УДК 517.956 DOI: 10.14529/mmph160203

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ТИПА ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СОСТАВНОГО ТИПА

О.С. Зикиров
Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан
E-mail: zikirov@yandex.com

Исследуется краевая задача для класса уравнений третьего порядка составного типа с эллиптическим оператором в главной части. Доказаны теоремы существования и единственности классического решения для рассматриваемых задач. Доказательство основано на энергетических неравенствах и на теории интегральных уравнений фредгольмовского типа.

Ключевые слова: краевые задачи; уравнения составного типа; оператор Лапласа; функция Грина; уравнения третьего порядка; интегралы энергии; задача Дирихле; интегральные уравнения.

1. Постановка задачи. В данной работе рассматривается задача типа Дирихле для линейного уравнения третьего порядка составного типа

$$Mu \equiv \left(\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial}{\partial y}\right)(u_{xx}+u_{yy})+Lu=g(x,y), \tag{1}$$

где α, β – заданные постоянные, причем $\alpha^2+\beta^2\neq 0$, а L – линейное дифференциальное выражение вида

$$Lu \equiv a(x,y)u_{xx}+2b(x,y)u_{xy}+c(x,y)u_{yy}+d(x,y)u_x+e(x,y)u_y+f(x,y)u\,.$$

Пусть Ω обозначает односвязную область плоскости (x,y), ограниченную гладким жордановым контуром σ, который обладает такими свойствами: всякая прямая, параллельная характеристике $\beta x-\alpha y=0$, пересекает его в двух точках, прямые $\beta x-\alpha y=c_1$ и $\beta x-\alpha y=c_2\,(c_1<c_2)$ имеют с ним единственные общие точки (точки касания) M и N соответственно. Разобьем кривую σ на две части σ_1 и σ_2 следующим образом: $\sigma_1=\{(x,y)\in\sigma:\alpha x_n+\beta y_n>0\}$, $\sigma_2=\sigma\setminus\sigma_1$, где $x_n=\cos(n,x)$, $y_n=\cos(n,y)$ и n – внешняя нормаль к границе. Для уравнения (1) изучается следующая краевая задача типа Дирихле:

Задача $D_{\alpha\beta}$. *Требуется найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую внутри Ω уравнению (1) и краевым условиям*

$$u\,|_{\sigma}=\varphi_1(x,y), \qquad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\sigma_2}=\varphi_2(x,y), \tag{2}$$

где $\varphi_1(x,y)$ и $\varphi_2(x,y)$ – заданные функции.

Можно показать, что в задаче $D_{\alpha\beta}$ случай $\alpha\beta<0$ при помощи замены независимой переменной $t=1-\tau$ приводится к случаю $\alpha\beta>0$. Поэтому для определенности положим $\alpha>0$, $\beta>0$. Введем некоторые необходимые для дальнейшего обозначения и определения.

Пусть $C^{k,l}(\Omega)$ – класс функций $u(x,y)$, непрерывных вместе со своими частными производными порядка $\partial^{m+n}u(x,y)/\partial x^m\partial y^n$ для всех $m=0,1,\ldots k$, $n=0,1,\ldots l$; где $C^{k,0}(\Omega)=C^{0,k}(\Omega)=C^k(\Omega)$. Под классом $C^{(k,\lambda)}(\Omega)$ понимаются определенные в области Ω функции, у которых все частные производные до порядка k существуют и удовлетворяют условию Гельдера с показателем $\lambda, 0<\lambda<1$.

Через $C_{1/2}^{(0,h)}[a,b]$ обозначим множество функций $\varphi(t)$, заданных на отрезке $[a,b]$ и таких, что $[(t-a)(b-t)]^{1/2}\varphi(t)\in C^{(0,h)}[a,b], 0<h<1$. Если на этом множестве функций ввести норму

$$\|\varphi(t)\|_{h,1/2}=\left\|\sqrt{(t-a)(b-t)}\varphi(t)\right\|_{C^h},$$

где $\|\cdot\|_{C^h}$ – норма в пространстве $C^{(0,h)}[a,b]$, то полученное нормированное пространство будет банаховым [1].

