm(v)$.

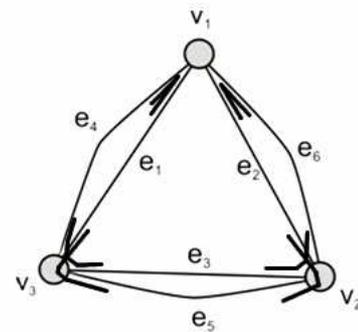


Рис. 2. Пример графа с системой переходов, имеющей пересечения

Определение 8 [5]. Эйлерову цепь T будем называть A -цепью, если она является A_G -совместимой цепью. Таким образом, последовательные ребра в цепи T (инцидентные вершине v) являются соседями в циклическом порядке $O^\pm(v)$.

Очевидно, что пример, приведенный на рис. 1, удовлетворяет данному случаю. Для системы переходов, соответствующей A -цепи, справедливо следующее утверждение об OE -циклах.

Теорема 1. Пусть плоский граф $G = (V, E)$ без разделяющих вершин имеет A -цепь T , которой соответствует система переходов $X_T(G)$. Если $V(f_0)$ – множество вершин, смежных внешней грани, то число OE -циклов для $X_T(G)$ равно $2 \cdot |V(f_0)|$.

Доказательство. Доказательство факта, что A -цепь, начинающаяся и заканчивающаяся в вершине $v_0 \in f_0$, является OE -циклом приведено в [8].

Подсчитаем число OE -циклов для фиксированной системы переходов. В [6] доказано, что любой OE -цикл начинается в вершине $v \in f_0$ и завершается ребром $e \in f_0$. В соответствии с условием теоремы, любая вершина $v_j \in f_0, j = 1, \dots, |V(f_0)|$ не является разделяющей, поэтому имеет ровно два инцидентных ей ребра, смежных внешней грани f_0 . Так как система переходов соответствует A -цепи, если по одному из этих ребер достигается вершина v_j , то по другому цепь выходит из этой вершины. Если оба этих ребра используются только для достижения вершины, то не выполнено условие упорядоченного охватывания (в этом случае одно из этих входящих в вершину ребер оказывается пройдено раньше, чем были пройдены некоторые внутренние ребра). Если оба ребра используются только для покидания вершины, то в системе переходов $X_T(G)$ возникнут пересечения. Однако такая система переходов не соответствует системе переходов A -цепи.

Так как A -цепь является замкнутой последовательностью ребер и вершин, то ее начало может быть помещено в любую вершину, например, в $v_j \in f_0$. Если v_j является последней вершиной OE -цепи, то необходимо, чтобы в последовательности $e_{j-1}v_j e_j$ ребро $e_{j-1} \in f_0$. Действительно, в противном случае последнее ребро e_{j-1} OE -цепи окажется охваченным циклом из ребер, смежных внешней грани. Если за начало цепи принять некоторую вершину $v \in V(f_0)$, то в соответствии с предопределенным циклическим порядком $O^\pm(G)$ можно выбрать одно из двух инцидентных ребер для покидания текущей вершины. Следовательно, из произвольной вершины $v \in V(f_0)$ можно построить два OE -цикла. Так как существует $|V(f_0)|$ вершин, смежных внешней грани, число OE -циклов, соответствующих системе переходов для A -цепи, равно $2 \cdot |V(f_0)|$.

Если в графе $G(V, E)$ имеется несколько разделяющих вершин, то для системы $X_T(G)$, соответствующей A -цепи в данном графе, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть плоский граф $G = (V, E)$ имеет K разделяющих вершин $v_1, \dots, v_K \in f_0$ и пусть в этом графе существует A -цепь T . Пусть $X_T(G)$ – система переходов, соответствующая T , а $V(f_0)$ – множество вершин, смежных внешней грани. Существует

$$2 \cdot |V(f_0)| + \sum_{i=1}^K (\deg(v_i) - 2)$$

OE -циклов для $X_T(G)$.

