Краткие сообщения

УДК 517.956.223 DOI: 10.14529/mmph160108

ОДНОРОДНАЯ ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ–РИКЬЕ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ШАРЕ

И.А. Гулящих[1]

Найдено условие разрешимости однородной задачи Дирихле–Рикье для неоднородного бигармонического уравнения в единичном шаре при полиномиальной правой части.

Ключевые слова: задача Дирихле–Рикье; неоднородное бигармоническое уравнение; условия разрешимости.

Пусть $S=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|<1\}$ – n-мерный единичный шар в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ с нормой $|x|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2}$, а $\partial S=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|=1\}$ – единичная сфера. В единичном шаре S рассмотрим следующую однородную краевую задачу для неоднородного бигармонического уравнения

$$\Delta^2 u = f(x),\quad x\in S, \tag{1}$$

$$\begin{gathered} a_{00}u + a_{01}\frac{\partial}{\partial\nu}u + a_{02}\Delta u\Big|_{\partial S}=0,\quad t\in\partial S,\\ a_{11}\frac{\partial}{\partial\nu}u + a_{12}\Delta u + a_{13}\frac{\partial}{\partial\nu}\Delta u\Big|_{\partial S}=0,\quad t\in\partial S, \end{gathered} \tag{2}$$

где $\dfrac{\partial}{\partial\nu}$ – внешняя нормальная производная, коэффициенты a_{0j} и a_{1j} при $j=1,2,3$ – действительные и постоянные, а $f(x)$ – некоторый полином. Неоднородная задача (1)–(2) обобщает задачу Дирихле [1–2], но не обобщает задачу Неймана [3–5]. Неоднородная задача (1)–(2) при $f=0$ была рассмотрена в [6].

Сформулируем основной результат статьи. Пусть $\mathbb{N}_0\equiv\mathbb{N}\cup\{0\}$.

Теорема 1. Решение задачи (1)–(2) существует, если

$$f(x)=\sum_{\substack{m\in\mathbb{N}_0,\Delta(m)\neq 0\\ i=\overline{1,h_m}}} u_m^{(i)}(x)P_m^{(i)}(|x|^2), \tag{3}$$

где $u_m^{(i)}(x)$ – однородные гармонические полиномы степени m, h_m – число линейно независимых однородных гармонических полиномов степени m, а $P_m^{(i)}(t)$ – некоторые полиномы от t и

$$\begin{gathered}\Delta(\lambda)=a_{00}(a_{11}+a_{12}n)+2(2a_{00}a_{12}-a_{02}a_{11}n+a_{01}a_{12}n+a_{00}a_{13}n)\lambda+\\ +(2a_{01}a_{12}-2a_{02}a_{11}+2a_{00}a_{13}+a_{01}a_{13}n)\lambda^2+2a_{01}a_{13}\lambda^3.\end{gathered}$$

Доказательство. Обозначим через $V[f](x)$ объемный потенциал в единичном шаре S с плотностью $f(x)$ i.e.,

$$V[f](x)=-\frac{1}{\omega_n}\int_S E(x,\xi)f(\xi)\,d\xi,$$

где $E(x,\xi)=(n-2)^{-1}|\xi-x|^{2-n}$ ($n>2$) – элементарное решение уравнения Лапласа [7] и ω_n – площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$. Обозначим $V_2[f]=V[V[f]]$. Представим решение задачи (1)–

[1] Гулящих Илья Анатольевич – аспирант, кафедра математического и функционального анализа, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация.
E-mail: giarist@mail.ru

(2) в форме $u(x)=V_2[f]+w(x)$. Известно, что $\Delta^2 V_2[f]=f$ [7]. Тогда $0=\Delta^2 u(x)-f=\Delta^2 w(x)$ и поэтому для функции $w(x)$ получаем следующую задачу

$$\Delta^2 w(x)=0,\quad x\in S; \tag{4}$$

$$\begin{aligned} &a_{00}w+a_{01}\frac{\partial}{\partial\nu}w+a_{02}\Delta w\Big|_{\partial S}=\varphi_1(t),\quad t\in\partial S,\\ &a_{11}\frac{\partial}{\partial\nu}w+a_{12}\Delta w+a_{13}\frac{\partial}{\partial\nu}\Delta w\Big|_{\partial S}=\varphi_2(t),\quad t\in\partial S, \end{aligned} \tag{5}$$

где обозначено

$$\begin{aligned} &\varphi_1(t)=-(a_{00}+a_{01}\Lambda+a_{02}\Delta)V_2[f]\big|_{\partial S},\\ &\varphi_2(t)=-(a_{11}\Lambda+a_{12}\Delta+a_{13}\Lambda\Delta)V_2[f]\big|_{\partial S}. \end{aligned} \tag{6}$$

и $\Lambda u=\sum_{i=1}^{n}x_i u_{x_i}$. Из результатов работы [6] следует следующее условие разрешимости задачи (4)–(5), полученное В.В. Карачиком.

