УДК 517.962 DOI: 10.14529/mmph160104

НОРМИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К ПОСТРОЕНИЮ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Б.Х. Турметов[1]

Приводится методика построения нормированных систем, связанных с операторами дифференцирования дробного порядка. Используя свойства нормированных систем, строятся точные решения обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка.

Ключевые слова: нормированные системы; дробная производная; обобщенно-однородный оператор; фундаментальное решение; неоднородное уравнение.

Введение. В настоящей работе мы рассмотрим операторный метод построения решений дифференциальных уравнений дробного порядка. Данный метод основан на построении нормированных систем относительно операторов дробного дифференцирования. Метод нормированных систем был введен в работе [1] для построения точных решений уравнения Гельмгольца и полигармонического уравнения. В дальнейшем метод нормированных систем использовался для решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами [2], для построения полиномиальных решений задачи Дирихле для бигармонического и полигармонического уравнения [3–5], а также при построении решений дифференциальных уравнений, связанных с операторами Данкла [6, 7].

Пусть L_1 и L_2 – линейные операторы, действующие из функционального пространства X в $X: L_k X \subset X, k=1,2$, и пусть функции из X определены в области $\Omega \subset R^n$. Обозначим $N_0 = N \cup \{0\}$. Приведем определение нормированных систем [1].

Определение 1. Последовательность функций $\{ f_k(x): k \in N_0, f_k(x) \in X \}$ называется f-нормированной относительно (L_1, L_2) в области Ω, имеющей основание $f_0(x)$, если везде в этой области

$$L_1 f_0(x) = f(x), L_1 f_k(x) = L_2 f_{k-1}(x), k \in N .$$

Систему функций f-нормированную относительно (L_1, I), I-единичный оператор будем называть f-нормированной относительно оператора L_1, т.е.

$$L_1 f_0(x) = f(x), L_1 f_k(x) = f_{k-1}(x), k \in N .$$

Если $f(x)=0$, то систему функций $\{ f_k(x): k \in N_0, f_k(x) \in X \}$ назовем просто нормированной.

Основные свойства системы функций f-нормированной относительно (L_1, L_2) в области Ω изложены в работе [8]. Приведем некоторые из них

Свойство 1. Пусть система функций $\{ f_k(x): k \in N_0 \}$ является f-нормированной относительно (L_1, L_2) в Ω с основанием $f_0(x)$. Тогда функциональный ряд

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x), x \in \Omega \tag{1}$$

является формальным решением уравнения

$$(L_1 - L_2) u(x) = f(x), x \in \Omega . \tag{2}$$

Свойство 2. Если операторы L_1 и L_2 коммутируют, а система функций $\{ f_k(x): k \in N_0 \}$ является f-нормированной относительно оператора L_1 в Ω, то формальное решение уравнения (2) можно записать в виде

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} L_2^k f_k(x), x \in \Omega . \tag{3}$$

[1] Турметов Батирхан Худайбергенович – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра математики, Международный Казахско-Турецкий Университет имени Х.А. Ясави, г. Туркестан, Казахстан. E-mail: batirkhan.turmetov@iktu.kz

Свойство 3. Пусть операторы L_1 и L_2 коммутируют, а система функций $\{f_k(x): k\in N_0\}$ является f -нормированной относительно оператора L_1 в Ω. Тогда система функций

$$\varphi_k(x)=\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}L_2^{n-k}f_n(x), x\in\Omega, \binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{4}$$

является f -нормированной относительно оператора L_1-L_2 в Ω.

Построение нормированных систем для некоторых классов операторов

В этом пункте мы приведем методику построения нормированных систем для некоторых классов операторов.

Определение 2. Оператор D_β называется обобщенно-однородным порядка β относительно переменной t, если

$$D_\beta t^\mu = C_{\beta,\mu}t^{\mu-\beta}, t>0 \tag{5}$$

где $\beta,\mu\in R, 0<\beta\le\mu,$ $C_{\beta,\mu}$ – постоянные.

Умножим равенство (5) с двух сторон на одночлен $t^{-\mu+\beta}$. Тогда $C_{\beta,\mu}=t^{-\mu+\beta}D_\beta t^\mu$. Пусть $s\in R$ и к одночлену $t^{\beta k+s}$ можно применить оператор D_β. Рассмотрим коэффициенты

$$C(\beta,s,i)=\prod_{k=1}^{i}\left(t^{-\beta k-s+\beta}D_\beta t^{\beta k+s}\right), i\ge 1, C(\beta,s,0)=1.$$

Для коэффициентов $C(\beta,s,i)$ имеет место равенство

$$\frac{1}{C(\beta,s,i)}=\frac{\left(t^{-\beta k-s}D_\beta t^{\beta k+\beta+s}\right)}{C(\beta,s,i+1)}. \tag{6}$$

Замечание 1. При определении коэффициентов $C(\beta,s,i)$ для удобства мы приняли $C(\beta,s,0)=1$. В конкретных случаях операторов $C(\beta,s,0)$ можно выбрать произвольным образом.

