Механика

УДК 531.62 DOI: 10.14529/mmph160105

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ ТЯЖЁЛОГО СТЕРЖНЯ НА ЖЁСТКОМ ОСНОВАНИИ

Ю.И. Дорогов [1]

Исследуется устойчивость упругого весомого стержня, лежащего на абсолютно жёстком основании. Найдена критическая сила, при которой горизонтальный стержень, лежащий на жёстком основании, теряет устойчивость прямолинейной формы равновесия и отрывается от жёсткого основания полностью или только частью свой длины. Предварительно рассмотрен невесомый стержень с грузом посредине. Задача решается в линеаризованной постановке. Для определения прогибов применяется изопериметрическое условие, выражающее неизменность длины стержня при изгибе.

Ключевые слова: моделирование потери устойчивости; устойчивость горизонтального стержня.

Введение

Традиционно при исследовании процессов потери устойчивости прямолинейного упругого стержня принимается, что стержень вертикальный и невесомый [1–3]. Предполагается, что собственный вес стержня не оказывает существенного влияния на критическую силу.

Устойчивость вертикального стержня с учётом его веса исследована в [2]. Потеря устойчивости стержня при наличии препятствий выпучиванию рассматривалась в [4–6]. В работах [7, 8] исследовалась устойчивость стержня, когда его материал или материал опор подвергался разрушениям.

В данной работе находится критическая сила, при которой весомый горизонтальный стержень, лежащий на жёстком основании, теряет устойчивость прямолинейной формы равновесия и отрывается от жёсткого основания полностью или только частью свой длины. В начале рассматривается невесомый стержень с грузом массы m посредине. Затем рассматривается длинный весомый стержень, длина которого L превосходит длину той части, которая отрывается от жёсткой поверхности при изгибе от потери устойчивости. Стержень подвергается продольному сжатию силой P. Длина стержня достаточно большая, настолько, что при потере устойчивости большая часть стержня остаётся горизонтальной и прямолинейной, лежащей на жёстком основании. Часть стержня конечной длины Λ изгибается, отрываясь при этом от опоры. Подобная ситуация наблюдается при сжатии стальных горизонтальных листов, имеющих большую длину. В заключение рассматривается стержень, изгибающийся вследствие потери устойчивости по всей длине.

1. Невесомый стержень с грузом посредине

Рассмотрим упругий стержень с грузом посредине (рис. 1). Концы стержня заделаны и сближаются при сжатии и последующем изгибе стержня, возникающем вследствие потери устойчивости. Модуль Юнга материала стержня обозначим через E, а момент инерции его поперечного сечения через J. Представляются возможными две конфигурации изогнутой оси стержня, изображённые на рис. 1 и 2. В первом случае стержень изогнут по всей длине, груз при этом поднимается над горизонтальной плоскостью. Во втором случае стержень изгибается так, что груз остаётся неподвижным.

Поместим начало координат в одном конце стержня. Ось Ox горизонтальна и направлена в сторону другого конца стержня. Ось Oy вертикальна и направлена вверх.

Уравнение равновесия моментов после двукратного дифференцирования сводится к однородному линейному дифференциальному уравнению четвёртого порядка с постоянными коэффициентами

[1] Дорогов Юрий Иванович – кандидат технических наук, доцент, кафедра высшей математики, филиал ФГБОУ ВПО Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт», Волгоградская область, г. Волжский, Российская Федерация.
E-mail: ydorogov@yandex.ru

$$y'''' + \alpha^2 y'' = 0 .$$

Здесь $\alpha = \sqrt{P/EJ}$. При этом граничные условия, в соответствии с условиями закрепления на концах стержня, запишутся

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(l) = 0, \quad y'(l) = 0 .$$

Здесь l – длина проекции стержня на ось Ox или расстояние между концами стержня.