Доказательство. В соответствии с теоремой 1 граф G без разделяющих вершин имеет ровно $2 \cdot |V(f_0)|$ OE -циклов для системы переходов, соответствующей некоторой A -цепи. Пусть $v_i \in V(f_0)$ – разделяющая вершина степени $\deg(v_i) = 2M_i$. В циклическом порядке ребер, соответствующем данной вершине, имеется ровно M_i ребер, по которым цепь достигает данную вершину и столько же ребер, по которым она покидает эту вершину. Одна пара ребер уже подсчитана в $|V(f_0)|$, но не учитывается еще $M_i - 1$ возможность начала OE -цикла. Суммируя по всем разделяющим вершинам, получим выражение, указанное в формулировке теоремы.

Заметим, что если $X_T(G)$ не соответствует A -цепи, то верхняя оценка не достигается даже если цепь T является самонепересекающейся. Подтверждением данного факта является пример,

приведенный на рис. 3. В приведенном графе не существует *A*-цепи, однако можно определить систему непересекающихся переходов $X_T(G)$. Для этого графа при заданной системе переходов $X_T(G)$, приведенной на рис. 3, существует только пять *OE*-цепей, начинающиеся в разных вершинах на внешней грани:

- $C_1 = v_0 e_7 v_1 e_1 v_0 e_2 v_1 e_4 v_2 e_5 v_1 e_6 v_2 e_3 v_0 e_9 v_2 e_8 v_0$;
- $C_2 = v_0 e_8 v_2 e_9 v_0 e_3 v_2 e_6 v_1 e_5 v_2 e_4 v_1 e_2 v_0 e_1 v_1 e_7 v_0$;
- $C_3 = v_1 e_1 v_0 e_2 v_1 e_4 v_2 e_5 v_1 e_6 v_2 e_3 v_0 e_9 v_2 e_8 v_0 e_7 v_1$;
- $C_4 = v_2 e_3 v_0 e_9 v_2 e_8 v_0 e_7 v_1 e_1 v_0 e_2 v_1 e_4 v_2 e_5 v_1 e_6 v_2$;
- $C_5 = v_2 e_9 v_0 e_3 v_2 e_6 v_1 e_5 v_2 e_4 v_1 e_2 v_0 e_1 v_1 e_7 v_0 e_8 v_2$.

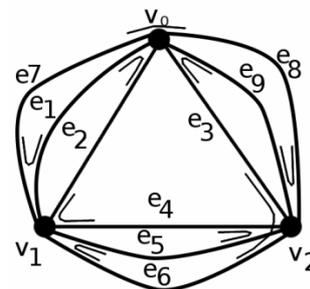


Рис. 3. Пример графа с системой непересекающихся переходов, не допускающей *A*-цепь

При построении цепи из вершины v_1 возможно построение цепи, начинающейся либо с ребра e_1 (в этом случае будет построена цепь C_3 , последним ребром которой будет e_7), либо с ребра e_5 (в этом случае последним в цепи будет ребро e_6 , однако построенная цепь $C_6 = v_1 e_5 v_2 e_4 v_1 e_2 v_0 e_1 v_1 e_7 v_0 e_8 v_2 e_9 v_0 e_3 v_2 e_6 v_1$ не будет являться *OE*-цепью, т.к. ребра e_9 и e_3 к моменту их включения в цепь окажутся охваченными).

В общем случае система переходов $X_T(G)$, соответствующая любой *OE*-цепи, может иметь пересечения (пример цепи, соответствующей системе переходов с пересечениями, приведен на рис. 2). Таким образом, в данном случае число *OE*-цепей лежит в интервале от 1 до $2 \cdot |V(f_0)|$.

3. Необходимое условие существования *OE*-цепи для заданной системы переходов

Рассмотрим частный случай, когда граф $G(V, E)$ является 4-регулярным плоским графом. Тогда в G существует эйлерова цепь T с соответствующей ей системой переходов $X_T(G)$. Выше было доказано, что если $X_T(G)$ не имеет пересечений, тогда число *OE*-цепей для этой системы переходов равно $2 \cdot |V(f_0)|$.

Предположим, что система переходов $X_T(G)$ имеет хотя бы один пересекающийся переход. В общем случае существование *OE*-цепи определяется как наличием пересечений в системе переходов, так и их расположением. Например, в графе на рис. 4 приведена система переходов с единственным пересечением, для которой не существует *OE*-цепи.

