УДК 517.95 DOI: 10.14529/mmph160102

# ОБ ОТСУТСТВИИ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ШВАРЦА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ТИПОВ МАТРИЦ[1]

***В.Г. Николаев***[2]

**Рассмотрена задача Шварца для 2-вектор-функций, аналитических по Дуглису в круге. Доказано, что для некоторых типов матриц и граничных аналитических функций она не имеет решений. Построен пример.**

*Ключевые слова: голоморфная функция; аналитическая продолжимость; матрица; собственный вектор; область; контур Ляпунова.*

## 1. Основные определения

**Определение 1.** [1] *Пусть* $n\times n$*-матрица* $J$ *не имеет вещественных собственных чисел. Аналитической по Дуглису* (*или* $J$*-аналитической с матрицей* $J$) *называется комплексная* $n$*-вектор-функция* $\omega(z)\in C^1(D)$, *для которой в плоской области* $D$ *выполнено уравнение*

$$\frac{\partial\omega}{\partial y}-J\cdot\frac{\partial\omega}{\partial x}=0,\quad (x,y)\in D. \tag{1}$$

**Определение 2.** *Будем говорить, что функция* $\omega(z)$ *соответствует матрице* $J$, *если выполнено равенство* (1).

Рассмотрим для системы (1) следующую граничную задачу Шварца [1].

*Пусть односвязная конечная область* $D$ *на плоскости ограничена контуром* $\Gamma$. *Требуется найти J-аналитическую с матрицей* $J$ *в области* $D$ *функцию* $\omega(z)\in C(\overline{D})$, *для которой выполнено краевое условие*

$$\operatorname{Re}\,\omega(z)|_{\Gamma}=(\varphi_1,\ldots,\varphi_n), \tag{2}$$

*где вещественная вектор-функция* $\varphi(t)=(\varphi_1(t),\ldots,\varphi_n(t))\in C(\Gamma)$ *задана.*

При рассмотрении задачи Шварца будет использовано следующее

**Определение 3.** *Гладкая кривая* $\Gamma$ *на плоскости называется линией Ляпунова, если существуют такие два вещественных числа* $a>0$ *и* $b$, $0<b\le 1$, *что для любых двух точек* $z_1,z_2\in\Gamma$ *выполняется условие Ляпунова*

$$|\theta|<a\cdot|z_1-z_2|^b,$$

где $\theta$ – угол между касательными или нормалями к $\Gamma$ в точках $z_1,z_2$. Примерами линий Ляпунова могут служить окружность и эллипс.

Необходимо отметить, что имеет место следующий классический результат. Пусть $\Gamma$ — линия Ляпунова. Обозначим $H^\sigma(\Gamma)$, $H^\sigma(\overline{D})$, $0<\sigma<1$ класс функций, непрерывных по Гельдеру на $\Gamma$ или в $\overline{D}$. Как показано в [2], в случае размерности $n=1$ для любой граничной функции $\varphi\in H^\sigma(\Gamma)$ решение задачи Шварца существует в классе функций $\omega(z)\in H^\sigma(\overline{D})$. Данное решение единственно с точностью до постоянной.

В статье доказано (теорема 1), что при $n=2$ этот результат не всегда справедлив. Именно, существуют примеры неразрешимости задачи Шварца для единичного круга в тех же классах функций.

Прежде чем сформулировать основной результат, выполним редукцию задачи Шварца к некоторому функциональному уравнению.

## 2. Преобразование задачи Шварца для $n=2$

Пусть $2\times 2$-матрица $J$ имеет собственное число $\lambda=i$ кратности два, а ее собственный вектор $\overline{y}$ *не кратен вещественному*. Обозначим вектор $\overline{x}=(1,0)$, тогда вектор

[1] Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках выполнения государственного задания (проект 1.857.2014/К).