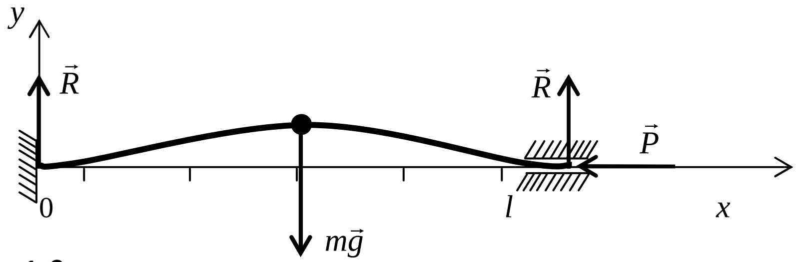

Рис. 1. Схема нагружения упругого невесомого стержня с грузом посредине. При потере устойчивости стержень изгибается, приподнимая груз.

Общее решение однородного линейного дифференциального уравнения четвёртого порядка имеет вид

$$y(x) = C_1 x + C_2 + C_3 \cos\alpha x + C_4 \sin\alpha x . \tag{1}$$

Граничным условиям удовлетворяет нетривиальное решение

$$y(x) = C(1 - \cos\alpha x) \tag{2}$$

при значении сжимающей силы $P_e = 4\pi^2 EJ/l^2$.

Эта сила равна силе Эйлера для стержня с заделанными концами, и её значение не зависит от массы груза. Выясним, может ли она вынудить стержень к поднятию груза или способна только удержать стержень в изогнутом состоянии, и её работы недостаточно для поднятия груза. Для этого рассмотрим изогнутую ось стержня. Из полученного однопараметрического семейства кривых выберем ту кривую, длина которой равна длине стержня L. Для определения искомой кривой используем уравнение относительно неизвестного параметра C .

$$L = \int_0^l \sqrt{1 + (y')^2}\, dx . \tag{3}$$

На начальном этапе процесса изгиба $y'(x) << 1$. Разложим подынтегральное выражение в ряд Маклорена с двумя первыми членами и подставим производную функции (2). Учитывая, что $\alpha l \approx 2\pi$, выразим из полученного уравнения коэффициент C через длину проекции изогнутой части l .

$$C(l) = \frac{1}{\pi}\sqrt{l(L - l)} . \tag{4}$$

Упругая энергия, накопленная в сжато-изогнутом стержне, равна

$$W = \frac{P^2 L}{2ES} + P(L - l) .$$

При изгибе стержня груз приподнимается на высоту $y(l/2) = C$. При этом сила тяжести груза mg совершает отрицательную работу $-mgC$ или, что тоже самое, груз приобретает дополнительную потенциальную гравитационную энергию mgC . Здесь g – ускорение свободного падения.

Сближение концов стержня Δ складывается из деформации сжатия стержня εL и сближения крайних сечений стержня $L - l$, возникающего в результате его изгиба. То есть перемещение одного конца стержня по отношению к другому равно

$$\Delta = \varepsilon L + L - l .$$

Здесь $\varepsilon = P/ES$ — относительная деформация сжатия стержня, S — площадь поперечного сечения стержня.

Работа сжимающей силы P на этом перемещении, с учётом изменения силы P на этапе чистого сжатия, равна

$$A = \int_0^{\Delta} P dx = W \ .$$

Таким образом, работа силы P равна упругой энергии стержня, и её недостаточно для преодоления силы тяжести груза и сообщения ему необходимой потенциальной энергии mgC. Другими словами, сила P, способная удержать стержень в изогнутом положении, не может принудить стержень изменить прямолинейное положение на изогнутое. Необходимая дополнительная энергия должна накопиться в стержне ещё на этапе сжатия, чтобы преобразоваться при изгибе в потенциальную гравитационную энергию mgC. Механизм накопления дополнительной энергии может быть описан при помощи кинематического нагружения следующим образом.

Стержень продолжает сжиматься без изгиба, после того как нагрузка превысит значение P_e, достаточное для удержания стержня в изогнутом состоянии. При некотором значении нагрузки P_1 в стержне будет накоплена энергия сжатия, достаточная для изгиба и преодоления работы сил тяжести. После этого стержень изгибается. При этом концы стержня остаются неподвижными и нагрузка уменьшается до величины P_e, достаточной для удержания стержня в сжато-изогнутом состоянии.