Теорема 2. Решение задачи (4)–(5) из класса $u\in C^3(\bar S)$ в случае, когда при некотором $m\in\mathbb{N}_0$ имеет место равенство $\Delta(m)=0$, существует тогда и только тогда, когда функции $\varphi_1\in C^2(\partial S)$ и $\varphi_2\in C^1(\partial S)$ удовлетворяют равенству

$$\int_{\partial S}H_m(t)\big(q_1(m)\varphi_1(t)+q_2(m)\varphi_2(t)\big)\,dt=0, \tag{7}$$

где $H_m(x)$ – произвольный однородный гармонический полином степени m, а вектор $\binom{q_1(m)}{q_2(m)}$ является решением системы алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} a_{00}+a_{01}m & a_{11}m\\ a_{00}+(m+2)a_{01}+(2n+4m)a_{02} & (m+2)a_{11}+(2n+4m)(a_{12}+ma_{13}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1(m)\\ q_2(m)\end{pmatrix}=0. \tag{8}$$

Для вычисления функций $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ из (6) воспользуемся теоремой 13 из [8].

Теорема 3. Пусть полином $f(x)$ записан в виде $f(x)=\sum_{m,s}|x|^{2m}u_s^{(m)}(x)$, где $u_s^{(m)}(x)$ – однородные гармонические полиномы степени s. Тогда для $x\in\bar S$ справедливо равенство

$$V[f](x)=\sum_{m,s}\Big(\frac{|x|^{2m+2}u_s^{(m)}(x)}{(2m+2)(2m+2s+n)}-\frac{u_s^{(m)}(x)}{(2m+2)(2s+n-2)}\Big).$$

В соответствии с разложением (3) выберем $f(x)=f_{s,i}(x)=u_s^{(i)}(x)P_s^{(i)}(|x|^2)$, где $u_s^{(i)}(x)P_s^{(i)}(|x|^2)$ – одно из слагаемых в разложении $f(x)$ в сумму (3). Тогда из теоремы 3 вытекает, что верно равенство

$$V_2[f_{s,i}]=u_s^{(i)}(x)Q_s^{(i)}(|x|^2),$$

где $Q_s^{(i)}(t)$ – некоторый полином от t. Вычислим функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ из (6) при $f(x)=f_{s,i}(x)$. Нетрудно видеть, что в этом случае

$$\begin{aligned} &\varphi_1(t)=-(a_{00}+a_{01}\Lambda+a_{02}\Delta)V_2[f_{s,i}]\big|_{\partial S}=c_s u_s(t),\\ &\varphi_2(t)=-(a_{11}\Lambda+a_{12}\Delta+a_{13}\Lambda\Delta)V_2[f_{s,i}]\big|_{\partial S}=d_s u_s(t), \end{aligned}$$

где постоянные c_s и d_s выражаются через коэффициенты $Q_s^{(i)}(t)$ и коэффициенты задачи (1)–(2). Подставляя эти функции в левую часть условия (7), получим

$$A=\big(q_1(m)c_s+q_2(m)d_s\big)\int_{\partial S}H_m(t)u_s(t)\,dt,$$

где $m\in\mathbb{N}_0$ удовлетворяет равенству $\Delta(m)=0$. Из условия (3) вытекает, что $s\neq m$, а значит в силу ортогональности на ∂S однородных гармонических полиномов разных степеней m и s имеем $A=0$. Таким образом условия теоремы 2 выполнены. Значит решение задачи (4)–(5), а следовательно и решение задачи (1)–(2) при $f(x) = f_{s,i}(x)$ существуют. Применяя аналогичные рассуждения для всех слагаемых $u_s^{(i)}(x)P_s^{(i)}(|x|^2)$ в разложении $f(x)$ в сумму (3), получаем утверждение теоремы.