Определение 1. *Под классическим решением задачи* $D_{\alpha\beta}$ *будем понимать функцию* $u(x,y)$ *из класса* $C^{(1,\lambda)}(\bar{\Omega})\cap C^3(\Omega)$ *удовлетворяющую уравнению (1) и условиям (2) в обычном смысле.*

Задачу $D_{\alpha\beta}$ будем исследовать в пространстве $C^{(1,\lambda)}(\bar{\Omega})\cap C^3(\Omega)$ и в этом случае будем требовать выполнении следующих условий:

Условие 1. *Коэффициенты уравнения (1) для любых* $(x,y)\in\Omega$ *удовлетворяют условиям*

$$a(x,y),\ b(x,y),\ c(x,y)\in C^1(\bar{\Omega}); d(x,y),\ e(x,y)\in C^0(\bar{\Omega});\ f(x,y)\in C^0(\Omega);$$

кроме того выполняются неравенства

$$\frac{\partial^2 a(x,y)}{\partial x^2}\le c_1,\ \frac{\partial^2 b(x,y)}{\partial x\partial y}\le c_2,\ \frac{\partial^2 c(x,y)}{\partial y^2}\le c_3,\ \frac{\partial d(x,y)}{\partial x}\le c_4,\ \frac{\partial e(x,y)}{\partial y}\le c_5.$$

Условие 2. *Для любых* $(x,y)\in\Omega$ *и* $(\xi,\eta)\in\Omega,$ *верны неравенства*

$$1)\quad a(x,y)\xi^2+2b(x,y)\xi\eta+c(x,y)\eta^2\ge c_6(\xi^2+\eta^2);$$

$$2)\quad a_{xx}+2b_{xy}+c_{yy}-d_x-e_y+2f\le -c_7<0.$$

Условие 3. *Заданные функции* $\varphi_1(x,y),\ \varphi_2(x,y)$ *и* $g(x,y)$ *удовлетворяют условиям*

$$\varphi_1(x,y)\in C_{1/2}^{(1,\lambda)}(\bar{\sigma}),\ \varphi_2(x,y)\in C_{1/2}^{(0,\lambda)}(\sigma_2)\quad \text{и}\quad g(x,y)\in C^{(1,\lambda)}(\bar{\Omega})$$

Здесь и всюду ниже через $c_j,(j=1,\ldots,15)$ будем обозначать положительные постоянные, конкретные значения которых для наших исследований принципиального значения не имеют.

2. Единственность решения задачи $D_{\alpha\beta}$**.** Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия 1 и 2. Тогда классическое решение задачи* $D_{\alpha\beta}$ *единственно.*

Доказательство. Предположим, что существуют две функции $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y),$ удовлетворяющие условиям задачи (1)–(2). Покажем, что $u(x,y)=u_1(x,y)-u_2(x,y)$. Доказательство этого факта проведем на основании энергетических тождеств. Умножим уравнения (1) на $u(x,y)$ и проинтегрируем по частям в области $\Omega,$ имеем

$$\iint_{\Omega} u\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial}{\partial y}\right)(u_{xx}+u_{yy})dxdy+\iint_{\Omega} uLudxdy=0. \tag{3}$$

Преобразуем подынтегральное выражение следующим образом

$$u\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial}{\partial y}\right)(u_{xx}+u_{yy})=\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial}{\partial y}\right)(uu_{xx}+uu_{yy})-$$

$$-\frac{1}{2}\left[\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x}-\beta\frac{\partial}{\partial y}\right)(u_x^2-u_y^2)+\left(\alpha\frac{\partial}{\partial y}-\beta\frac{\partial}{\partial x}\right)(2u_xu_y)\right];$$