Упругая энергия, накапливаемая стержнем на этапе предварительного сжатия, равна работе сжимающей силы P_1.

$$A = \frac{P_1 \Delta}{2} \ . \qquad (5)$$

Эта энергия сжатия должна компенсировать полную энергию стержня в изогнутом состоянии, равную сумме упругой энергии W и гравитационной энергии $U = mgC$ в сжато-изогнутом состоянии. То есть,

$$A = W + U \ . \qquad (6)$$

Величина P_1 в соответствии с законом Гука равна

$$P_1 = \frac{ES\Delta}{L} = \frac{ES\left(\varepsilon L + L - l\right)}{L} \ .$$

Здесь $\varepsilon = P_e / ES$ — деформация сжатия, оставшаяся после изгиба части стержня. Следовательно,

$$P_1 = P_e + \frac{ES\left(L - l\right)}{L} \ .$$

Тогда работа силы P_1 равна

$$A = \frac{ES\Delta^2}{2L} \ .$$

Подставляя выражения A, W, U в уравнение (6) и учитывая значение C, после преобразования получим

$$L - l = \left(\frac{2mg}{\pi ES}\right)^{2/3} L \ .$$

Поэтому

$$P_1 = P_e + \sqrt[3]{\frac{4\left(mg\right)^2 ES}{\pi^2}} \ . \qquad (7)$$

Сила P_1 достаточна для того, чтобы вынудить стержень изогнуться вместе с грузом. Значение этой силы больше удерживающей силы Эйлера и зависит от массы груза.

Рассмотрим теперь случай, когда конфигурация изогнутой оси стержня при изгибе такая, что груз не отрывается от горизонтальной плоскости и сила тяжести работы не совершает (рис. 2). В этом случае работа сжимающей силы в точности равна потенциальной энергии сжато-изогнутого стержня, а критическая сила равна $P = 4P_e$.

Приравняем значение критической силы, найденное по формулам (7), к значению $4P_e$. Из полученного равенства найдём наименьшее значение массы, при котором становится возможной такая конфигурация, при которой груз не отрывается от горизонтальной плоскости:

$$m = \frac{12\sqrt{3}\pi^4 ES}{g\upsilon^3}.$$

Здесь $\upsilon = L/i$ — гибкость стержня, $i = \sqrt{J/S}$ — радиус инерции поперечного сечения стержня.

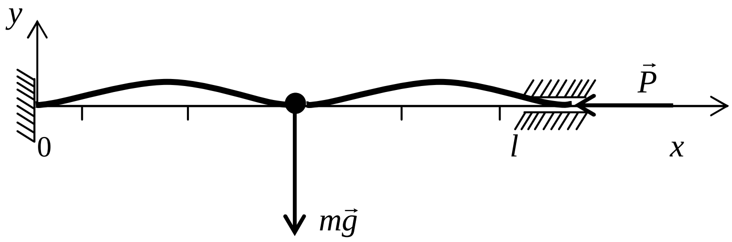

Рис. 2. Схема нагружения упругого невесомого стержня с грузом посредине. При потере устойчивости стержень изгибается так, что груз остаётся лежать на горизонтальной плоскости.

Если масса груза превосходит найденное критическое значение, то при потере устойчивости стержня груз не отрывается от горизонтальной плоскости. Если масса груза меньше критического значения, то стержень изгибается по всей длине, приподнимая при этом груз.

2. Тяжёлый горизонтальный стержень

Рассмотрим теперь упругий горизонтальный стержень, вес которого равномерно распределён по всей длине. Учитывая результаты предыдущего параграфа, имеет смысл предположить, что возможен случай изгиба стержня не по всей длине, а лишь по некоторой части его длины. Поместим начало системы координат в левом конце изогнутой части стержня. Ось Ox направим горизонтально в сторону изогнутой части стержня, а ось Oy – вертикально вверх (рис. 3).

Рассмотрим равновесие моментов, приложенных к изогнутой части стержня $\xi \in [0; x]$. Воздействие оставшейся горизонтальной части стержня на этот изогнутый участок сводится к продольному усилию P, поперечному усилию R и изгибающему моменту M_0, приложенным в сечении $x = 0$ (рис.3). Кроме того, на рассматриваемый участок действует распределённая по длине сила тяжести с интенсивностью $q = \rho g S$. Здесь ρ – плотность материала. К крайнему правому сечению рассматриваемого участка, со стороны правой части стержня приложен момент нормальных напряжений

$$M = EJy''.$$

Уравнение равновесия моментов, приложенных к рассматриваемой изогнутой части стержня $\xi \in [0; x]$ относительно сечения $\xi = x$, принимает вид

$$-M_0 - Rx + Py + M + \int_0^x q(x-\xi)d\xi = 0.$$

Дифференцируем это уравнение дважды по переменной x. Разделив полученное выражение на изгибную жёсткость и учитывая выражение для M, получим

$$y'''' + \alpha^2 y'' = -\beta. \tag{9}$$

Здесь $\beta = q/EJ$.

Общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами (9) имеет вид

$$y(x) = -\frac{\beta}{2\alpha^2}x^2 + C_1 x + C_2 + C_3\cos\alpha x + C_4 \sin\alpha x. \tag{10}$$

Здесь C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные, которые определяются из граничных условий для выпуклой части стержня.

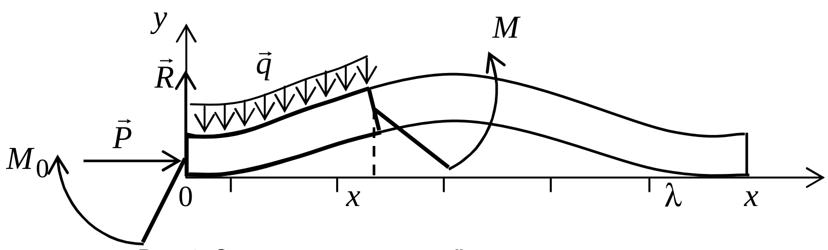

Рис. 3. Схема нагружения тяжёлого упругого стержня.

Обозначим длину проекции выпуклой части стержня λ. Тогда граничные условия запишутся

$$y(0)=0,\quad y'(0)=0,\quad y(\lambda)=0,\quad y'(\lambda)=0\,.$$

Физическому смыслу задачи удовлетворяет положительно определённое частное решение, которое становится возможным при $\alpha\lambda > 2\pi$. Следовательно, изогнутое состояние стержня возможно лишь в том случае, когда продольная сжимающая сила и длина проекции изогнутой части стержня удовлетворяют неравенству $P > P_\lambda$. Здесь $P_\lambda = 4\pi^2 EJ/\lambda^2$ — значение силы Эйлера для стержня длины λ с заделанными концами.

В этом случае уравнение прогибов запишется

$$y(x)=\frac{\beta\lambda}{2\alpha^3}\operatorname{ctg}\frac{\alpha\lambda}{2}(1-\cos\alpha x)+\frac{\beta}{2\alpha^3}\big(\alpha x(\lambda-x)-\lambda\sin\alpha x\big).$$

Заметим, что при $\alpha\lambda \to 2\pi+0$ первое слагаемое в правой части последнего выражения неограниченно большое, а второе слагаемое конечное. Поэтому вторым слагаемым можно пренебречь. Учитывая, что величина множителя $0{,}5\beta\lambda\alpha^{-3}\operatorname{ctg}(0{,}5\alpha\lambda)$, стоящего в первом слагаемом, не определена, так как зависит от неопределенных величин α и λ, то этот множитель также можно считать неопределённым. Обозначим его C. С учётом вышесказанного, для оси изогнутой части стержня получим то же уравнение (2).

Из полученного однопараметрического семейства кривых выберем ту кривую, длина которой равна длине изогнутой части стержня Λ. Выразим длину изогнутой части стержня через длину её проекции с учётом того, что на начальном этапе процесса изгиба $y'(x) \ll 1$. Из полученного уравнения после интегрирования найдём значение коэффициента C, которое определяется выражением аналогичным выражению (4).

На начальном этапе изгиба $\alpha\lambda \approx 2\pi$, то есть значение силы, способной удержать стержень в изогнутом состоянии, равно $P \approx P_\lambda$. Работа этой силы, как и в случае невесомого стержня с грузом посредине, равна упругой энергии стержня. Этой работы недостаточно для преодоления силы тяжести и сообщения изгибающейся части стержня необходимой потенциальной энергии. Механизм накопления дополнительной энергии описан в предыдущем параграфе.