[2] Николаев Владимир Геннадьевич – ведущий математик, Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого, Великий Новгород, Российская Федерация.
E-mail: vg14@inbox.ru

$\overline{y} = (J - iE) \cdot \overline{x} \neq 0,$ так как такая матрица $J$ не может быть треугольной. Из последнего равенства: $J\overline{x} = i\overline{x} + \overline{y}$. Кроме того,

$$J\overline{y} = J(J - iE) \cdot \overline{x} = (J - iE + iE) \cdot (J - iE) \cdot \overline{x} = (J - iE) \cdot (J - iE) \cdot \overline{x} + iE(J - iE) \cdot \overline{x} = i\overline{y},$$

поскольку $(J - iE)^2 = 0$ согласно теореме Кэли–Гамильтона. Следовательно, столбцы матрицы

$$Q = (\overline{x}, \overline{y}) = \begin{pmatrix} 1 & a_1 + a_2 i \\ 0 & b_1 + b_2 i \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где $a_1, b_1, a_2, b_2$ – вещественные числа, будут жордановым базисом для матрицы $J$. По определению это означает, что

$$J_1 = Q^{-1} J Q = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Пусть 2-вектор-функция $\omega(z) \in C(\overline{D})$ является аналитической по Дуглису в области $D \subset R^2$, то есть для нее выполнено равенство (1). Так как в силу (4) $J = QJ_1Q^{-1}$, то с учетом (1) имеем:

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} - QJ_1Q^{-1} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0,$$

откуда, умножая обе части на $Q^{-1}$, получаем равенство

$$\frac{\partial}{\partial y}(Q^{-1}\omega) - J_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x}(Q^{-1}\omega) = 0. \tag{5}$$

Обозначим

$$\omega^0(z) = Q^{-1} \cdot \omega(z) = \begin{pmatrix} \mathrm{f}(z) \\ \psi(x, y) \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Из (6) вытекает, что функции $\mathrm{f}, \psi \in C(\overline{D})$. Распишем (5) с учетом (4) и (6) подробнее:

$$\frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix} \mathrm{f}(z) \\ \psi(x, y) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} \mathrm{f}(z) \\ \psi(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Первая строка (7) означает, что $\mathrm{f}(z)$ – голоморфная функция. Согласно второй строке функция $\psi(x, y)$ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} - i \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial x} = \frac{d\mathrm{f}}{dz}. \tag{8}$$

Обозначая $\mathrm{f}(z) = \mathrm{p} + i\,\mathrm{q}$ и $\psi(x, y) = \mathrm{u} + i\,\mathrm{v}$, выразим функцию $\omega(x, y)$ из (6) с учетом (3):

$$\omega(z) = Q \cdot \omega^0(z) = \begin{pmatrix} 1 & a_1 + a_2 i \\ 0 & b_1 + b_2 i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{p} + i\,\mathrm{q} \\ \mathrm{u} + i\,\mathrm{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{p}(x, y) + a_1 \cdot \mathrm{u}(x, y) - a_2 \cdot \mathrm{v}(x, y) + i \cdot \mathrm{h}_1(x, y) \\ b_1 \cdot \mathrm{u}(x, y) - b_2 \cdot \mathrm{v}(x, y) + i \cdot \mathrm{h}_2(x, y) \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где обозначено $(\mathrm{h}_1, \mathrm{h}_2) = \mathrm{Im}\,\omega(z)$.

Пусть функция $\omega(z) \in C(\overline{D})$ – решение задачи Шварца (2). С учетом (9) это означает, что имеет место следующая система линейных алгебраических уравнений относительно функций-переменных $\mathrm{u}(t)$ и $\mathrm{v}(t)$, $t \in \Gamma$:

$$\begin{cases} a_1 \cdot \mathrm{u}(t) - a_2 \cdot \mathrm{v}(t) = -\mathrm{p}(t) + \varphi_1(t), \\ b_1 \cdot \mathrm{u}(t) - b_2 \cdot \mathrm{v}(t) = \varphi_2(t). \end{cases} \tag{10}$$

Определитель системы (10) имеет вид $\Delta = -a_1 b_2 + a_2 b_1 \neq 0$, так как по условию собственный вектор $\overline{y} = (a_1 + a_2 i, b_1 + b_2 i)$ матрицы $J$ не кратен вещественному. Следовательно, система (10) имеет единственное решение относительно функций-переменных $\mathrm{u}, \mathrm{v}$. С учетом очевидного равенства

$$\mathrm{p}(x, y) = \mathrm{Re}\,\mathrm{f}(z) = \frac{1}{2} \cdot [\mathrm{f}(z) + \overline{\mathrm{f}}(z)]$$

это решение можно записать в виде

$$\psi = \mathrm{u} + i\,\mathrm{v} = (k+mi)\cdot \mathrm{p} + \mathrm{g}_1 + \mathrm{g}_2\, i = \frac{1}{2}\cdot(k+mi)\cdot[\mathrm{f}+\bar{\mathrm{f}}\,] + \mathrm{g}_1 + \mathrm{g}_2\, i. \qquad (11)$$