$$u\big(a(x,y)u_{xx}+2b(x,y)u_{xy}+c(x,y)u_{yy}\big)=\frac{\partial}{\partial x}\left[auu_x+buu_y-\frac{1}{2}(a_x+b_y)u^2\right]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[buu_x+cuu_y-\frac{1}{2}(b_x+c_y)u^2\right]-\big(au_x^2+2bu_xu_y+cu_y^2\big)+\frac{1}{2}(a_{xx}+2b_{xy}+c_{yy})u^2;$$

$$u(d(x,y)u_x+e(x,y)u_y+f(x,y)u)=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}(du)^2+\frac{\partial}{\partial y}(eu)^2\right]-\frac{1}{2}(d_x+e_y-2f)u^2.$$

Применяя формулу Грина к интегралу (3) и учитывая однородные граничные условия, получим

$$\frac{1}{2}\int_{\sigma}\left[(\alpha x_n-\beta y_n)u_x^2+2(\alpha y_n+\beta x_n)u_xu_y+(\beta y_n-\alpha x_n)u_y^2\right]ds+$$

$$+\iint\limits_{\Omega}\left[a(x,y)u_x^2+2b(x,y)u_xu_y+c(x,y)u_y^2\right]dxdy-\frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega}(a_{xx}+2b_{xy}+c_{yy}-d_x-e_y+2f)u^2dxdy=0 \quad (4)$$

Так как $u(x,y)=0$ на границе области Ω, то $\dfrac{\partial u}{\partial s}=0$ на σ, поэтому на границе σ области Ω выполняются равенства $u_x=u_nx_n$, $u_y=u_ny_n$. В силу равенств $x_n=y_s$, $y_n=-x_s$, учитывая однородные граничные условия из выражение (4) имеем

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\sigma_1}u_n^2(x_n^2+y_n^2)(\alpha x_n+\beta y_n)ds+\iint\limits_{\Omega}\left(a(x,y)u_x^2+2b(x,y)u_xu_y+c(x,y)u_y^2\right)dxdy-$$

$$-\frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega}(a_{xx}+2b_{xy}+c_{yy}-d_x-e_y+2f)u^2dxdy=0.$$

Отсюда в силу условий теоремы 1 заключаем, что $u(x,y)\equiv 0$ в $\overline{\Omega}$. Теорема доказана.

3. Сведение задачи $D_{\alpha\beta}$ к интегральному уравнению. Пусть Ω – единичный круг с центром в начале координат. Рассмотрим модельное неоднородное уравнение

$$\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial}{\partial y}\right)(u_{xx}+u_{yy})=F(x,y), \quad (5)$$

с однородными граничными условиями (2). Обозначим через $\omega(s)$ неизвестные значения нормальной производной от искомой функции $u(x,y)$ на σ_1. Положим

$$\alpha u_x+\beta u_y=v(x,y), \quad (6)$$

тогда для функции $v(x,y)$ получим следующую задачу Дирихле:

$$v_{xx}+v_{yy}=F(x,y), \quad v(x,y)\big|_{\sigma}=\mu(s), \quad (7)$$

где $\mu(s)=\omega(s)(\alpha x_n+\beta y_n)$, если $s\in\sigma_1$, а $\mu(s)=0$ если $s\in\sigma_2$.

Задача Дирихле (7) имеет единственное решение и оно представимо формулой

$$v(x,y)=\int\limits_{\sigma}G_n(x,y;s)\mu(s)ds+\iint\limits_{\Omega}G(x,y;\xi,\eta)F(\xi,\eta)d\xi d\eta, \quad (8)$$

здесь $G(x,y;\xi,\eta)=\dfrac{1}{2\pi}\ln|(x-\xi)^2+(y-\eta)^2|+q(x,y;\xi,\eta)$ – функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Теперь в области Ω решаем задачу

$$\alpha u_x+\beta u_y=v(x,y), \quad u(x,y)\big|_{\sigma_2}=0.$$

Ее решение можно записать в виде

$$u(x,y)=\frac{1}{\beta}\int\limits_{\Phi(\beta x-\alpha y)}^{y}v\left(x-\frac{\alpha}{\beta}y+\frac{\alpha}{\beta}t,t\right)dt, \quad (9)$$