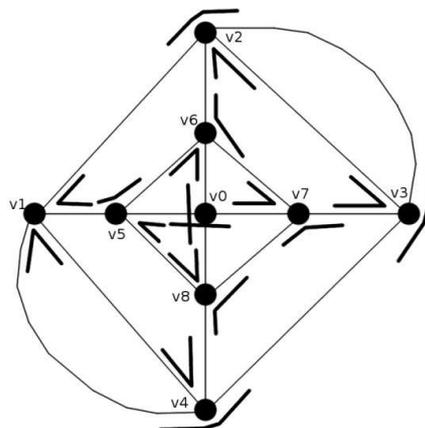


Рис. 4. Пример системы переходов с единственным пересечением, которая не соответствует ни одной *OE*-цепи

Тем не менее, если изменить всего два перехода, то получим систему переходов, которой соответствует некоторая *OE*-цепь. Например, заменив всего два перехода (в вершинах v_1 и v_2), получим *OE*-цепь $v_2 v_6 v_7 v_0 v_5 v_8 v_0 v_6 v_3 v_1 v_4 v_8 v_7 v_3 v_2 v_3 v_4 v_1 v_2$ (рис. 5). Граф на рис.6 имеет систему переходов с тремя пересечениями, которой соответствует также одна *OE*-цепь. Более того, несложно найти примеры графов, имеющих до $|V(f_0)|$ *OE*-цепей для систем переходов с пересечениями.

Прежде чем привести утверждения для 4-регулярных графов, докажем следующее.

Предложение 2. Если система переходов $X_T(G)$ для некоторой эйлеровой цепи T 2-вершинно-связного 4-регулярного плоского графа G без разделяющих вершин имеет только пересекающиеся переходы, то $X_T(G)$ не соответствует ни одной *OE*-цепи в графе G .

Доказательство. Построим модифицированный граф G^* , полученный из графа G расщеплением вершин, имеющих непересекающиеся переходы. Таким образом, если для некоторой вершины v графа G^* ее степень $\deg(v) > 2$, то в этой вершине существует пересекающийся переход

как в графе G^* , так и в графе G . С точностью до гомеоморфизма будем считать, что все вершины графа G^* имеют степень больше 2, следовательно, во всех вершинах графа G^* имеются пересекающиеся переходы. Предположим, что заданная в условии утверждения система переходов $X_T(G)$ соответствует некоторой OE -цепи T . Рассмотрим 2-вершинно-связный граф G^* (как было сказано выше, имеющий только вершины с пересекающимися переходами) и цепь, начинающуюся с ребра e_0 (на рис. 7 представлены фрагменты такого графа).

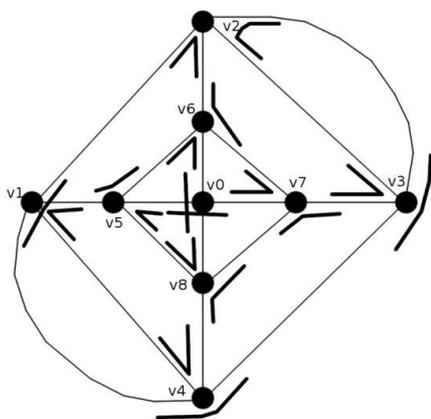


Рис. 5. Пример системы переходов, соответствующей одной OE -цепи

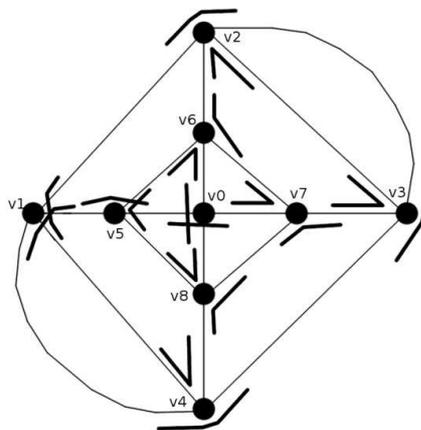


Рис. 6. Еще один пример системы переходов, которой соответствует единственная OE -цепь

Все ребра, представленные на рис. 7, являются абстрактными и могут представлять различные множества ребер. В соответствии с заданной системой переходов, после e_0 цепь проходит по «ребру» e_2 . Так как вершина x_0 не является разделяющей, то цепь, начинающаяся с «ребра» e_2 , должна будет пройти по «ребру» e_3 , пересечься с «ребром», смежным e_0 , и вернуться в вершину x_0 . Непосредственно из построения следует, что e_4 в данном случае окажется охваченным циклом, следовательно, построенная цепь не является OE -цепью. Легко видеть, что подобное охватывание возникает и для цепей, начинающихся и с других «ребер».