Рассмотрим систему функций

$$f_i(t)=\frac{t^{\beta i+s}}{C(\beta,s,i)}. \tag{7}$$

Лемма 1. Пусть D_β является обобщенно-однородным оператором порядка β относительно переменной t и для некоторых $s\in\{s_1,s_2,...,s_m\}, s_j\in R, j=1,2,...,m$ выполняется равенство $D_\beta t^s=0$. Тогда система функций (7) является 0 - нормированной относительно оператора D_β.

Доказательство. По определению оператора D_β имеем $D_\beta t^\mu=\left(t^{-\mu+\beta}D_\beta t^\mu\right)t^{\mu-\beta}$. Тогда $D_\beta f_0(t)=0$ и для всех $s\in\{s_1,s_2,...,s_m\}, s_j\in R$ и $i\ge 1$ выполняется равенство

$$D_\beta f_i(t)=\frac{D_\beta t^{\beta i+s}}{C(\beta,s,i)}=\frac{\left(t^{-\beta i+\beta-s}D_\beta t^{\beta i+s}\right)}{C(\beta,s,i)}t^{\beta i+s-\beta}.$$

Далее в силу равенства (6) имеем $\dfrac{\left(t^{-\beta i+\beta-s}D_\beta t^{\beta i+s}\right)}{C(\beta,s,i)}=\dfrac{1}{C(\beta,s,i-1)}, i\ge 1$. Следовательно,

$D_\beta f_i(t)=\dfrac{t^{\beta(i-1)+s}}{C(\beta,s,i-1)}=f_{i-1}(t)$. Лемма доказана.

Рассмотрим функцию

$$y_{s,p}(t)=\sum_{i=p}^{\infty}\lambda^{i-p}\binom{i}{p}\frac{t^{\beta i+s}}{C(\beta,s,i)}, p\in N_0. \tag{8}$$

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть $p=0$, ряд (8) сходится и к нему можно почленно применять оператор D_β. Если существует значение параметра $s,$ при которых выполняется равенство

$$\left(t^{-\beta i-s+\beta}D_\beta t^{\beta i+s}\right)\Big|_{i=0}=0,$$

то функции $y_{s,0}(t)$ при всех таких значениях параметра s удовлетворяют уравнению

$$D_\beta y(t)=\lambda y(t). \tag{9}$$

Теорема 2. Пусть ряд (8) сходится и к нему можно почленно применять оператор D_β. Если существует значение параметра $s,$ при которых выполняется равенство

$$\left(t^{-\beta i-s+\beta}D_\beta t^{\beta i+s}\right)\Big|_{i=0}=0,$$

то функции $y_{s,p}(t)$ при всех таких значениях параметра s, и для всех $p=0,1,...,n-1$ удовлетворяют уравнению

$$\left(D_\beta-\lambda\right)^n y(t)=0.$$

Доказательство этих теорем следует из утверждения леммы 1 и свойств нормированных систем.

Пример. Для любого $\alpha>0$ следующее выражение

$$J^\alpha u(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}u(\tau)d\tau$$

называется оператором интегрирования порядка α в смысле Римана-Лиувилля [9].

Пусть $m-1<\alpha\le\gamma\le m, m=1,2,...$. Рассмотрим дифференциальный оператор дробного порядка следующего вида

$$D^{\alpha,\gamma}u(t)=J^{\gamma-\alpha}\frac{d^m}{dt^m}J^{m-\gamma}u(t).$$

Отметим, что для некоторых частных значений параметра γ мы получаем известные операторы дробного дифференцирования. Так в случае $\gamma=\alpha$ имеем $D^{\alpha,\alpha}u(t)={}_{RL}D^\alpha$ – оператор дифференцирования порядка α в смысле Римана–Лиувилля, в случае $\gamma=m$ получаем, что $D^{\alpha,m}u(t)={}_CD^\alpha$ – оператор Капуто, а в случае $\gamma=\beta(m-\alpha)+\beta, 0\le\beta\le1$ имеем $D^{\alpha,\beta}u(t)=J^{\beta(m-\alpha)}\dfrac{d^m}{dt^m}J^{(1-\beta)(m-\alpha)}u(t)$ – оператор Хилфера [8].