Здесь $k, m$ – вещественные числа; $\mathrm{g}_1, \mathrm{g}_2$ – вещественные линейные функции переменных $\varphi_1, \varphi_2$. Несложно показать, что

$$\begin{cases} \mathrm{g}_1(t) = \alpha_1\cdot\varphi_1(t) + \alpha_2\cdot\varphi_2(t), \\ \mathrm{g}_2(t) = \beta_1\cdot\varphi_1(t) + \beta_2\cdot\varphi_2(t), \quad t\in\Gamma, \end{cases} \qquad (12)$$

$$k = \frac{b_2}{\Delta}, \quad m = \frac{b_1}{\Delta}, \quad \Delta = -a_1 b_2 + a_2 b_1, \;\; \alpha_1 = -\frac{b_2}{\Delta},\;\; \alpha_2 = \frac{a_2}{\Delta},\;\; \beta_1 = -\frac{b_1}{\Delta},\;\; \beta_2 = \frac{a_1}{\Delta}. \qquad (13)$$

Далее рассмотрим уравнение (8). Непосредственной подстановкой проверяется, что его общее решение имеет вид

$$\psi(x,y) = \frac{i}{2}\,\bar{z}\cdot\frac{d\,\mathrm{f}}{dz} + \mathrm{F}_1(z), \quad \bar{z} = x - iy, \qquad (14)$$

где $\mathrm{F}_1(z)$ – произвольная голоморфная в области $D$ функция.

Объединяя (11) и (14), имеем следующее равенство, которое выполняется на контуре $\Gamma$ (в смысле предельных значений изнутри области $D$):

$$\frac{i}{2}\,\bar{z}\cdot\frac{d\,\mathrm{f}}{dz} + \mathrm{F}_1(z)\,|_{\Gamma} = \frac{1}{2}\cdot(k+mi)\cdot[\mathrm{f}(z)+\bar{\mathrm{f}}(z)] + \mathrm{g}_1 + \mathrm{g}_2\, i,$$

то есть

$$\bar{z}\cdot\frac{d\,\mathrm{f}}{dz} + \ell\cdot\bar{\mathrm{f}}(z) + \mathrm{F}(z)\,|_{\Gamma} = -2i(\mathrm{g}_1 + \mathrm{g}_2\, i), \quad \ell = ki - m, \qquad (15)$$

где обозначено $\mathrm{F}(z) = \ell\cdot\mathrm{f}(z) - 2i\,\mathrm{F}_1(z)$.

В (15) $\ell \neq 0$, так как в противном случае в силу (3) и (13) собственный вектор $\bar{y}$ будет кратным вещественному. В итоге доказана

***Лемма 1.*** *Пусть* $2\times 2$*-матрица* $J$ *имеет собственное число* $\lambda = i$ *кратности два и собственный вектор, не кратный вещественному. Пусть* $\omega(z)$ *— определенное в области* $D \subset R^2$ *решение задачи Шварца* (2). *Тогда по* $\omega(z)$ *можно построить голоморфные в* $D$ *функции* $\mathrm{f}(z) \in C(\bar{D})$ *и* $\mathrm{F}(z)$, *для которых справедлива формула* (15).

Сформулируем еще одно утверждение, которое доказано в [3] и будет использовано в дальнейшем.

**Лемма 2.** *Пусть* $A, B$ *— вещественные* $2\times 2$*-матрицы. Для того, чтобы для данной матрицы* $J = A + Bi$ *существовала соответствующая ей непостоянная линейная вектор-функция* $\omega(x,y)$, *удовлетворяющая однородному условию* $\mathrm{Re}\,\omega \equiv 0$, *необходимо и достаточно выполнение условия* $\det B = 0$.

Из лемм 1 и 2, в свою очередь, вытекает

**Лемма 3.** *Пусть для* $2\times 2$*-матрицы* $J = A + Bi$, *где* $A, B$ *– вещественные матрицы, выполнены условия леммы 1. Тогда если* $\det B = 0$, *то* $|\,\ell\,| = 1$ *в (15).*

**Доказательство.** Из (3) и (13) следует, что число $\ell$ в (15) зависит только от матрицы $J$, и не зависит от конкретной функции $\omega(z)$, по которой построены голоморфные функции $\mathrm{f}, \mathrm{F}$. Поэтому для определения $\ell$ можно рассмотреть любую функцию, соответствующую матрице $J$.