где

$$\sigma_2:\Phi=\Phi(\beta x-\alpha y)\ =\frac{1}{2(\alpha^2+\beta^2)}\left[\alpha\beta-2\alpha(\beta x-\alpha y)+\beta\sqrt{\alpha^2-4(\beta x-\alpha y)^2+4(\beta x-\alpha y)}\right].$$

Подставляя выражение (8) в (9) и меняя порядок интегрирования, получим

$$u(x,y)=\int\limits_{\sigma}k(x,y;s)\mu(s)ds+\iint\limits_{\Omega}K(x,y;\xi,\eta)F(\xi,\eta)d\xi d\eta, \quad (10)$$

здесь

$$k(x,y;s)=\frac{1}{\beta}\int\limits_{\Phi(\beta x-\alpha y)}^{y}G_n\left(x-\frac{\alpha}{\beta}y+\frac{\alpha}{\beta}t,t;s\right)dt, \quad (11)$$

$$K_0(x,y;\xi,\eta)=\frac{1}{\beta}\int\limits_{\Phi(\beta x-\alpha y)}^{y}G\left(x-\frac{\alpha}{\beta}y+\frac{\alpha}{\beta}t,t;\xi,\eta\right)dt \quad (12)$$

Относительно функции (10) справедливо утверждение.

Лемма 1. *Если* $F(x,y)\in C^{(1,h)}(\bar{\Omega})$ *и* $\mu(s)\in C_{1/2}^{(0,h)}(\sigma)$, *то функция (10) и ее производные непрерывны в области* Ω, *удовлетворяет в классическом смысле уравнению (5) и условию* $u(x,y)=0$ *для любой* $(x,y)\in\sigma_2$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $k(x,y;s)$. Для вычисления интеграла (11) используем формулу.

$$\frac{\partial G(x,y;s)}{\partial n}=\frac{x-\xi}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\eta'(s)-\frac{y-\eta}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\xi'(s)+\frac{\partial q(x,y;s)}{\partial n}.$$

Непосредственно вычисляя значение последнего интеграла найдем

$$k(x,y;s)=\frac{\beta}{2(\alpha^2+\beta^2)}[\alpha\eta'(s)-\beta\xi'(s)]\ln|(x-\xi)^2+(y-\eta)^2|+k_0(x,y;s),$$

где

$$k_0(x,y;s)=\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}[\beta\eta'(s)-\alpha\xi'(s)]\operatorname{arctg}\frac{2[\frac{\alpha}{\beta}(x-\xi)+(y-\eta)]}{(x-\xi)-\frac{\alpha}{\beta}(y-\eta)}-$$

$$-\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}[\alpha\eta'(s)-\beta\xi'(s)]\ln|(x-\frac{\alpha}{\beta}y+\frac{\alpha}{\beta}\Phi-\xi)^2+(\Phi-\eta)^2|-$$

$$-\frac{2\beta}{\alpha^2+\beta^2}[\alpha\eta'(s)-\beta\xi'(s)]\operatorname{arctg}\frac{2(1+\frac{\alpha^2}{\beta^2})\Phi+2(\frac{\alpha}{\beta}x-\frac{\alpha^2}{\beta^2}y+\frac{\alpha}{\beta}\xi-\eta)}{(x-\xi)-\frac{\alpha}{\beta}(y-\eta)}+$$

$$+\frac{1}{\beta}\int\limits_{\Phi(\beta x-\alpha y)}^{y}\frac{\partial q}{\partial n}\Big(x-\frac{\alpha}{\beta}y+\frac{\alpha}{\beta}t,t;\xi,\eta\Big)dt.$$