Непосредственным вычислением можно показать, что оператор $D^{\alpha,\gamma}$ удовлетворяет следующим равенствам

$$D^{\alpha,\gamma}t^s=0, s=\gamma-1,\gamma-2,...,\gamma-m, \text{ и } D^{\alpha,\gamma}t^\mu=\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1-\alpha)}t^{\mu-\alpha}, \mu>m-1.$$

Следовательно, $D^{\alpha,\gamma}$ является обобщенно-однородным оператором порядка α.

Из утверждений теорем 1 и 2 вытекают следующее.

Следствие 1. Пусть $m-1<\alpha\le\gamma\le m, m=1,2,..., s=\gamma-1,\gamma-2,...,\gamma-m$. Тогда функции

$$y_s(t)=\sum_{i=0}^\infty\lambda^i\frac{t^{\alpha i+s}}{\Gamma(\alpha k+s+1)} \tag{10}$$

являются линейно независимыми решениями дифференциального уравнения дробного порядка

$$D^{\alpha,\gamma}y(t)-\lambda y(t)=0, t>0. \tag{11}$$

Следствие 2. Пусть $m-1<\alpha\le\gamma\le m, m=1,2,..., s=\gamma-1,\gamma-2,...,\gamma-m$. Тогда для всех значений $s=\gamma-1,\gamma-2,...,\gamma-m$ и $p=0,1,...,n-1$ функции

$$y_{s,p}(t)=\sum_{i=p}^\infty\lambda^{i-p}\binom{i}{p}\frac{t^{\alpha i+s}}{\Gamma(\alpha k+s+1)} \tag{12}$$

являются линейно независимыми решениями дифференциального уравнения дробного порядка

$$\left(D^{\alpha,\gamma}-\lambda\right)^{n} y(t)=0, t>0 .$$

Функцию $y_s(t)$ из (10) можно представить в виде

$$y_k(t)=t^{\gamma-k}E_{\alpha,\gamma-k+1}(\lambda t^{\alpha}), k=1,2,...,m,$$

где $E_{\alpha,\beta}(z)=\sum\limits_{i=0}^{\infty}\frac{z^i}{\Gamma(\alpha i+\beta)}$ – функция типа Миттаг–Леффлера [9]. Так как $E_{\alpha,\beta}(z)$ является целой функцией, то отсюда легко получить сходимость рядов из представлений (10) и (12).

Отметим, что фундаментальные решения уравнения (11) в случае $\gamma=\beta(m-\alpha)+\beta, 0\le\beta\le 1$, т.е. для уравнения с оператором Хилфера, были построены в работе [10].

3. Построение нормированных систем для неоднородного уравнения

Теперь приведем пример f -нормированной системы относительно оператора $D^{\alpha,\gamma}$ и построим решение неоднородного уравнения

$$\left(D^{\alpha,\gamma}-\lambda\right)^{n} y(t)=f(t), t>0 \tag{13}$$

Пусть $E^{p}_{\alpha,\alpha}(\lambda,t)=\sum\limits_{i=p}^{\infty}\lambda^{i-p}\binom{i}{p}\frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+\alpha)}, p=0,1,...$.

Рассмотрим следующую функцию

$$y_p(f)(t)=\int\limits_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}E^{p}_{\alpha,\alpha}(-\lambda(t-\tau)^{\alpha})f(\tau)d\tau . \tag{14}$$

Теорема 3. Пусть $m-1<\alpha\le\gamma\le m,\ m=1,2,...$. Тогда функции $y_p(f)(t), p=0,1,...$ образуют f -нормированную систему относительно оператора $D^{\alpha,\gamma}-\lambda$, то есть справедливы равенства

$$\left(D^{\alpha,\gamma}-\lambda\right)y_0(f)(t)=f(t),\left(D^{\alpha,\gamma}-\lambda\right)y_p(f)(t)=f_{p-1}(t),\ \ p\ge 1 \tag{15}$$

Доказательство. В случае $p=0$ имеем $E^{0}_{\alpha,\alpha}(-\lambda(t-\tau)^{\alpha})=E_{\alpha,\alpha}(-\lambda(t-\tau)^{\alpha})$. Тогда равенство (15) для случая $p=0$ доказывается, как и в случае оператора Римана - Лиувилля [8].

