УДК 519.216.73, 517.982.4 DOI: 10.14529/mmph160103

СЛАБОЕ И ОБОБЩЕННОЕ ПО СЛУЧАЙНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ КОШИ С АДДИТИВНЫМ ШУМОМ[1]

О.С. Старкова[2]

Работа посвящена решению абстрактной стохастической задачи Коши для уравнения $X'(t) = AX(t)+B\mathrm{W}(t)$ с оператором A, являющимся генератором полугруппы класса C_0 в гильбертовом пространстве H, с белым шумом W в другом гильбертовом пространстве H и линейным оператором B: $\mathrm{H}\to H$. Рассмотрены два подхода к решению поставленной задачи: подход Ито, когда решается интегральная задача с интегралом Ито по винеровскому процессу, и подход, основанный на анализе белого шума в исходной дифференциальной задаче в пространствах функций, обобщенных по случайной переменной. Изучена связь между полученными решениями.

Ключевые слова: стохастическая задача Коши; белый шум; винеровский процесс; слабое решение; распределение, обобщенное решение.

Введение

При построении различных математических моделей, учитывающих случайные возмущения, возникает задача Коши для дифференциально-операторных уравнений с белым шумом в качестве неоднородности. Среди них базовой является задача Коши для уравнения первого порядка с оператором A, действующим в некотором сепарабельном гильбертовом пространстве H и являющимся генератором полугруппы класса C_0:

$$X'(t) = AX(t) + B\mathrm{W}(t), \quad t\in[0,\tau), \tau\le\infty, \qquad X(0)=\zeta, \tag{1}$$

где $\mathrm{W}(t)$ – белый шум со значениями в другом сепарабельном гильбертовом пространстве H, B – линейный оператор из H в H.

При указанных условиях задача (1) является некорректной из-за нерегулярного поведения белого шума, обусловленного независимостью случайных величин $\mathrm{W}(t_1)$, $\mathrm{W}(t_2)$ при $t_1 \ne t_2$ и бесконечной вариацией. Чтобы преодолеть проблемы, связанные с нерегулярностью процесса белого шума, будем рассматривать два подхода к решению стохастической задачи (1).

Первый состоит в использовании исчисления Ито, главная идея которого в том, чтобы вместо решения уравнения собственно с шумом, работают с его «первообразной» – винеровским процессом $\{W(t), t\ge 0\}$. Этот математический аппарат позволяет изучать задачу Коши для стохастического дифференциального уравнения вида

$$dX(t) = AX(t)dt + BdW(t), \quad X(0)=\zeta, \tag{2}$$

которое является краткой записью интегрального уравнения $X(t)-\zeta = \int_0^t AX(s)ds + \int_0^t BdW(s)$ (см., например, [1–5]).

Второй подход в конечномерных пространствах появился в последних декадах двадцатого столетия и известен как анализ белого шума. В работе [6] Т. Хида определил пространства белого шума таким образом, что стало возможным рассматривать функционалы от броуновского движения как функционалы белого шума. Поскольку белый шум можно считать производной броуновского движения, траектории которого непрерывны, но нигде не дифференцируемы в обычном смысле, естественно считать траектории белого шума элементами пространства Шварца S'. Поэтому при построении вероятностного пространства белого шума берут $\Omega = S'$ и вводят гауссовскую нормализованную меру μ на σ-алгебре $\mathrm{B}(S')$ борелевских подмножеств S'. Анализ белого шума дает математический аппарат, в рамках которого все случайные

---

[1] Работа проводилась при финансовой поддержке РФФИ, проект № 13-01-00090, и поддержке Правительства РФ, акт 211, договор № 02.A03.21.0006.

[2] Старкова Ольга Сергеевна – аспирант, кафедра математического анализа и теории функций, Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург, Российская Федерация.
E-mail: olga-n4@yandex.ru.

переменные рассматриваются как функционалы траекторий белого шума, то есть функции, определенные на S' (в конечномерном случае см., например, [7–10]).

Чрезвычайно важным является тот факт, что в рамках этой теории процесс белого шума определен и оказывается бесконечно дифференцируемой функцией переменной t со значениями в пространстве обобщенных случайных величин. Это дает возможность перейти от рассмотрения проинтегрированных уравнений Ито к изучению собственно дифференциальных уравнений.

Первая попытка расширения анализа белого шума на гильбертово-значный случай была предпринята в работе [11], где были введены пространства основных и обобщенных случайных величин со значениями в гильбертовом пространстве. В работах [12, 14] рассматривается несколько другой подход: используются пространства скалярно-значных основных случайных величин, чтобы определить обобщенные случайные величины со значениями в гильбертовом пространстве как линейные непрерывные операторы на этих пространствах. Полученные таким образом пространства обобщенных H-значных случайных величин имеют ту же структуру, что и пространства, построенные в [11], но новый подход позволяет определить в гильбертово-значном случае S-преобразование, произведение Уика и доказать связь между интегралом Ито и интегралом Хицуды–Скорохода от операторно-значных случайных величин, которую мы и будем использовать при сравнении слабого и обобщенного решения.

В настоящей работе приводится исследование слабого решения задачи (2) и обобщенного по ω решения исходной задачи (1); доказывается совпадение решений на пересечении условий существования каждого из них.