Функция $k_0(x,y;s)$ при $x=\xi,\ y=\eta$ непрерывна и ограничена, а $\frac{\partial k_0(x,y;s)}{\partial x}$, $\frac{\partial k_0(x,y;s)}{\partial y}$ – непрерывна и ограничена при всех $x\neq\xi,\ y\neq\eta$, а при $x\to\xi$ и $y\to\eta$. Имеет место оценка

$$\left|\frac{\partial k_0(x,y;s)}{\partial x}\right|\le\frac{c_8}{r},\ \left|\frac{\partial k_0(x,y;s)}{\partial y}\right|\le\frac{c_9}{r},$$

здесь $r^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2$. Используя равенство

$$G(x,y;\xi,\eta)=\ln|(x-\xi)^2+(y-\eta)^2|+q(x,y;\xi,\eta),$$

аналогично интегрируются функции $K_0(x,y;\xi,\eta)$:

$$K_0(x,y;\xi,\eta)=\frac{\beta^2}{2}\frac{\frac{\alpha}{\beta}(x-\xi)+(y-\eta)}{2(\alpha^2+\beta^2)}\ln|(x-\xi)^2+(y-\eta)^2|+k_1(x,y;\xi,\eta),$$

где

$$k_1(x,y;\xi,\eta)=\frac{\beta^2}{2}\frac{\frac{\alpha}{\beta}(x-\xi)+(y-\eta)}{(\alpha^2+\beta^2)}\operatorname{arctg}\frac{2[\frac{\alpha}{\beta}(x-\xi)+(y-\eta)]}{(x-\xi)-\frac{\alpha}{\beta}(y-\eta)}-$$

$$-\frac{\beta^2}{2}\frac{\frac{\alpha}{\beta}(x-\xi)+(y-\eta)}{2(\alpha^2+\beta^2)}\ln|(x-\frac{\alpha}{\beta}y+\frac{\alpha}{\beta}\Phi-\xi)^2+(\Phi-\eta)^2|-$$

$$-\frac{\beta^2}{2}\frac{(x-\xi)-\frac{\alpha}{\beta}(y-\eta)}{(\alpha^2+\beta^2)}\operatorname{arctg}\frac{2[(1+\frac{\alpha^2}{\beta^2})\Phi+\frac{\alpha}{\beta}(x-\xi)-\frac{\alpha^2}{\beta^2}y-\eta]}{(x-\xi)-\frac{\alpha}{\beta}(y-\eta)}+$$

$$+y-\Phi(\beta x-\alpha y)+\frac{1}{\beta}\int\limits_{\Phi(\beta x-\alpha y)}^{y} q\left(x-\frac{\alpha}{\beta}y+\frac{\alpha}{\beta}t,t;\xi,\eta\right)dt,$$

и для функции $K_0(x,y;\xi,\eta)$ справедлива оценка

$$|K_0(x,y;\xi,\eta)|\le c_{10}\left|\frac{\alpha}{\beta}(x-\xi)+(y-\eta)\right|\ln|(x-\xi)^2+(y-\eta)^2|+c_{11}.$$

Отсюда следует, что функции $K_0(x,y;\xi,\eta)$ непрерывны и ограничены при $x=\xi$, $y=\eta$, а их производные $K_{0x}(x,y;\xi,\eta)$, $K_{0y}(x,y;\xi,\eta)$ непрерывны при всех $x\ne\xi$, $y\ne\eta$, а при $x\to\xi$, $y\to\eta$ имеют логарифмическую особенность. Это следует из равенства (12).

Поэтому из теории гармонических потенциалов и условий леммы 1 следует, что функции $u(x,y)\in C^{(1,h)}(\bar{\Omega})\bigcap C^3(\Omega)$. Если продифференцировать (10) по x и по y то получим, что $u(x,y)$ удовлетворяют уравнению (5). Лемма доказана.