Для определения критической силы, при которой становится возможным переход стержня из прямолинейного сжатого состояния в сжато-изогнутое состояние, составим уравнение энергетического баланса.

Стержень сжат по всей длине, а изогнут только по части длины Λ. Для упругой энергии данного стержня получим

$$W=\frac{P^2L}{2ES}+P(\Lambda-\lambda).$$

Потенциальная гравитационная энергия равна работе распределённых сил тяжести, взятой с обратным знаком, то есть

$$U=\rho g S\int_0^\lambda y(x)\,dx\,.$$

Подставляя в последнее выражение функцию прогибов (2) с учётом значения коэффициента C, определённого выражением (4), находим

$$U = \frac{\rho g S \lambda^{3/2}\sqrt{\Lambda-\lambda}}{\pi}.$$

Сближение концов стержня Δ складывается из деформации сжатия стержня εL и сближения крайних сёчений изогнутого участка $\Lambda-\lambda$, возникающего в результате его изгиба. То есть перемещение одного конца стержня по отношению к другому равно

$$\Delta = \varepsilon L + \Lambda - \lambda. \qquad (11)$$

При некотором значении нагрузки P_1 в стержне будет накоплена энергия сжатия, достаточная для изгиба и преодоления работы сил тяжести. После этого часть стержня длины Λ выпучивается. При этом концы стержня остаются неподвижными, и нагрузка ослабевает до величины P_λ, достаточной для удержания стержня в сжато-изогнутом состоянии.

Упругую энергию, накапливаемую стержнем на этапе предварительного сжатия, равную работе сжимающей силы P_1, найдём по формуле (5), в которой величина Δ определяется выражением (11). Эта энергия сжатия должна компенсировать полную энергию стержня в изогнутом состоянии, равную сумме упругой и гравитационной энергий в сжато-изогнутом состоянии.

Величина P_1, в соответствии с законом Гука, равна

$$P_1 = P_\lambda + \frac{ES\left(\Lambda-\lambda\right)}{L}.$$

Тогда работа силы P_1 равна

$$A = \frac{ES\Delta^2}{2L}.$$

Подставляя выражения A, W, U в уравнение (6), после преобразования получим

$$\Lambda-\lambda = \left(\frac{2\rho g L}{\pi E}\right)^{2/3}\lambda.$$

На начальном этапе изгиба $\lambda \approx \Lambda$, поэтому в правой части последней формулы вместо проекции λ можно взять длину изогнутой части Λ. Тогда нагрузка

$$P_1 = P_\lambda + \sqrt[3]{\frac{4(\rho g)^2 E}{\pi^2 L}}S\Lambda. \qquad (12)$$

В последней формуле величина длины изогнутой части Λ остаётся неопределённой. Среди всех значений P_1, получающихся из данной формулы, началу процесса потери устойчивости будет соответствовать минимальное. Обозначим значение длины изогнутой части, при котором достигается минимальное значение силы, через Λ_*. Это значение является корнем уравнения $dP_1/d\Lambda = 0$. Дифференцируем выражение (12) по переменной Λ и приравняем его к нулю. После преобразования из полученного уравнения находим

$$\Lambda_* = \sqrt[9]{\frac{128\pi^8 E^2 J^3 L}{S^3\rho^2 g^2}}.$$

Подставляя найденное Λ_* в формулу (12), получим значение критической силы, при которой происходит потеря устойчивости стержня, лежащего на жёстком основании

$$P_* = 3\cdot\sqrt[9]{\frac{16\pi^2 E^5 J^3 S^6 \rho^4 g^4}{L^2}}.$$

При $P < P_*$ стержень остаётся прямолинейным и горизонтальным. Изогнутая форма равновесия стержня появляется при достижении нагрузкой значения P_*. При этом, Λ_* — это минимально возможное значение длины изогнутой части стержня. По мере увеличения нагрузки длина изогнутой части также увеличивается до тех пор, пока стержень не окажется изогнутым по всей длине.