1. Подход Ито. Слабое решение стохастической задачи Коши

Пусть (Ω, F, P) – вероятностное пространство с нормальной фильтрацией $\{F_t, t \geq 0\}$ и H, H – сепарабельные гильбертовы пространства, Q – линейный симметричный, неотрицательный оператор следа с системой собственных векторов $\{e_j\}$, образующих базис в пространстве H, такой что $Qe_j = \sigma_j^2 e_j$, $\sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^2 < \infty$.

Определение 1. H*-значный стохастический процесс* $W_Q = \{W_Q(t), t \geq 0\}$ *называется* Q*-винеровским, если*

$(W1)$ $W_Q(0) = 0$ п.в.;

$(W2)$ W_Q имеет независимые приращения;

$(W3)$ закон распределения приращений $W_Q(t) - W_Q(s)$ является нормальным с матожиданием ноль и ковариационным оператором $(t-s)Q$;

$(W4)$ W_Q имеет непрерывные траектории п.в.

Q-винеровский процесс, определенный таким образом, является обобщением броуновского движения. Как известно, H-значный процесс броуновского движения $\{\beta(t), t \geq 0\}$, где $\beta(t) = \beta(t, \omega), \omega \in \Omega$, (определяемый через выполнение условий (W1) – (W4) в случае $\mathrm{H} = \mathbb{R}$ и $Q = I$) имеет, в отличие от белого шума, непрерывные траектории и конечную вариацию. Конечномерное броуновское движение – это конечная сумма вида $\sum_{j=1}^{n} \beta_j(t) e_j$, где e_j – базис в $\mathbb{R}^n$, β_j – независимые броуновские движения. При переходе к бесконечномерному случаю вместо расходящегося в H ряда приходится рассматривать регуляризованную сумму :

$$W_Q(t) := \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j \beta_j(t) e_j, \, t \geq 0, \qquad W_Q(t) \in L^2(\Omega; \mathrm{H}), \tag{3}$$

которая и является (H-значным) Q-винеровским процессом. Формальный ряд

$$W(t) =: \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j(t) e_j \tag{4}$$

называют *цилиндрическим винеровским процессом*. Этот ряд расходится в $L^2(\Omega, \mathrm{H})$, но для всех $h \in \mathrm{H}$ ряд $\sum_{i=1}^{\infty}(\beta_i(t)e_i, h)$ является сходящимся в $L^2(\Omega, \mathrm{H})$. В [1] показано, что ряд (4) сходится в $L^2(\Omega, \mathrm{H}_1)$ для некоторого пространства $\mathrm{H}_1 \subset \mathrm{H}$, такого, что оператор вложения H в H_1 является оператором Гильберта–Шмидта. В частности, W будет Q_1-винеровским процессом в пространстве $\mathrm{H}_1 = Q_1^{1/2}\mathrm{H}$ с нормой $\|h\|_{\mathrm{H}_1} = \|Q_1^{1/2}h\|_{\mathrm{H}}$, где Q_1 – произвольный оператор следа.

Будем рассматривать слабое решение абстрактной стохастической задачи Коши (2):

$$dX(t) = AX(t)dt + BdW(t), \quad X(0) = \zeta,$$

где ζ – F_0-измеримая H-значная случайная величина, оператор A порождает полугруппу класса C_0 ограниченных операторов решения однородной задачи; $B:\mathrm{H} \to H$ – линейный ограниченный оператор, $\{W(t), t \geq 0\}$ – H-значный Q-винеровский или цилиндрический винеровский процесс.

H-значный случайный предсказуемый процесс $X = \{X(t), t \geq 0\}$ называется *слабым решением* задачи Коши (2), если $\int_0^t \|X(s)\|_H ds < \infty$ п.н. ($\mathrm{P}_{a.s.}$) и

$$\langle X(t), y\rangle = \langle \zeta, y\rangle + \int_0^t \langle X(s), A^* y\rangle ds + \langle BW(t), y\rangle, \mathrm{P}_{a.s.} \quad y \in domA^*. \tag{5}$$

По аналогии с классическим случаем решение задачи (5) ищется в форме

$$X(t) = S(t)\zeta + \int_0^t S(t-s)BdW(s), t \geq 0, \tag{6}$$

где $S = \{S(t), t \geq 0\}$ является полугруппой операторов решения соответствующей однородной задачи.

Имеет место следующая теорема [1, 3–5].

Теорема 1 *Пусть* A *– генератор полугруппы* $S = \{S(t), t \geq 0\}$ *класса* C_0, $B:\mathrm{H} \to H$, $\{W(t), t \geq 0\}$ *–* H*-значный* Q*-винеровский или цилиндрический винеровский процесс и* $\Psi(s) = S(t-s)B, t \geq s \geq 0$, *удовлетворяет условию существования интеграла Ито:* $\int_0^t \|\Psi(s)\|_{HS}^2 ds < \infty$, $\|\Psi(s)\|_{HS}^2 := \sum_{j=1}^{\infty} \left\|\Psi(s)Q^{\frac{1}{2}}e_j\right\|^2 = Tr\Psi(s)Q\Psi^*(s)$, *где* $Q = I$ *в случае цилиндрического винеровского процесса. Тогда для любой* F_0*-измеримой* H*-значной случайной величины* ζ *случайный процесс (6) является единственным слабым решением задачи (2).*

2. Обобщенные по ω решения стохастической задачи Коши

Обобщенные по ω решения строятся в пространствах обобщенных случайных величин $(S)_{-\rho}(H)$, $0 \leq \rho \leq 1$, являющихся расширением пространства $(L^2)(H) := L^2(S', \mu; H)$.