Рассмотрим эйлерову цепь T , соответствующую системе переходов $X_T(G)$ 4-регулярного плоского графа $G(V, E)$. Построим редуцированный граф $G'(V', E)$, в котором вершины, не имеющие пересечений переходов в $X_T(G)$, расщеплены на две вершины. В соответствии с предложением 2, если в графе G' найдется блок, не являющийся циклом, то в графе G для заданной системы переходов не существует OE -цепи.

С другой стороны, граф G' имеет OE -цепь только в том случае, когда каждый блок в G' имеет OE -цепь. Доказательство данного факта очевидно, т.к. все блоки редуцированного графа обходятся последовательно один за другим. Таким образом, если предположить, что существует блок, не имеющий OE -цепи, тогда этот блок, объединенный с остальными, никаким образом не будет иметь такой цепи.

Изложенное дает доказательство теоремы 3.

Теорема 3 (Необходимое условие). *Если в редуцированном графе G' существует OE -цепь, соответствующая заданной системе переходов, то в исходном графе G существует хотя бы одна OE -цепь, начинающаяся в вершинах, соответствующих разделяющим вершинам графа G' .*

К сожалению, данное условие не является достаточным даже для 4-регулярного графа с заданной системой переходов. Например, редуцированный граф G' для графа G , представленного на рис.4, является парой петель, инцидентных висячей вершине v_0 . В редуцированном графе G'

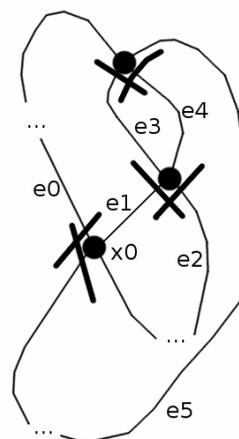


Рис. 7. Некоторые фрагменты графа, имеющего только пересекающиеся переходы

существует OE -цепь, тем не менее, выше было показано, что для данной системы переходов не существует OE -цепи в графе G . Вообще, вершина v_0 в рассмотренном примере несмежна внешней грани, потому из данной вершины невозможно начать построение OE -цепи. Но если начать построение цепи из любой вершины смежной внешней грани, построить OE -цепь для заданной системы $X_T(G)$ также не удастся. Несмотря на это, в редуцированном графе G' имеется OE -цепь.

Заключение

Таким образом, в плоском графе G для непересекающейся системы переходов $X_T(G)$ существует не более $2 \cdot |V(f_0)|$ (где $|V(f_0)|$ – число вершин, смежных внешней грани графа) OE -цепей. Если система переходов $X_T(G)$ имеет пересечения, то число ее OE -цепей лежит в промежутке от 1 до $2 \cdot |V(f_0)|$ только тогда, когда в редуцированном графе G' существует OE -цепь. Данные результаты могут быть использованы при технологической подготовке процесса вырезания деталей, когда раскройный план представлен в виде плоского графа, траектория движения режущего инструмента является OE -цепью и требуется определить все возможные точки старта процесса вырезания при фиксированной последовательности вырезания деталей.

Автор благодарит Герберта Фляйшнера, профессора Технического университета г. Вены, за постановку задачи и плодотворное обсуждение.