Литература

1. Карачик, В.В. О полиномиальных решениях задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре / В.В. Карачик, Н.А. Антропова // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2012. – Т. XV, № 2(50). – С. 86–98.

2. Карачик, В.В. Построение полиномиальных решений задачи Дирихле для полигармонического уравнения в шаре / В.В. Карачик // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2014. – Т. 54, № 7. – С. 1149–1170. DOI: 10.7868/S0044466914070072

3. Karachik, V.V. Solvability conditions of the Neumann boundary value problem for the biharmonic equation in the unit ball / V.V. Karachik, B.Kh. Turmetov, A. Bekaeva // International Journal of Pure and Applied Mathematics. – 2012. – Vol. 81, № 3. – P. 487–495.

4. Карачик, В.В. Об условиях разрешимости задачи Неймана для полигармонического уравнения в единичном шаре / В.В. Карачик // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2013. – Т. 16, № 4(56). – С. 61–74.

5. Карачик, В.В. Условия разрешимости задачи Неймана для однородного полигармонического уравнения // Дифференциальные уравнения. – 2014. – Т. 50, № 11. – С. 1455–1461. DOI: 10.1134/S037406411411003X

6. Karachik, V.V. Uniqueness of solutions to boundary-value problems for the biharmonic equation in a ball / V.V. Karachik, M.A. Sadybekov, B.T. Torebek // Electronic Journal of Differential Equations, – 2015. – Vol. 2015, № 244. – pp. 1–9.

7. Бицадзе, А.В. Уравнения математической физики / А.В. Бицадзе. – Москва, Наука, 1982. – 336 с.

8. Карачик, В.В. Построение полиномиальных решений некоторых краевых задач для уравнения Пуассона / В.В. Карачик // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2011. – Т. 51. no. 9. – С. 1674–1694.

Поступила в редакцию 5 декабря 2015 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series “Mathematics. Mechanics. Physics”
2016, vol. 8, no. 1, pp. 57–60

DOI: 10.14529/mmph160108

HOMOGENEOUS DIRICHLET-RIQUIER PROBLEM FOR INHOMOGENEOUS BIHARMONIC EQUATION IN A BALL

I.A. Gulyashikh[1]

The solvability condition of the homogeneous Dirichlet–Riquier boundary value problem for inhomogeneous biharmonic equation in the unit ball, having polynomial right-hand part is obtained.

Keywords: Dirichlet–Riquier boundary value problem; inhomogeneous biharmonic equation; solvability conditions.

References

1. Karachik V.V., Antropova N.A. *Sibirskiy zhurnal industrial'noy matematiki*, 2012, Vol. 15, no. 2(50), pp. 86–98. (in Russ.).

2. Karachik V.V. Construction of polynomial solutions to the Dirichlet problem for the polyharmonic equation in a ball. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2014, Vol. 54, no. 7, pp. 1122–1143. DOI: 10.1134/S0965542514070070

[1] Gulyashikh Il'ya Anatol'evich is Post-graduate Student, Mathematical and Functional Analysis Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russia.
E-mail: giarist@mail.ru

3. Karachik V.V., Turmetov B.Kh., Bekaeva A. Solvability conditions of the Neumann boundary value problem for the biharmonic equation in the unit ball. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2012, Vol. 81, no. 3, pp. 487–495.

4. Karachik V.V. *Sibirskiy zhurnal industrial'noy matematiki*, 2013, Vol. 16, no. 4(56), pp. 61–74. (in Russ.).

5. Karachik V.V. Solvability conditions for the Neumann problem for the homogeneous polyharmonic equation. *Differential Equations*, 2014, Vol. 50, no. 11, pp. 1449–1456. DOI: 10.1134/S0012266114110032

6. Karachik V.V., Sadybekov M.A., Torebek B.T. Uniqueness of solutions to boundary-value problems for the biharmonic equation in a ball. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2015, Vol. 2015, no. 244, pp. 1–9.

7. Bitsadze A.V. Uravneniya matematicheskoy fiziki [Equations of mathematical physics]. Moskva, Nauka Publ., 1982, 336 p. (in Russ.).

8. Karachik V.V. Construction of polynomial solutions to some boundary value problems for Poisson's equation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2011, Vol. 51, no. 9, pp. 1567–1587. DOI: 10.1134/S0965542511090120

Received December 5, 2015