В первую очередь, для определения $(S)_{-\rho}(H)$, введем *пространство белого шума* – вероятностное пространство $(S', \mathrm{B}(S'), \mu)$, где $\mathrm{B}(S')$ – борелевская σ-алгебра подмножеств пространства Шварца распределений медленного роста и μ – нормализованная гауссовская вероятностная мера на $\mathrm{B}(S')$ (мера Минлоса–Сазонова), определенная таким образом (см. [5, 14]), что элементы S' можно рассматривать как траектории белого шума.

Далее, обозначим через (L^2) пространство $L^2(S', \mu; \mathbb{R})$ всех $\mathbb{R}$-значных интегрируемых с квадратом по мере μ функций (случайных величин), определенных на S'. Обозначим через $\|\cdot\|_0$ норму этого пространства. Для любых $\theta, \eta \in S$ выполняются следующие равенства

$$(\langle\cdot,\theta\rangle, \langle\cdot,\eta\rangle)_{(L^2)} = E(\langle\cdot,\theta\rangle\langle\cdot,\eta\rangle) = (\theta,\eta)_0, \quad \|\langle\cdot,\theta\rangle\|_0^2 = E\langle\cdot,\theta\rangle^2 = |\theta|_0^2.$$

Отсюда следует, что отображение $\theta \mapsto \langle\cdot,\theta\rangle$ можно по непрерывности продолжить с S на $L^2(\mathbb{R})$, и, значит, $\mathbb{R}$-значная случайная величина $\beta(t) := \langle\cdot, 1_{[0;t]}\rangle$ определена как элемент пространства (L^2). Это случайная величина имеет непрерывную версию, которая обладает всеми свойствами броуновского движения [12].

По аналогии с тройкой Гельфанда $S \subset L^2(\mathbb{R}) \subset S^*$ для пространства (L^2) строится цепочка пространств $(S) \subset \ldots \subset (S_p) \subset \ldots \subset (L_2) \subset \ldots \subset (S_{-p}) \subset \ldots \subset (S)^*$, где элементы пространств (S_p) и (S_{-p}) определяются в соответствии с поведением (убыванием или возрастанием, соответственно) коэффициентов Фурье в разложении по стохастическим полиномам Эрмита

$$h_\alpha(\omega) := \prod_{i=1}^{\infty} h_{\alpha_i}(\langle \xi_i, \omega \rangle), \omega \in S', \alpha \in \mathrm{T},$$

где $\mathrm{T} \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^{\mathbb{N}}$ – множество всех возможных конечных мультииндексов, $h_i(x) = (-1)^i e^{\frac{x^2}{2}} \dfrac{d^i}{dx^i} e^{-\frac{x^2}{2}}$ – полиномы Эрмита, $\xi_i(x) = \pi^{-\frac{1}{4}}((i-1)!)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} h_{i-1}(\sqrt{2}x)$ – функции Эрмита. Функции Эрмита являются собственными функциями дифференциального оператора $\hat{D} = -\dfrac{d^2}{dx^2} + x^2 + 1 : \hat{D}\xi_i = (2i)\xi_i, i \in \mathbb{N}$ и образуют ортонормированный базис пространства $L^2(\mathbb{R})$.

В работе [10] Кондратьев и Стрейт расширили пространство Хиды обобщенных случайных величин $(S)^*$, столкнувшись с необходимостью охватить некоторые функционалы белого шума, необходимые в приложениях. Они ввели в рассмотрение пространство $(S)_{-\rho}$ как правый элемент тройки Гельфанда с тем же пространством (L^2) в центре и более узким пространством основных функций $(S)_\rho$, где $0 \le \rho \le 1$ – некоторый фиксированный параметр. Таким образом, пространства основных и обобщенных случайных величин Хиды стали частным случаем пространств Кондратьева и Стрейта, соответствующими случаю параметра $\rho = 0$:

$$(S)_\rho \subset (S)_0 = (S) \subset (L^2) \subset (S)^* = (S)_{-0} \subset (S)_{-\rho}.$$

Пространство $(S)_\rho$ основных функций определяется равенством $(S)_\rho = \cap_{p \in \mathbb{N}} (S_p)_\rho$, где

$$(S_p)_\rho = \left\{ \phi = \sum_{\alpha \in \mathrm{T}} \phi_\alpha \mathrm{h}_\alpha \in (L^2);\ \sum_{\alpha \in \mathrm{T}} (\alpha!)^{1+\rho} |\phi_\alpha|^2 (2\mathbb{N})^{2p\alpha} < \infty \right\}$$

с нормой $|\cdot|_{p,\rho}$, порожденной скалярным произведением

$$(\phi, \psi)_{p,\rho} = \sum_{\alpha \in \mathrm{T}} (\alpha!)^{1+\rho} \phi_\alpha \overline{\psi}_\alpha (2\mathbb{N})^{2p\alpha}, \quad (2\mathbb{N})^{p\alpha} := \prod_{i \in \mathbb{N}} (2i)^{p\alpha_i}$$

и оснащается топологией проективного предела. Пространство $(S_{-p})_{-\rho}$ – пространство, сопряженное к $(S_p)_\rho$.