Согласно лемме 2 существует *непостоянная* линейная вектор-функция $\omega(z)$, соответствующая $J$ со свойством $\mathrm{Re}\,\omega(z) \equiv 0$. В этом случае формула (15) выполнена *тождественно*, а ее правая часть равна нулю:

$$\bar{z}\cdot\frac{d\,\mathrm{f}}{dz} + \ell\cdot\bar{\mathrm{f}}(z) + \mathrm{F}(z) \equiv 0, \quad \ell \neq 0. \qquad (16)$$

Применяя к обеим частям (16) оператор

$$\frac{\partial}{\partial y} - i\cdot\frac{\partial}{\partial x},$$

убеждаемся, что функции f, F будут линейными, то есть $f(z)=\xi_0+\xi_1 z,\ \ F(z)=\zeta_0+\zeta_1 z.$ После подстановки этих выражений в (16) имеем:

$$\bar z\cdot\xi_1+\ell\cdot(\bar\xi_0+\bar\xi_1\bar z)+\zeta_0+\zeta_1 z\equiv 0. \tag{17}$$

Из (17) вытекает, что $\xi_1\ne 0.$ Действительно, в противном случае $\zeta_1=0,$ откуда в силу (6), (14) и (15) будет следовать, что вектор-функция $\omega(z)$ постоянна, что противоречит ее определению. Поэтому согласно (17) $\xi_1+\ell\cdot\bar\xi_1=0,$ то есть $|\ell|=1.$

**3. Теорема об отсутствии разрешимости задачи Шварца**

Применим леммы 1–3 для построения примеров отсутствия разрешимости задачи Шварца. При этом будет использован *обобщенный принцип аналитического продолжения Шварца* [4], который состоит в следующем.

*Пусть функция* $f(z)$ *голоморфна в плоской области* $D$, *граница которой содержит аналитическую кривую* $\Gamma$, *причем* $f(z)$ *является аналитической на* $\Gamma$ (*в смысле предельных значений изнутри* $D$). *Тогда существует аналитическое продолжение* $f(z)$ *через* $\Gamma$.

Обозначим $K$ единичный круг, $\Gamma$ — его границу (единичную окружность). Имеет место

**Теорема 1.** *Пусть неособая* $2\times 2$ *-матрица* $J=A+Bi$, *где* $A,B$ *— вещественные матрицы, имеет кратное собственное число* $\lambda=i$, *а ее собственный вектор не кратен вещественному. Пусть* $\det B=0$. *Тогда существует аналитическая на* $\Gamma$ *вектор-функция* $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)$, *для которой задача Шварца (2) в классе функций* $\omega(z)\in C(\bar K)$, *то есть и в классе* $\omega\in H^\sigma(\bar K)$, $0<\sigma<1$, *не имеет решений.*

**Доказательство.** Идея доказательства основана на использовании леммы 1, а также формулы (15) и состоит в следующем. Нужно показать, что при определенном подборе комплексного числа $r=r_1+r_2 i\ne 0$ равенство

$$\bar z\cdot\frac{d\,f}{dz}+\ell\cdot\bar f(z)+F(z)+r\cdot\bar z\,|_\Gamma=0,\quad \ell\ne 0,\quad r\ne 0 \tag{18}$$

невозможно *ни для каких* функций $f(z)\in C(\bar K)$ и $F(z)$, голоморфных в $K$. Тогда для граничной функции $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)$, найденной по данной матрице $J$ с учетом (12) из условия

$$2i\,(g_1+g_2\,i)\,|_\Gamma=r\cdot\bar z, \tag{19}$$

задача Шварца будет неразрешима, так как существование решения будет противоречить лемме 1.

Доказываем от «противного»: пусть для всех $r\ne 0$ существуют функции $f(z)\in C(\bar K)$ и $F(z)$, для которых выполнено (18). Покажем, что из (18) вытекает продолжимость $f(z)$ и $F(z)$ в некоторую окрестность единичного круга $K$. Действительно, разложим функции $f(z), \bar f(z)$ и $F(z)$ в ряды Тейлора в круге $K$:

$$f(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\xi_k z^k,\quad \bar f(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\bar\xi_k \bar z^{-k},\quad F(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\zeta_k z^k,\qquad z\in K. \tag{20}$$

По $\bar f(z)$ образуем функцию

$$f_1(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\bar\xi_k\frac{1}{z^k},$$