Пусть $p\ge 1$. Применяя к функции $y_p\left(f\right)(t)$ оператор $J^{m-\gamma}$, имеем

$$J^{m-\alpha}y_p(f)(t)=\frac{1}{\Gamma(m-\gamma)}\int\limits_0^t (t-\tau)^{m-\gamma-1}\int\limits_0^{\tau}(\tau-\xi)^{\alpha-1}E^{p}_{\alpha,\alpha}(\lambda(\tau-\xi)^{\alpha})f(\xi)d\xi d\tau=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(m-\gamma)}\int\limits_0^t f(\xi)\int\limits_{\xi}^{t}(t-\tau)^{m-\gamma-1}(\tau-\xi)^{\alpha-1}E^{p}_{\alpha,\alpha}(\lambda(\tau-\xi)^{\alpha})d\tau d\xi .$$

Используя представление функции $E^{p}_{\alpha,\alpha}$, для внутреннего интеграла получим

$$\int\limits_{\xi}^{t}(t-\tau)^{m-\gamma-1}(\tau-\xi)^{\alpha-1}E^{p}_{\alpha,\alpha}(\lambda(\tau-\xi)^{\alpha})d\tau=\Gamma(m-\gamma)\sum_{i=p}^{\infty}\binom{i}{p}\frac{\lambda^{i-p}(t-\xi)^{\alpha i+\alpha+m-\gamma-1}}{\Gamma(\alpha i+\alpha+m-\gamma)}$$

Тогда

$$J^{m-\gamma}y_p(f)(t)=\int\limits_0^t (t-\xi)^{m-\gamma-1}E^{p}_{\alpha,\alpha}\left(\lambda(t-\xi)^{\alpha}\right)f(\xi)d\xi .$$

Далее,

$$\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}J^{m-\gamma}f_p(t)=\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}\int\limits_0^t f(\xi)\sum_{i=p}^{\infty}\binom{i}{p}\frac{\lambda^{i-p}(t-\xi)^{\alpha i+\alpha+m-\gamma-1}}{\Gamma(\alpha i+\alpha+m-\gamma)}d\xi=$$

$$=\int\limits_0^t f(\xi)\sum_{i=p}^{\infty}\lambda^{i-p}\binom{i}{p}\frac{(t-\xi)^{\alpha i+\alpha-\gamma}}{\Gamma(\alpha i+\alpha+1-\gamma)}d\xi .$$

И наконец, применяя к последнему выражению оператор $J^{\gamma-\alpha}$ после элементарных выкладок, получим

$$J^{\gamma-\alpha}\frac{d^m}{dt^m}J^{m-\gamma}y_p(f)(t)=\int_0^t\sum_{j=p-1}^{\infty}\lambda^{j-(p-1)}\binom{j+1}{p}\frac{(t-\xi)^{\alpha j+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha j+\alpha)}f(\xi)d\xi .$$

Значит,

$$D^{\alpha,\gamma}y_p(f)(t)=\int_0^t\left[\sum_{i=p-1}^{\infty}\lambda^{i-(p-1)}\binom{i+1}{p}\frac{(t-\xi)^{\alpha i+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha i+\alpha)}\right]f(\xi)d\xi$$

Тогда

$$D^{\alpha,\gamma}y_p(f)(t)-y_{p-1}(f)(t)=\int_0^t\sum_{i=p-1}^{\infty}\binom{i+1}{p}\frac{\lambda^{i-(p-1)}(t-\xi)^{\alpha i+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha i+\alpha)}f(\xi)d\xi-$$

$$-\int_0^t\sum_{i=p-1}^{\infty}\binom{i}{p-1}\frac{\lambda^{i-(p-1)}(t-\xi)^{\alpha i+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha i+\alpha)}f(\xi)d\xi=\lambda\int_0^t\sum_{i=p}^{\infty}\binom{i}{p}\frac{\lambda^{i-p}(t-\xi)^{\alpha i+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha i+\alpha)}f(\xi)d\xi=\lambda f_p(t) .$$

Таким образом,

$$D^{\alpha,\gamma}y_p(f)(t)-y_{p-1}(f)(t)=\lambda y_p(f)(t) ,$$

то есть при всех значениях $p=1,2,...$ выполняются равенства

$$\left(D^{\alpha,\gamma}-\lambda\right)y_p(f)(t)=y_{p-1}(f)(t) .$$

Теорема доказана.

Литература

1. Karachik, V.V. Normalized system of functions with respect to the Laplace operator and its applications / V.V. Karachik // Journal of Mathematical Analysis and Application. – 2003. – Vol. 287, № 2. – С. 577–592.

2. Карачик, В.В. Метод построения решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами / В.В. Карачик // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2012. – Vol. 52, № 2. – С. 237–252.

3. Карачик, В.В. О полиномиальных решениях задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре / В.В. Карачик, Н.А. Антропова // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2012. – Т. 15, № 2. – С. 86–98.