И, наконец, введем пространство H-значных обобщенных функций $(S)_{-\rho}(\mathrm{H})$ над $(S)_\rho$. Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$, $(L^2)(\mathrm{H})$ – пространство H-значных, определенных на S' функций, интегрируемых с квадратом по Бохнеру по мере μ. Пусть $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ – ортонормированный базис в H, тогда семейство $\{\mathrm{h}_\alpha e_j\}_{\alpha \in \mathrm{T}, j \in N}$ образует ортогональный базис в $(L^2)(\mathrm{H})$.

Пространство $(S)_{-\rho}(\mathrm{H})$ определяется как пространство линейных непрерывных операторов $\Phi : (S)_\rho \to \mathrm{H}$ с топологией равномерной сходимости на ограниченных подмножествах пространства $(S)_\rho$. Действие $\Phi \in (S)_{-\rho}(\mathrm{H})$ на $\phi \in (S)_\rho$ будем обозначать $\Phi[\phi]$.

Теперь в пространствах $(S)_{-\rho}(\mathrm{H})$ представим Q-винеровский (3) и цилиндрический винеровский (4) процессы через разложение по стохастическим полиномам Эрмита. Для этого покажем конструкцию независимых броуновских движений $\beta_j(t)$ в формулах (3) и (4).

Из разложения единичной функции по функциям Эрмита

$$1_{[0,t]} = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i(\tau) d\tau \xi_i \tag{7}$$

следует, что для любого $t \in \mathbb{R}$ случайная величина $\beta(t) = \langle 1_{(s;t]}, \cdot \rangle$ может быть разложена в пространстве $(L^2(\mathbb{R}))$ в ряд по стохастическим полиномам:

$$\langle 1_{(s;t]}, \cdot \rangle = \langle \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \xi_n(\tau) d\tau \xi_n, \cdot \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \xi_n(\tau) d\tau \langle \xi_n, \cdot \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \xi_n(\tau) d\tau \mathrm{h}_{\varepsilon_n}; \tag{8}$$

где $\varepsilon_n = (0, 0, ..., 1_n, 0, ...)$. Используя форму коэффициентов этого разложения, можно построить счетное семейство одинаково и независимо распределенных броуновских движений в (L^2): $\beta_j(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t \xi_i(s) ds \mathrm{h}_{\varepsilon_{n(i,j)}}$, где $n(\cdot,\cdot) : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — биекция такая, что $n(i, j) \geq ij$ при $i, j \in \mathbb{N}$ [5].

В пространствах $(S)_{-\rho}(\mathrm{H})$ цилиндрический винеровский процесс имеет следующее разложение:

$$W(t) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \beta_j(t) e_j = \sum_{n \in \mathbb{N}} W_{\varepsilon_n}(t) \mathrm{h}_{\varepsilon_n}, \quad W_{\varepsilon_n}(t) := \int_0^t \xi_{i(n)}(s) ds e_{j(n)} \in \mathrm{H}, \tag{9}$$

где $i(n), j(n) \in \mathbb{N}$ таковы, что $n(i(n), j(n)) = n$ и $t \in \mathbb{R}$.

Q-винеровский процесс представим следующим равенством

$$W_Q(t) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sigma_j \beta_j(t) e_j = \sum_{n \in \mathbb{N}} W^Q_{\varepsilon_n}(t) \mathrm{h}_{\varepsilon_n}, \quad W^Q_{\varepsilon_n}(t) := \sigma_j \int_0^t \xi_{i(n)}(s) ds e_{j(n)} \in \mathrm{H}, t \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

В [14] доказано, что $W_Q(t) \in (L^2)(\mathrm{H})$, $W(t) \in (S_{-1})_{-\rho}(\mathrm{H}) \subset (S)_{-\rho}(\mathrm{H})$ для любого $0 \leq \rho \leq 1$.

Определим H-значный Q-белый шум равенством

$$\mathrm{W}_Q(t) := \sum_{i,j \in \mathbb{N}} \sigma_j \xi_i(t) \mathrm{h}_{\varepsilon_{n(i,j)}} e_j = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{W}^Q_{\varepsilon_n}(t) \mathrm{h}_{\varepsilon_n}, \quad \mathrm{W}^Q_{\varepsilon_n}(t) = \sigma_j \xi_{i(n)}(t) e_{j(n)} \in \mathrm{H},$$

полученным формальным дифференцированием равенства (10), и сингулярный белый шум — равенством

$$\mathrm{W}(t) := \sum_{i,j \in \mathbb{N}} \xi_i(t) \mathrm{h}_{\varepsilon_{n(i,j)}} e_j = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{W}_{\varepsilon_n}(t) \mathrm{h}_{\varepsilon_n}, \quad \mathrm{W}_{\varepsilon_n}(t) = \xi_{i(n)}(t) e_{j(n)} \in \mathrm{H},$$

полученным формальным дифференцированием равенства (9). Q-белый шум и цилиндрический белый шум принадлежат $(S_{-1})_{-\rho}(\mathrm{H}) \subset (S)_{-\rho}(\mathrm{H}), \rho \in [0;1]$ (см. [14]).