которая будет голоморфна вне замыкания круга $K$. Так как $f(z)\in C(\bar K)$ по предположению, то

$$f_1(z)\,|_{\Gamma+}=\bar f(z)\,|_{\Gamma-}, \tag{21}$$

то есть функции $f_1(z)$, $\bar f(z)$ совпадают на $\Gamma$ в смысле предельных значений снаружи и изнутри круга $K$ соответственно. Кроме того, на единичной окружности $\Gamma$ совпадают значения функций $1/z$ и $\bar z$. Поэтому с учетом (18) и (21) имеем:

$$\frac{1}{z}\cdot\frac{d\,\mathrm{f}}{dz}|_{\Gamma-}+\ell\cdot \mathrm{f}_1(z)|_{\Gamma+}+\mathrm{F}(z)|_{\Gamma-}+r\cdot\frac{1}{z}|_{\Gamma-}=0. \tag{22}$$

Голоморфная вне круга $K$ функция $\mathrm{f}_1(z)$ с учетом (20) непрерывна на $\Gamma+$, так как по условию $\mathrm{f}(z)\in C(\overline{K})$. При этом согласно (22) $\mathrm{f}_1(z)$ совпадает на $\Gamma$ с функцией, голоморфной внутри круга $K$. Следовательно, $\mathrm{f}_1(z)$ аналитически продолжима в некоторое внутреннее кольцо $K-\subset K$ через окружность $\Gamma$ (см. [4]).

Таким образом, в силу (20) функция $\mathrm{f}(z)$ и ее производная $\frac{d\,\mathrm{f}}{dz}$ продолжимы в некоторое внешнее кольцо $K+$ круга $K$. Отсюда следует, что функция $\mathrm{F}(z)$ будет согласно (22) аналитической на аналитическом контуре $\Gamma$ (единичной окружности). Поэтому в силу приведенного выше *обобщенного принципа аналитического продолжения Шварца* функцию $\mathrm{F}(z)$ так же можно продолжить в $K+$.

Сказанное выше означает, что голоморфные функции $\mathrm{f}(z)$ и $\mathrm{F}(z)$ разлагаются в ряды Тейлора с центром в точке $z=0$, *сходящиеся в некоторой полной окрестности* круга $K$. Отсюда вытекает, что в (22) оказывается правомерной подстановка $z=e^{it}$:

$$e^{-it}\cdot\frac{d\,\mathrm{f}}{dz}\left(e^{it}\right)+\ell\cdot\overline{\mathrm{f}}\left(e^{it}\right)+\mathrm{F}\left(e^{it}\right)+r\cdot e^{-it}\equiv 0,\quad t\in[0,2\pi). \tag{23}$$

В (23) функция $\mathrm{f}_1(z)$ заменена на $\overline{\mathrm{f}}(z)$, так как они совпадают на $\Gamma$ согласно (21). С учетом (20) формулу (23) можно переписать в виде

$$e^{-it}\cdot\sum_{k=1}^{+\infty}k\xi_k e^{i(k-1)t}+\ell\cdot\sum_{k=0}^{+\infty}\overline{\xi}_k e^{-ikt}+\sum_{k=0}^{+\infty}\zeta_k e^{ikt}+r\cdot e^{-it}\equiv 0,\ t\in[0,2\pi). \tag{24}$$

Так как система комплексных функций $e^{ikt}$, $k$ – целое число, ортогональна в $L^2[0,2\pi)$, а ряды в (24) сходятся равномерно (а значит и в $L^2[0,2\pi)$), то из единственности разложения в ряд Фурье легко следует, что $\xi_k=0$ при всех $k>1$, то есть функция $\mathrm{f}(z)=\xi_0+\xi_1 z$. Перепишем (24), учитывая это:

$$e^{-it}\cdot\xi_1+\ell\cdot\left(\overline{\xi}_0+\overline{\xi}_1 e^{-it}\right)+\sum_{k=0}^{+\infty}\zeta_k e^{ikt}+r\cdot e^{-it}=0,\quad t\in[0,2\pi). \tag{25}$$

Здесь $\xi_1\neq 0$, так как $r=r_1+r_2 i\neq 0$ согласно (18). Из (25) следует, что

$$\xi_1+\ell\cdot\overline{\xi}_1+r_1+r_2 i=0,\quad \xi_1\neq 0,\quad \ell=ki-m, \tag{26}$$

то есть равна нулю сумма коэффициентов перед $e^{-it}$.