Если величина Λ_* меньше длины стержня L, то стержень начинает изгибаться не по всей длине, а только по части длины. Если величина Λ_* больше, чем длина стержня L, то стержень изгибается сразу по всей длине. Наименьшая длина стержня, при которой возможен частичный изгиб, определяется из равенства $\Lambda_* = L$. Эта длина равна

$$L_{\min} = 2\pi \cdot \sqrt[8]{\frac{E^2 J^3}{2\rho^2 g^2 S^3}} .$$

Так, например, для стали $L_{\min} \approx 231{,}35\sqrt[8]{\left(J/S\right)^3} = 231{,}35 i^{3/4}$. Здесь i — радиус инерции сечения стержня.

Если длина стержня больше величины $L_{\min}$, то при потере устойчивости стержень изгибается только частью. При меньшей длине стержень начинает изгибаться целиком. Повторяя рассуждения для этого случая $L < L_{\min}$, получим

$$L - l = \sqrt[3]{\frac{4\rho^2 g^2 L^5}{\pi^2 E^2}} .$$

Тогда критическая нагрузка

$$P_* = \frac{4\pi^2 EJ}{L^2} + \sqrt[3]{\frac{4\left(\rho g L\right)^2 E}{\pi^2}} S .$$

Минимальное значение нагрузки P_* достигается при длине, равной

$$L = \pi \cdot \sqrt[8]{\frac{432 E^2 J^3}{\rho^2 g^2 S^3}} \geq L_{\min} .$$

То есть функция $P_*\left(L\right)$ достигает минимума в области длин, при которых стержень теряет устойчивость, выпучиваясь только частью длины.

На основании полученных зависимостей $P_*\left(L\right)$ для разных длин, строим график критической силы, при которой происходит отклонение стержня от прямолинейного горизонтального положения. Этот график изображён сплошной линией на рис. 4. Пунктирной линией изображён график зависимости силы Эйлера для стержня с заделанными концами. Как видно из этих графиков, критическая сила превосходит силу Эйлера при всех значениях длины. Чем больше длина стержня, тем сильнее отличие критической силы от силы Эйлера. При пограничном значении длины $L = L_{\min}$ критическая сила превосходит соответствующую силу Эйлера ровно в три раза.

Выводы

1. Формула Эйлера даёт существенно заниженное значение критической силы для весомого горизонтального стержня, лежащего на жёсткой опоре. Критическая сила превосходит силу Эйлера при любом значении длины стержня. Отличие критической силы от силы Эйлера тем больше, чем длиннее стержень.

2. Критическая сила зависит не только от геометрии сечения стержня и его длины, но и от массы стержня, или плотности его материала.

3. В зависимости от конфигурации кривых изгиба стержней при потере устойчивости, стержни можно классифицировать по их длине на короткие и длинные. Короткие стержни ($L < L_{\min}$) при потере устойчивости выпучиваются сразу по всей длине. Длинные стержни ($L > L_{\min}$) теряют устойчивость, изгибаясь только частью, длина которой увеличивается с увеличением нагрузки.

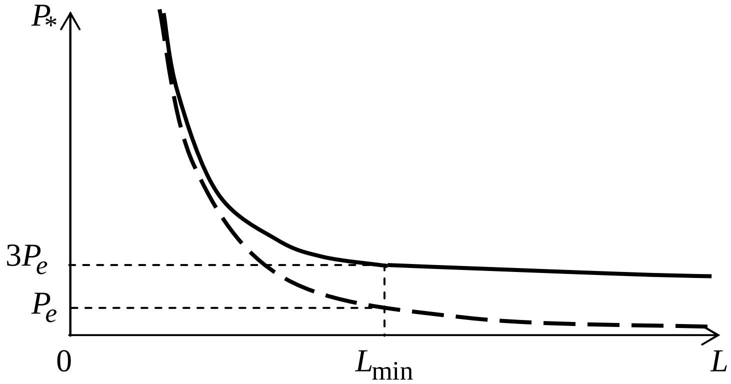

Рис. 4. График зависимости критической силы от длины стержня.