Будем искать решение изучаемой задачи $D_{\alpha\beta}$ в виде

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma}\left\{\frac{\alpha^2}{2(\alpha^2+\beta^2)}[\alpha\eta'(s)-\beta\xi'(s)]\ln|(x-\xi(s))^2+(y-\eta(s))^2|+k_0(x,y;s)\right\}\mu(s)ds+$$

$$+\iint\limits_{\Omega}\left\{\left[\frac{\alpha}{\beta}(x-\xi)+(y-\eta)\right]\ln|(x-\xi)^2+(y-\eta)^2|+k_1(x,y;\xi,\eta)\right\}F(\xi,\eta)d\xi d\eta, \qquad (13)$$

предполагая, что функции $\mu(s)$ и $F(x,y)$ удовлетворяют условиям леммы 1. Согласно лемме 1, функция (13) удовлетворяет всем условиям задачи, кроме условий $u(x,y)|_{\sigma_1}=0.$

В формулу (13) посредством функции $\mu(s)$ входит неизвестная пока функция $\omega(s)$; для ее определения необходимо перейти к пределу, устремив точки (x,y) к точке, лежащей на дуге σ_1. Тогда для неизвестной функции $\omega(s)$ получим интегральное уравнение первого рода с логарифмической особенностью в ядре

$$\frac{\alpha^2}{2\pi(\alpha^2+\beta^2)}\int\limits_{\sigma_1}\left\{[\alpha\eta'(s)-\beta\xi'(s)]\ln|s_0-s|+k_0(s_0,s)\right\}\omega_*(s)ds=\psi(s_0), \qquad (14)$$

здесь $\omega_*(s)=[\alpha\eta'(s)-\beta\xi'(s)]\omega(s)$;

$$\psi(s_0)=\iint\limits_{\Omega}\left\{\left[\frac{\alpha}{\beta}(\xi(s_0)-\xi)+(\eta(s_0)-\eta)\right]\ln|(\xi(s_0)-\xi)^2+\right.$$

$$\left.+(\eta(s_0)-\eta)^2|+k_1(\xi(s_0),\eta(s_0);\xi,\eta)\right\}F(\xi,\eta)d\xi d\eta.$$

Таким образом, решение задачи $D_{\alpha\beta}$ для уравнения (5) с однородными граничными условиями эквивалентно решению интегрального уравнения в классе $C_{1/2}^{(0,\lambda)}(\sigma_1)$.

4. Разрешимость интегрального уравнения (14). В этом пункте рассмотрим вопрос о существование решения интегрального уравнения (14). Перепишем интегральное уравнение (14), разбив ядро уравнения на регулярную и сингулярную части, в виде

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^l \ln|s_0-s|\,\omega_*(s)ds=\psi_1(s_0), \qquad (15)$$

где l – длина дуги σ_1; $\psi_1(s_0)=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2}\psi(s_0)+\frac{\alpha^2+\beta^2}{2\pi\alpha^2}\int\limits_{\sigma_1}k_0(s_0,s)\omega_*(s)ds.$ В силу свойств функции Грина и равенств (11), (12) легко убедиться, что функция $k_0(s_0,s)$ и ее первые производные являются непрерывными, а $\psi_1(s_0)$ – непрерывно дифференцируемая и $\psi'_1(s_0)$ удовлетворяет условию Гельдера. Для уравнения (15) справедлива следующая

Лемма 2. *Если* $\psi_1(s_0)\in C^{(1,\lambda)}_{1/2}[0,l]$, *то единственное решение* $\omega_*(s)$ *интегрального уравнения (15) существует в классе* $C^{(0,\lambda)}_{1/2}[0,l]$.

Доказательство. Дифференцируя (15), получим сингулярное интегральное уравнение

$$\frac{1}{\pi}\int_0^l \frac{\omega_*(s)ds}{s-s_0}ds=\psi_1^{'}(s_0), \tag{16}$$

общее решение которого имеет вид [2]

$$\omega_*(s_0)=-\frac{1}{\pi^2}\frac{1}{\sqrt{s_0(l-s_0)}}\int_0^l \frac{\sqrt{s(l-s)}}{s-s_0}\psi_1^{'}(s)ds\pm\frac{C}{\sqrt{s_0(l-s_0)}}, \tag{17}$$