2.1. *S*-преобразование. Произведение Уика. Интеграл Хицуды–Скорохода

Прежде чем перейти к обобщенному по ω решению и сравнению его со слабым решением, введем необходимые определения S-преобразования, произведения Уика и интеграла Хицуды–Скорохода.

Пусть $\varepsilon_\theta(\cdot) := e^{\langle \cdot, \theta \rangle - \frac{1}{2}|\theta|_0^2}$. При $\theta \in S$ эта случайная величина определена на всем пространстве S' и принадлежит $(S)_\rho$, для $0 \leq \rho < 1$. При этом справедлива оценка

$$|\varepsilon_\theta|_{p,\rho} \leq 2^{\rho/2} \exp[(1-\rho)^{\frac{2\rho-1}{1-\rho}} |\theta|_p^{\frac{2}{1-\rho}}].$$

Определение 2. *Пусть* $\Phi \in (S)_{-\rho}(\mathrm{H})$, $0 \leq \rho < 1$. S*-преобразованием* Φ *называется* H*-значная функция, определяемая равенством*

$$(S\Phi)(\theta) := \Phi[\varepsilon_\theta], \quad \theta \in S.$$

Заметим, что если $\Phi \in (L^2)(\mathrm{H})$, то

$$(S\Phi)(\theta) = \int_{S'} \Phi(\omega)\varepsilon_\theta(\omega)d\mu(\omega) = E(\Phi\varepsilon_\theta), \tag{11}$$

при этом равенство (11) верно и при $\theta \in L^2(\mathbb{R})$.

Пусть H – еще одно сепарабельное гильбертово пространство. Поскольку $L_{HS}(\mathrm{H};H)$ – пространство операторов Гильберта–Шмидта, действующих из H в H – является сепарабельным гильбертовым пространством, можно ввести в рассмотрение пространство $(S)_{-\rho}\left(L_{HS}(\mathrm{H};H)\right)$ обобщенных случайных величин со значениями в $L_{HS}(\mathrm{H};H)$ над $(S)_\rho$. Пусть $\Psi \in (S)_{-\rho}\left(L_{HS}(\mathrm{H};H)\right)$, $\Phi \in (S)_{-\rho}(\mathrm{H})$. Рассмотрим их S-преобразования. Для любого $\theta \in S$ имеем $S\Psi(\theta) \in L_{HS}(\mathrm{H};H)$, $S\Phi(\theta) \in \mathrm{H}$, поэтому $F(\theta) := S\Psi(\theta)S\Phi(\theta) \in H$.

Определение 3. *Пусть* $\Psi \in (S)_{-\rho}\left(L_{HS}(\mathrm{H};H)\right)$, $\Phi \in (S)_{-\rho}(\mathrm{H})$ $(0 \le \rho < 1)$. *Обобщенная случайная величина* $\Theta \in (S)_{-\rho}(H)$ *называется произведением Уика функций* Ψ *и* Φ *и обозначается* $\Psi\lozenge\Phi$, *если* $S\Theta = S\Psi S\Phi$.

Функция $\Phi(\cdot) : \mathbb{R} \to (S)_{-\rho}(\mathrm{H})$ называется интегрируемой на $[0;T]$, если существует такое $p \in \mathbb{N}$, что $\Phi(t) \in (S_{-p})_{-\rho}(\mathrm{H})$ для всех $t \in [0;T]$ и Φ интегрируема по Бохнеру на $[0;T]$ как функция со значениями в гильбертовом пространстве $(S_{-p})_{-\rho}(\mathrm{H})$.

Определение 4. *Будем называть* $(S)_{-\rho}\left(L_{HS}(\mathrm{H};H)\right)$*-значный случайный процесс* $\Psi(t)$ *интегрируемым по Хицуде–Скороходу на промежутке* $[0;T]$, *если процесс* $\Psi(t)\lozenge\mathrm{W}(t)$ *интегрируем на* $[0;T]$ *как* $(S)_{-\rho}(H)$*-значная функция. В таком случае будем называть интеграл*

$$\int_0^T \Psi(t)\lozenge\mathrm{W}(t)dt$$

интегралом Хицуды–Скорохода от $\Psi(t)$.

2.2. Стохастическая задача Коши в пространствах обобщенных случайных величин и сравнение решений

Для того, чтобы рассмотреть стохастические дифференциальные уравнения в гильбертовых пространствах как уравнения в пространствах обобщенных случайных величин, сначала для пары произвольных сепарабельных гильбертовых пространств H_1 и H_2 распространим действие линейных операторов из H_1 в H_2 на действие в соответствующих пространствах обобщенных случайных величин $(S)_{-\rho}(\mathrm{H}_1)$ в $(S)_{-\rho}(\mathrm{H}_2)$.