Литература

1. Вольмир, А.С. Устойчивость деформируемых систем / А.С. Вольмир. – М.: Наука, 1967. – 984 с.
2. Пановко, Я.Г. Устойчивость и колебания упругих систем / Я.Г. Пановко, И.И. Губанова. – М.: Наука, 1987. – 352 с.
3. Работнов, Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела / Ю.Н. Работнов. – М.: Наука, 1988. – 712 с.
4. Дорогов, Ю.И. Об устойчивости формы незакреплённого упругого стержня с жёсткими полками на концах / Ю.И. Дорогов // Прикладная математика и механика. – 2013. – Том 77. – Вып. 3. – С. 462–473.
5. Дорогов, Ю.И. Устойчивость стержня с жёсткими окончаниями / Ю.И. Дорогов // Строительная механика и расчёт сооружений. – 2013. – № 3. – С. 16–21.
6. Дорогов, Ю.И. Устойчивость стержня с искривленными торцами / Ю.И. Дорогов // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2012. – Т. 18, № 2. – С. 255–266.
7. Дорогов, Ю.И. Устойчивость упругого стержня с разрушающейся опорой / Ю.И. Дорогов // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2010. – Т. 16, № 1. – С. 84–96.
8. Дорогов, Ю.И. Продольный изгиб стержня с разрушающимися заделками / Ю.И. Дорогов // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2010. – Т. 16, № 4. – С. 575–586.

Поступила в редакцию 18 июня 2015 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series “Mathematics. Mechanics. Physics”
2016, vol. 8, no. 1, pp. 34–42

DOI: 10.14529/mmph160105

THE MODELING OF LOSS IN STABILITY OF A HEAVY ROD PLACED ON A RIGID BASIS

Yu.I. Dorogov[1]

Stability of the ponderable elastic column lying on an absolutely rigid basis is investigated. The ends of the column are closed up and do not turn at a core bend. The column contracts by longitudinal force. Previously a weightless column with freight in the middle was considered. Research is conducted at rather small values of deflections of the column. Curvature of a curved axis of the column is accepted equal by the second derivative of function of deflections. The problem is solved in the linearized statement. For definition of deflections of a curved axis of the column the linear differential equation of the fourth order is used. The nontrivial private solution of the differential equation under the boundary con-

[1] Dorogov Yury Ivanovich is Cand. Sci. (Engineering), Associate Professor, Higher Mathematics Department, Branch of National Research University "Moscow Power Engineering Institute", Volzhskiy, Russia.
E-mail: ydorogov@yandex.ru

ditions corresponding to fixing conditions is only with an accuracy of indefinite coefficient. The isoperimetric condition expressing the column length invariance at a bend is applied to determination of this coefficient. The critical force with which the column loses stability is found. Cases of a full and partial bend of the column are considered. For determination of critical force, besides the condition of the existence of the nontrivial solution of the differential equation of a bend, the law of conservation of mechanical energy is applied. It is established that the critical force and configuration of a curved axis of the column depends not only on length of the column and geometry of cross section, but also on column material density.

Keywords: modeling of loss of stability; stability of a horizontal rod.

References

1. Vol'mir A.S. Ustoychivost' deformiruemykh sistem [The stability of deformable systems]. Moscow, Nauka Publ., 1967, 984 p. (in Russ.).

2. Panovko Ya.G., Gubanova I.I. Ustoychivost' i kolebaniya uprugikh sistem [Stability and oscillations of elastic systems]. Moscow, Nauka Publ., 1987, 352 p. (in Russ.).

3. Rabotnov Yu.N. Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela [Deformable Solid Body Mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1988, 712 p. (in Russ.).

4. Dorogov Yu.I. The stability of the shape of an unattached elastic rod with stiff flanges on its ends. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, Vol. 77, no. 3, pp. 338–345. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2013.09.010

5. Dorogov Yu.I. *Stroitel'naya mekhanika i raschyet sooruzheniy*, 2013, no. 3, pp. 16–21. (in Russ.).

6. Dorogov Yu.I. Buckling of the Column with the Bent Butts. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsiy* [Composite Mechanics and Design], 2012, Vol. 18, no. 2, pp. 255–266. (in Russ.).

7. Dorogov Yu.I. Buckling of the Elastic Column with Failing Support. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsiy* [Composite Mechanics and Design], 2010, Vol. 16, no. 1, pp. 84–96. (in Russ.).

8. Dorogov Yu.I. The Longitudinal Bend of a Column with Failing Attachments. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsiy* [Composite Mechanics and Design], 2010, Vol. 16, no. 4, pp. 575–586. (in Russ.).

Received June 18, 2015