здесь C – произвольная постоянная. Таким образом, уравнение (16) имеет решение с точностью до произвольной постоянной и для выделения единственного решения надо знать значение интеграла от функции $\omega_*(s)$ на отрезке $[0,l]$. Произвольную постоянную C определим таким образом, чтобы функция (17) удовлетворяла условию $\int_0^l \omega_*(s)ds=0$. Для этого проинтегрируем (17) на отрезке $[0,l]$, получим

$$\int_0^l \omega_*(s_0)ds_0=-\frac{1}{\pi^2}\int_0^l \frac{ds_0}{\sqrt{s_0(l-s_0)}}\int_0^l \frac{\sqrt{s(l-s)}}{s-s_0}\psi_1^{'}(s)ds\pm C\int_0^l \frac{ds_0}{\sqrt{s_0(l-s_0)}}.$$

Так как $\int_0^l [s_0(l-s_0)]^{-1/2}=\pi,$ то, изменив порядок интегрирования в интеграле, получим

$$\pi C=\frac{1}{\pi^2}\int_0^l \sqrt{s(l-s)}\,\omega_*(s)ds\int_0^l \frac{ds}{(s_0-s)\sqrt{s(l-s)}}.$$

Учитывая, что внутренний интеграл в правой части последнего равенства равен нулю, имеем $C=0.$ Таким образом, согласно условию леммы 2 получаем интегральное вида

$$\omega_{**}(s_0)+\int_0^l \frac{M(s,s_0)}{\sqrt{s(l-s)}}\omega_{**}(s)ds=g_2(s_0), \tag{18}$$

где $\omega_{**}(s)=\sqrt{s(l-s)}w_*(s);$

$$M(s,s_0)=\frac{1}{\pi^2}\int_0^l \frac{\sqrt{\xi(l-\xi)}}{\xi-s_0}\frac{\partial R(\xi,s)}{\partial s}d\xi;\quad g_2(s_0)=-\frac{2(\alpha^2+\beta^2)}{\pi\alpha^2}\int_0^l \frac{\sqrt{s(l-s)}}{s-s_0}\psi'(s)\,ds.$$

Как показано в [2, 3], к интегральному уравнению (18) с ядром $\dfrac{M(s,s_0)}{\sqrt{s(l_1-s)}}$ применимы альтернативы Фредгольма о разрешимости. После определения функции $\omega_*(s_0)$ решение уравнения (5) удовлетворяющие однородным граничным условиям (2) имеет вид

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\iint_\Omega P(x,y;\xi,\eta)F(\xi,\eta)d\xi d\eta, \tag{19}$$

где

$$P(x,y;\xi,\eta)=\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\int_{\Phi(\beta x-\alpha y)}^{y}\left[G_1\left(x-\frac{\alpha}{\beta}y+\frac{\alpha}{\beta}t,t;\xi,\eta\right)-S\left(x-\frac{\alpha}{\beta}y+\frac{\alpha}{\beta}t,t;\xi,\eta\right)\right]dt,$$

а $S(x,y;\xi,\eta)$ – вполне определенное ядро, зависящее от функции Грина $G(x,y;\xi,\eta)$ и ее производных под интегралами; оно является непрерывной функцией вместе с производными любого порядка при $(x,y)\in\Omega$.

Видно, что функция (19) при любой $F(x,y)\in C^{(1,h)}(\bar{\Omega})$, удовлетворяет уравнению (5) и однородным граничным условиям (2). Теперь подберем $F(x,y)$ так, чтобы функция (19) удовлетворяла уравнению (1). Так как функция $F(x,y)\in C^{(1,h)}(\bar{\Omega})$, то производные u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} и $\frac{\partial}{\partial x}(\Delta u)$, $\frac{\partial}{\partial y}(\Delta u)$ существуют и являются непрерывными функциями в области Ω, а

$$\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(u_{xx}+u_{yy}\right)=F(x,y).$$