Литература

1. Панюкова, Т.А. Оптимальные эйлеровы покрытия с упорядоченным охватыванием для плоских графов / Т.А. Панюкова // Дискретный анализ и исследование операций. – 2011. – Т. 18, № 2. – С. 64–74.
2. Makarovskikh, T.A. The Algorithm for Constructing of Cutter Optimal Path / T.A. Makarovskikh // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2014. – Vol. 1, № 2. – P. 52–61.
3. Фроловский, В.Д. Автоматизация проектирования управляющих программ тепловой резки металла на оборудовании с ЧПУ / В.Д. Фроловский // Информационные технологии в проектировании и производстве. – 2005. – Вып. 4. – С. 63–66.
4. Panioukova, T.A. The Algorithm for Tracing of Flat Euler Cycles with Ordered Enclosing / T.A. Panioukova, A.V. Panyukov // Известия Челябинского научного центра УрО РАН. – 2000. – № 4(9). – P. 18–22.
5. Fleischner, H. Eulerian Graphs and Related Topics, Part 1, Vol. 1 / H. Fleischner // Ann. Discrete Mathematics. – 1990. – Vol. 45. – 450 с.
6. Белый, С.Б. О самонепересекающихся и непересекающихся цепях / С.Б. Белый // Математические заметки. – 1983. – № 34. – Вып. 4. – С. 625–628.
7. Панюкова, Т.А. Обходы с упорядоченным охватыванием в плоских графах / Т.А. Панюкова // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 2. – 2006. – Т. 13, № 2. – С. 31–43.
8. Панюкова, Т.А. Построение эйлеровых циклов с упорядоченным охватыванием как математическая модель решения задачи раскроя / Т.А. Панюкова // Современные информационные технологии и ИТ-образование: сборник избранных трудов VIII Международной научно-практической конференции. Под ред. проф. В.А. Сухомлина. М.: ИНТУИТ.РУ, 2013. – С. 706–713.

Поступила в редакцию 29 июня 2015 г.

ON THE NUMBER OF OE-TRAILS FOR A FIXED TRANSITION SYSTEM

T.A. Makarovskikh¹

The existence of OE-trail for a plane Eulerian graph had been established earlier and algorithm of its constructing was suggested. This paper is devoted to a question of enumeration of OE-trails for a system of transitions induced by a particular OE-trail. The upper bound of this estimation does not exceed the double sum of vertices adjacent the outer face and sum of cutvertices degrees. This bound is reachable if a transition system satisfies any A-trail. The number of OE-trails for an arbitrary chosen transition system is also examined.

Keywords: planar graph; Eulerian cycle; transition system; A-trail; ordered enclosing.

References

1. Panyukova T.A. *Diskretnyy analiz i issledovanie operatsiy*. 2011, Vol. 18, no. 2, pp. 64–74. (in Russ.).
2. Makarovskikh T.A. The Algorithm for Constructing of Cutter Optimal Path. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*. 2014, Vol. 1, no. 2, pp. 52–61.
3. Frolovskiy V.D. *Informatsionnye tekhnologii v proektirovanii i proizvodstve*, 2005, Issue 4, pp. 63–66. (in Russ.).
4. Panioukova T.A., Panyukov A.V. The Algorithm for Tracing of Flat Euler Cycles with Ordered Enclosing. *Izvestiya Chelyabinskogo nauchnogo tsentra UrO RAN*, 2000, no. 4(9), pp. 18–22.
5. Fleischner H. *Eulerian Graphs and Related Topics, Part 1, Vol. 1*. Ann. Discrete Mathematics. North Holland, Amsterdam, 1990, Vol. 45, 450 p.
6. Belyy S.B. *Matematicheskie zametki*, 1983, no. 34, Issue 4, pp. 625–628. (in Russ.).
7. Panyukova T.A. *Diskretnyy analiz i issledovanie operatsiy. Ser. 2*, 2006, Vol. 13, no. 2, pp. 31–43. (in Russ.).
8. Panyukova T.A. Postroenie eylerovykh tsiklov s uporyadochennym okhvatyvaniem kak matematicheskaya model' resheniya zadachi raskroya [Construction of Euler cycles ordered grapple as a mathematical model of solving the cutting problem]. *Sovremennyye informatsionnye tekhnologii i IT-obrazovanie: sbornik izbrannykh trudov VIII Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii. Pod red. prof. V.A. Sukhomlina* [Modern information technology and IT education: Proceedings of the VIII International Scientific and Practical Conference. prof. VA Sukhomlin (Ed.)]. Moscow, INTUIT.RU Publ., 2013, pp. 706–713. (in Russ.).

Received 29 June 2015

¹ Makarovskikh Tatiana Anatolievna is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associated Professor, Mathematical Methods in Economics and Statistics Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russia.
E-mail: kwark@mail.ru, paniukovata@susu.ac.ru