Обозначим $\xi_1=q+is$, где $q,s$ – вещественные числа. Рассмотрим (26) как систему линейных алгебраических уравнений относительно переменных $q,s$:

$$\begin{cases}(1-m)q+ks=-r_1,\\ kq+(1+m)s=-r_2.\end{cases} \tag{27}$$

Определитель системы (27) имеет вид $\Delta_1=1-m^2-k^2=1-|\ell|$. По условию $\det B=0$, откуда согласно лемме 3 $|\ell|=1$, то есть $\Delta_1=0$. Поэтому можно так подобрать число $r=r_1+r_2 i\neq 0$, что система (27) будет несовместной. При таком $r$ не имеет решений (26), то есть функции $\mathrm{f}(z)=\xi_0+\xi_1 z$, для которой выполнено равенство (18), *не существует*. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. *Тем самым теорема* 1 *доказана*.

В качестве иллюстрации к теореме 1 приведем

**Пример 1.** Пусть

$$J=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2i\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}. \tag{28}$$

Матрица $J$ имеет собственное число $\lambda = i$ кратности два, а также собственный вектор $\bar{y} = (J - iE) \cdot (1,0) = (-i,1)$, не кратный вещественному. При этом $\det B = 0$. Следовательно, для $J$ выполнены условия теоремы 1.

По формулам (3) и (13) находим: $\Delta = -1$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 0$, $k = 0$, $m = -1$. Таким образом, система (27) несовместна при $r = i$. Далее находим функцию $g_1 + g_2 i$ из (19) и находим функции $(\varphi_1, \varphi_2)$ из (12):

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t),\ \varphi_2(t)) = (-\frac{1}{2}\sin t,\ \frac{1}{2}\cos t), \quad t \in [0, 2\pi). \tag{29}$$

Остается заметить, что в силу теоремы 1 задача Шварца (2) для матрицы $J$ (28) в единичном круге $K$ с граничной функцией (29) в классе функций $\omega(z) \in C(\overline{K})$ не имеет решений.

**Литература**

1. Солдатов, А.П. Задача Шварца для функций, аналитических по Дуглису / А.П. Солдатов // Совр. математика и ее приложения. – 2010. – Т. 67(68). – С. 99–102.

2. Мусхелишвили, Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / Н.И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1968.– 342 с.

3. Николаев, В.Г. Об одном преобразовании задачи Шварца / В.Г. Николаев // Вестник Самарского государственного университета. – 2012. – Т. 6(97). – С. 27–34.

4. Привалов, И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного / И.И. Привалов.– М.: Высшая школа, 1999. – 432 с.

***Поступила в редакцию 20 ноября 2015 г.***

***Bulletin of the South Ural State University***
***Series "Mathematics. Mechanics. Physics"***
***2016, vol. 8, no. 1, pp. 13–18***

**DOI: 10.14529/mmph160102**

## ABOUT THE UNSOLVABILITY OF SCHWARZ'S TASK FOR SOME TYPES OF MATRICES

***V.G. Nikolaev***[1]

The task of Schwarz is considered for 2-vector functions, being analytic in a circle by Douglis. It is proved that for some types of matrices and boundary analytic functions the task has no solutions. The example is given.

*Keywords: holomorphic function; analytic continuability; matrix; eigenvector; region; Lyapunov contour.*

**References**

1. Soldatov A.P. The Schwarz problem for Douglis analytic functions. *Journal of Mathematical Sciences*, 2011, 173(2), pp. 221–224. DOI: 10.1007/s10958-011-0244-7

2. Muskhelishvili N.I. *Singulyarnye integral'nye uravneniya* [Singular integral equations]. Moscow, Nauka Publ., 1968, 342 p. (in Russ.).

3. Nikolaev V.G. Ob odnom preobrazovanii zadachi Shvartsa (About a transformation of Schwarz problem). *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2012, no. 6(97), pp. 27–34.

4. Privalov I.I. *Vvedenie v teoriyu funktsiy kompleksnogo peremennogo* [Introduction to the theory of functions of a complex variable]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1999, 432 p.

***Received November 20, 2015***

[1] Nikolaev Vladimir Gennadyevich is Leading Mathematician, Federal State-Funded Educational Institution of Higher Vocational Education "Yaroslav-the-Wise Novgorod State University", Novgorod, Russia.
E-mail: vg14@inbox.ru