Пусть сначала $A \in L(\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2)$. Определим его действие как оператора из $(S)_{-\rho}(\mathrm{H}_1)$ в $(S)_{-\rho}(\mathrm{H}_2)$ равенством

$$A\Phi := \sum_{\alpha \in \mathrm{T}} A\Phi_\alpha \mathrm{h}_\alpha, \text{ для } \Phi = \sum_{\alpha \in \mathrm{T}} \Phi_\alpha \mathrm{h}_\alpha \in (S)_{-\rho}(\mathrm{H}_1). \tag{12}$$

Если A неограничен, определим $(domA)$ как множество всех $\sum_{\alpha \in \mathrm{T}} \Phi_\alpha \mathrm{h}_\alpha \in (S)_{-\rho}(\mathrm{H}_1)$, таких, что $\Phi_\alpha \in domA$ для всех $\alpha \in \mathrm{T}$ и условие $\sum_{\alpha \in \mathrm{T}} (\alpha!)^{1-\rho} \left\| A\Phi_\alpha \right\|_{H_2}^2 (2\mathbb{N})^{-2p\alpha} < \infty$ выполнено для некоторого $p \in \mathbb{N}$. Тогда равенство (12) определяет на $(domA)$ линейный оператор, действующий из $(S)_{-\rho}(\mathrm{H}_1)$ в $(S)_{-\rho}(\mathrm{H}_2)$. Нетрудно проверить замкнутость этого оператора для A, замкнутого оператора из H_1 в H_2.

Пусть H и H – сепарабельные гильбертовы пространства, A – замкнутый линейный оператор, действующий в H, $B \in L(\mathrm{H}, H)$. Задача Коши для уравнения первого порядка в пространствах обобщенных случайных величин в общем случае имеет следующий вид:

$$X'(t) = AX(t) + B\lozenge\mathrm{W}(t), \quad t \ge 0, \qquad X(0) = \zeta. \tag{13}$$

В силу того, что B – детерминированный оператор, получим $B\lozenge \mathrm{W}(t)=B\mathrm{W}(t)$, отсюда следует, что задача Коши (13) во введенных пространствах обобщенных случайных величин принимает вид:

$$X'(t)=AX(t)+B\mathrm{W}(t),\quad t\ge 0,\qquad X(0)=\zeta, \tag{14}$$

где $\mathrm{W}(t)$ – H-значный Q белый или сингулярный белый шум. Далее приведен результат [14] о существовании и единственности решения этой задачи в пространстве $(S)_{-\rho}(H)$, то есть о существовании и единственности $(S)_{-\rho}(H)$-значной дифференцируемой функции $X(t)$, удовлетворяющей (14).

Теорема 2 *Пусть A является генератором полугруппы $\{S(t),t\ge 0\}$ класса C_0 в гильбертовом пространстве H, $B\in L(\mathrm{H},H)$, W — определенный выше Q-белый или цилиндрический белый шум. Тогда*

$$X(t)=S(t)\zeta+\int_0^t S(t-s)B\lozenge \mathrm{W}(s)ds \tag{15}$$

– единственное решение задачи Коши (14) в пространстве $(S)_{-\rho}(H)$ для любого $\zeta\in(domA)$.

Из вида слабого и обобщенного по ω решений следует предположение об их совпадении на пересечении условий существования. Пусть оператор A порождает полугруппу $\{S(t),t\ge 0\}$ класса C_0, начальное условие ζ лежит в области определения оператора A, оператор B удовлетворяет условию существования интеграла Ито

$$E\left[\int_0^T \|\Phi(t)\|^2_{L_{HS}(\mathrm{H}_Q;H)}\,dt\right]<\infty \tag{16}$$

и произвольное вероятностное пространство $(\Omega,F,P)=(S',B(S)',\mu)$.

Теорема 3. *Пусть A – генератор полугруппы класса C_0, $\zeta\in(domA)$ и W – Q-винеровский процесс. Тогда обобщенное по ω решение (15) и слабое решение (6) совпадают.*

Доказательство. В силу детерминированности оператора $S(t-s)B$ и из разложения Q-белого шума по стохастическим полиномам Эрмита интеграл в решении (15) определяется следующим образом:

$$\int_0^t S(t-s)B\lozenge \mathrm{W}(s)ds=\int_0^t S(t-s)B\mathrm{W}(s)ds=\sum_{i,j\in\mathbb{N}}\sigma_j\int_0^t S(t-s)B(s)e_j\xi_i(s)ds\,\mathrm{h}_{\varepsilon_{n(i,j)}}. \tag{17}$$

В рассматриваемом нами случае для доказательства теоремы достаточно показать, что интеграл в равенстве (17) совпадает с интегралом Ито:

$$\int_0^t S(t-s)BdW(s)=\int_0^t S(t-s)B\mathrm{W}(s)ds. \tag{18}$$

В первую очередь покажем, что сумма (17) принадлежит пространству $(L^2)(H)=L^2(S',\mu;H)$. Этот результат следует из равенств:

$$\sum_{i,j\in\mathbb{N}}\sigma_j^2\left\|\int_0^t S(t-s)Be_j\xi_i(s)ds\right\|_H^2=\sum_{j,k\in\mathbb{N}}\sum_{i\in\mathbb{N}}\left(\int_0^t\xi_i(s)\left(\sigma_jS(t-s)Be_j,g_k\right)_H ds\right)^2=$$

[из разложения единичной функции $1_{[0;t]}$ по функциям Эрмита (7) следует]

$$=\sum_{j,k\in\mathbb{N}}\left\|1_{[0,t]}(\sigma_jS(t-\cdot)Be_j,g_k)^2_{L_2(\mathbb{R})}\right\|=\sum_{j,k\in\mathbb{N}}\int_0^t|(S(t-\cdot)BQ^{\frac{1}{2}},g_k)_H|^2ds=$$

$$=\sum_{j\in\mathbb{N}}\int_0^t\sum_{k\in\mathbb{N}}(S(t-\cdot)BQ^{\frac{1}{2}}e_j,g_k)_H^2ds=\int_0^t\sum_{j\in\mathbb{N}}\left\|S(t-s)BQ^{\frac{1}{2}}e_j\right\|_H^2ds=\int_0^t\|S(t-s)B\|^2_{HS}ds.$$