4. Карачик, В.В. Решение задачи Дирихле для полигармонического уравнения в шаре при полиномиальных данных / В.В. Карачик // Дифференциальные уравнения. – 2015. – Т. 51, № 8. – С. 1038–1047.

5. Karachik, V.V. Uniqueness of solutions to boundary-value problems for the biharmonic equation in a ball / V.V. Karachik, M.A. Sadybekov, B.T. Torebek // Electronic Journal of Differential Equations. – 2015. – Vol. 2015, № 244. – P. 1–9.

6.Liu, L. Normalized system for wave and Dunkl operators / L. Liu, G.B. Ren. // Taiwanese Journal of Mathematics. – 2007. – Vol. 14, № 2. – P. 675–683.

7.Yuan, H.F. Dunkl–Poisson Equation and Related Equations in Superspace / H.F. Yuan, V.V. Karachik // Mathematical Modelling and Analysis. – 2015. – Vol. 20. – Issue 6. – P. 768–781

8. Карачик, В.В. Метод нормированных систем функций / В.В. Карачик. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2014. – 452 с.

9. Kilbas, A. Theory and Applications of Fractional Differential Equations / A. Kilbas, H. Srivastava, J. Trujillo. – Amsterdam: Elsevier, 2006. – 523 p.

10. Hilfer, R. Operational method for the solution of fractional differential equations with generalized Riemann–Liouville fractional derivatives // R. Hilfer, Y. Luchko, Z. Tomovski // Fract. Calc. Appl. Anal. – 2009. – Vol. 12, № 3. – P. 299–318.

Поступила в редакцию 6 декабря 2015 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series “Mathematics. Mechanics. Physics”
2016, vol. 8, no. 1, pp. 28–33

DOI: 10.14529/mmph160104

NORMED SYSTEMS AND THEIR APPLICATION TO THE SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS OF FRACTIONAL ORDER

B.Kh. Turmetov[1]

This article describes a method of constructing the normed systems related to the differentiation of fractional order. Using the properties of normed systems the rigor solutions of ordinary differential equations of fractional order are given.

Keywords: normed system; fractional derivative; generalized-homogeneous operator; fundamental solution; inhomogeneous equation.

References

1. Karachik V.V. Normalized system of functions with respect to the Laplace operator and its applications. *Journal of Mathematical Analysis and Application*, 2003, Vol. 287, no. 2, pp. 577–592. DOI: 10.1016/S0022-247X(03)00583-3

2. Karachik V.V. Method for constructing solutions of linear ordinary differential equations with constant coefficients. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2012, Vol. 52, Issue 2, pp 219–234. DOI: 10.1134/S0965542512020108

3. Karachik V.V., Antropova N.A. On polynomial solutions to the Dirichlet problem for a biharmonic equation in a ball. *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2012, Vol. 15, no. 2, pp. 86–98. (in Russ.).

4. Karachik V.V. Solution of the Dirichlet Problem with Polynomial Data for the Polyharmonic Equation in a Ball. *Differential Equations*, 2015, Vol. 51, no. 8, Article ID 204, pp. 1033–1042. DOI: 10.1134/S0012266115080078

5. Karachik V.V., Sadybekov M.A., Torebek B.T. Uniqueness of solutions to boundary-value problems for the biharmonic equation in a ball. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2015, Vol. 2015, no. 244, pp. 1–9.

6. Liu L., Ren G.B. Normalized system for wave and Dunkl operators. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 2007, Vol. 14, no. 2, pp. 675–683.

7. Yuan H.F., Karachik V.V. Dunkl–Poisson Equation and Related Equations in Superspace. *Mathematical Modelling and Analysis*, 2015, Vol. 20, Issue 6, pp. 768–781. DOI:10.3846/13926292.2015.1112856

8. Karachik V.V. *Metod normirovannykh sistem funktsiy* [Method of normed system of functions]. Chelyabinsk: Izdatelskiy sentr YurGU Publ., 2014, 452 p. (in Russ.).

9. Kilbas A., Srivastava H., Trujillo J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Amsterdam: Elsevier, 2006, 523 p.

10. Hilfer R., Luchko Y., Tomovski Z. Operational method for the solution of fractional differential equations with generalized Riemann–Liouville fractional derivatives. *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2009, Vol. 12, no. 3, pp. 299–318.

Received December 6, 2015

[1] Turmetov Batirkhan Khudaybergenovich is Dr. Sc.(Physics and Mathematics), Professor, Mathematics Department, H.A.Yassawe International Kazakh-Turkish University, Turkistan, Kazakhstan.
E-mail: batirkhan.turmetov@iktu.kz