Здесь $\{g_k\}$ – ортонормированный базис в H. Доказательство равенства интегралов (18) в пространстве $(L_2)(H)$ проведем для элементарных функций с последующим переходом к пределу. Покажем (18) на элементарных функциях $\Psi_n(s)=\sum_{k=0}^{N-1}\Psi_{n_k}$, приближающих $S(t-s)B$:

$$\int_0^t \Psi_n(s)\mathrm{W}(s)ds = \sum_{i,j\in\mathbb{N}} \sigma_j \int_0^t \Psi_n(s)e_j\xi_i(s)ds\mathrm{h}_{\varepsilon_{n(i,j)}} = \sum_{i,j\in\mathbb{N}} \sigma_j \sum_{k=0}^{N-1}\int_{t_{k-1}}^{t_k} \Psi_{n_k}\xi_i(s)dse_j\mathrm{h}_{\varepsilon_{n(i,j)}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1}\Psi_{n_k}\sum_{i,j\in\mathbb{N}}\sigma_j\int_{t_{k-1}}^{t_k}\xi_i(s)dse_j\mathrm{h}_{\varepsilon_{n(i,j)}} = \sum_{k=0}^{N-1}\Psi_{n_k}\left[W(t_k)-W(t_{k-1})\right] = \int_0^t \Psi_n(t)dW(t).$$

Переходя к пределу при $n\to\infty$, получим (18). Отсюда следует, что обобщенное по ω и слабое решения совпадают при условии их существования.

Аналогично в случае, когда $W(t)$ – цилиндрический винеровский процесс, доказывается, что интеграл $\int_0^t S(t-s)B\mathrm{W}(s)ds := \sum_{i,j\in\mathbb{N}}\int_0^t S(t-s)Be_j\xi_i(s)ds\mathrm{h}_{\varepsilon_{n(i,j)}}$ определяет элемент пространства $(L^2)(H)$, который совпадает с интегралом Ито $\int_0^t S(t-s)BdW(s)$. Отсюда следует:

Теорема 4. *Пусть* A *– генератор полугруппы класса* C_0, $\zeta\in(domA)$, *и* W *– цилиндрический винеровский процесс. Тогда обобщенное по* ω *решение и слабое решение совпадают.*

Литература

1. Da Prato, G. Stochastic equations in infinite dimensions / G.Da. Prato, J. Zabczyk. – Cambridge Univ. Press, 1992 – 454 p.

2. Gawarecki, L. Stochastic differential equations in infinite dimensions / L. Gawarecki, V. Mandrekar. – Springer-Verlag Berlin Heidellberg, 2011. DOI:10.1007/978-3-642-16194-0

3. Melnikova, I.V. Abstract Stochastic Equations I. Classical and Distributional Solutions / I.V. Melnikova, A.I. Filinkov, U.A. Anufrieva // J. of Math. Sciences. – 2002. – Vol. 111. – Issue 2. – C. 3430–3465.

4. Melnikova, I.V. Abstract Stochastic Problems with Generators of Regularized Semigroups / I.V. Melnikova, A.I. Filinkov // Commun. Appl. Anal. – 2009. – Vol. 13, № 2. – C. 195–212.

5. Альшанский, М.А. Регуляризованные и обобщенные решения бесконечномерных стохастических задач / М.А. Альшанский, И.В. Мельникова // Матем. сб. – 2011. – Vol. 202, № 11. – С. 3–30. DOI: 10.4213/sm7686

6. Hida, T. Analysis of Brownian functionals / T. Hida. – Ottawa: Carleton Univ., 1975. – 61 c.

7. Stochastic partial differential equations. A modeling, white noise functional approach. 2nd ed. / H. Holden, B. Oksendal, J. Uboe, T. Zhang. – New York, NY: Springer, 2010. – 305 p. DOI: 10.1007/978-0-387-89488-1

8. Kuo, H.-H. White Noise Distribution Theory / H.H. Kuo. – Boca Raton, FL: CRC Press, 1996, – 378 p.

9. Huang, Z. Introduction to Infinite Dimensional Stochastic Analysis / Z. Huang, J. Yan. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers; Beijing: Science Press, 2000. – 296 p.

10. Kondratiev, Yu.G. Spaces of white noise distribution: Constructions, Descriptions, Applications. I / Yu.G. Kondratiev, L. Streit // Reports on Math. Phys. – 1993. – Vol. 33. – Issue 3. – C. 341–366.

11. Filinkov, A. Differential equations in spaces of abstract stochastic distributions / A. Filinkov, J. Sorensen // Stochastics and Stochastics Reports. – 2002 – Vol. 72, № 3–4. – C. 129–173.

12. Альшанский, М.А. Интегралы Ито и Хицуды–Скорохода в бесконечномерном случае / М.А. Альшанский // Сибирские электронные математические известия. – 2014. – Т. 11. – С. 185–199.

13. Melnikova, I.V. Generalized solutions of differential-operator equations with singular white noise / I.V. Melnikova // Differential Equations. – 2013. – Vol. 49, № 4. – C. 475–486.

14. Мельникова, И.В. Анализ белого шума в приложениях к стохастическим уравнениям в гильбертовых пространствах / И.В. Мельникова, М.А. Альшанский // Современная математика. Фундаментальные направления. Труды Крымской осенней математической школы-симпозиума. – РУДН, М., 2014. – Т. 53. – С. 30–63.

15. Stroock, D.W. Multidimensional diffusion processes. Reprint of the 2nd corrected printing (1997) / D.W. Stroock, S.R.S. Varadhan. – Berlin: Springer, 2006. – 338 c.

Поступила в редакцию 13 декабря 2014 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series “Mathematics. Mechanics. Physics”
2016, vol. 8, no. 1, pp. 19–27

DOI: 10.14529/mmph160103

WEAK AND GENERALIZED WITH RANDOM VARIABLE SOLUTIONS OF STOCHASTIC CAUCHY PROBLEM WITH ADDITIVE WHITE NOISE

***O.S. Starkova*[1]**

The article describes the solutions of an abstract stochastic Cauchy problem for the $X'(t) = AX(t)+B\mathrm{W}(t)$ equation with the A operator, which is the generator of a semigroup of C_0 class in a Hilbert space H with the white noise W in a different Hilbert space H and a linear operator B: H→H. Two approaches to solve the problem are considered: the Ito integral approach, when the integral problem is solved with ito integral following Wiener process; the approach based on the analysis of the white noise in the original differential problem in the function spaces generalized with random variable. The relation between the solutions is defined.

Keywords: stochastic Cauchy problem; white noise; Wiener process; weak solution; distribution; generalized solution.

References

1. Prato G.Da., Zabczyk J. *Stochastic equations in infinite dimensions*. Cambridge Univ. Press, 1992, 454 p. DOI: 10.1017/CBO9780511666223

2. Gawarecki L., Mandrekar V. *Stochastic differential equations in infinite dimensions*. Springer-Verlag Berlin Heidellberg, 2011. DOI:10.1007/978-3-642-16194-0

3. Melnikova I.V., Filinkov A.I., Anufrieva U.A. Abstract Stochastic Equations I. Classical and Distributional Solutions. *Journal of Mathematical Sciences*, 2002, Vol. 111, Issue 2, pp. 3430–3465. DOI: 10.1023/A:1016006127598

4. Melnikova I.V., Filinkov A.I. Abstract stochastic problems with generators of regularized semigroups. *Commun. Appl. Anal.*, 2009, Vol. 13, no. 2, pp. 195–212.

5. Alshanskiy M.A., Mel'nikova I.V. Regularized and generalized solutions of infinite-dimensional stochastic problems. *Sbornik: Mathematics*, 2011, Vol. 202, no. 11, pp.1565–1592. DOI: 10.1070/SM2011v202n11ABEH004199

6. Hida T. *Analysis of Brownian functionals*. Carleton Mathematical Lectures 13. Ottawa, Carleton Univ., 1975, 61 p.

7. Holden H., Oksendal B., Uboe J., Zhang T. *Stochastic partial differential equations. A modeling, white noise functional approach. 2nd ed*. New York, NY: Springer, 2010, 305 p. DOI: 10.1007/978-0-387-89488-1

8. Kuo H.-H. *White Noise Distribution Theory*. Probability and Stochastics Series. Boca Raton, FL: CRC Press, 1996, 378 p.

9. Huang Z., Yan J. *Introduction to Infinite Dimensional Stochastic Analysis*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers; Beijing: Science Press, 2000, 296 p.

10. Kondratiev Yu.G., Streit L. Spaces of white noise distribution: Constructions, Descriptions, Applications. I. *Reports on Math. Phys.* 1993, Vol. 33, Issue 3, pp. 341–366. DOI:10.1016/0034-4877(93)90003-W

11. Filinkov A., Sorensen J. Differential equations in spaces of abstract stochastic distributions. *Stochastics and Stochastics Reports*, 2002, Vol. 72, no. 3–4, pp. 129–173. DOI: 10.1080/10451120290019177

12. Alshanskiy M.A. The Ito integral and the Hitsuda–Skorohod integral in the infinite dimensional case. *Sib. Èlektron. Mat. Izv.*, 2014, Vol. 11, pp. 185–199. (in Russ.).

13. Melnikova I.V. Generalized solutions of differential-operator equations with singular white noise. *Differential Equations*, 2013, Vol. 49, Issue 4, pp. 475–486. DOI: 10.1134/S0012266113040083

14. Mel'nikova I.V., Alshanskiy M.A. *Proceedings of the Crimean autumn mathematical school-symposium, CMFD*, PFUR, Moscow, 2014, Vol. 53, pp. 30–63. (in Russ.).

15. Stroock D.W., Varadhan S.R.S. Multidimensional diffusion processes. Reprint of the 2nd corrected printing (1997). Berlin, Springer, 2006, 338 p.

Received December 13, 2014

[1] Starkova Olga Sergeevna is Post-Graduate Student, Department of Mathematical Analysis and the Theory of Functions, Ural Federal University, Ekaterinburg, Russian Federation. E-mail: olga-n4@yandex.ru