Подставляя (19) в уравнение (1), получим интегральное уравнение

$$F(x,y)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\Omega}K(x,y;\xi,\eta)F(\xi,\eta)d\xi d\eta+g(x,y), \tag{20}$$

здесь $K(x,y;\xi,\eta)=LP(x,y;\xi,\eta)$. Нетрудно показать, что функция $P(x,y;\xi,\eta)$ удовлетворяет неравенствам

$$|P(x,y;\xi,\eta)|\le c_{12}\ln|r|;\quad |P_{xx}(x,y;\xi,\eta)|\le\frac{c_{13}}{|r|}.$$

Следовательно, ядро $K(x,y;\xi,\eta)$ не интегрируется с квадратом, но легко видеть [4], что итерированное ядро

$$K_2(x,y;\xi,\eta)=\iint\limits_{\Omega}K(x,y;s,t)K(s,t;\xi,\eta)dsdt$$

интегрируемо с квадратом. Поэтому вместо уравнения (20) рассмотрим интегральное уравнение с итерированным ядром

$$F(x,y)=\iint\limits_{\Omega}K_2(x,y;\xi,\eta)g(\xi,\eta)d\xi d\eta+g_1(x,y), \tag{21}$$

где $g_1(x,y)=g(x,y)+\iint\limits_{\Omega}K(x,y;\xi,\eta)g(\xi,\eta)d\xi d\eta.$ Так как $|K(x,y;\xi,\eta)|\le\frac{c_{14}}{|r|}$, то легко заметить [3], что $|K_2(x,y;\xi,\eta)|\le c_{15}\ln r+c_{16}$. Следовательно, для уравнения (21) справедливы теоремы Фредгольма. Заметим (см. например [4]), что интегральное уравнение (21) и задача $D_{\alpha\beta}$ имеют единственное решение при условии

$$\iint\limits_{\Omega}K_2^2(x,y;\xi,\eta)dxdyd\xi d\eta<1.$$

Решая уравнения (21), находим $F(x,y)\in C^{(1,h)}(\bar{\Omega})$ и тем самым - $u(x,y)$. Проведенные рассуждения доказывают существования классического решение задачи $D_{\alpha\beta}$. Легко проверить, что функция $u(x,y)$ из (19) при любой $g(x,y)\in C^{(1,h)}(\bar{\Omega})$ принадлежит классу $C^{(1,h)}(\bar{\Omega})\bigcap C^3(\Omega)$. Таким образом, резюмируя изложенное выше, приходим к следующей теореме:

Теорема 2. *Пусть наряду с условиями теоремы 1 выполнено и условие 3. Тогда решение задачи $D_{\alpha\beta}$ существует. Это решение представимо в виде (9), где функции $\omega(s)$ и $F(x,y)$ уже известны.*

Итак, существование решения задачи $D_{\alpha\beta}$ установлено. Заметим, что задачи Коши и Гурса для уравнения 3-го порядка изучались также в [5].

Литература

1. Бицадзе, А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка / А.В. Бицадзе. – М.: Наука, 1966. – 204 с.

2. Гахов Ф.Д. Краевые задачи / Ф.Д. Гахов. – М.: Наука. 1977. – 640 с.
3. Мусхелишвили, Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / Н.И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1968. – 511 с.
4. Джураев, Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов / Т.Д. Джураев. – Ташкент: «Фан», 1979. – 120 с.
5. Карачик, В.В. Задачи Коши и Гурса для уравнения 3-го порядка / В.В. Карачик // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2015. – Т. 7, № 2. – С. 31–43.

Поступила в редакцию 27 февраля 2016 г.

DOI: 10.14529/mmph160203

ON A DIRICHLET PROBLEM FOR COMPOSITE TYPE EQUATION

O.S. Zikirov
National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: zikirov@yandex.com

The aim of this paper is to prove the existence and uniqueness of smooth solutions to the Dirichlet type problem for one class of third-order equations that do not belong to any of the classic types. One of the main classes of non-classical equations is third-order composite type equations, the operator of which is a composition of first-order hyperbolic operator and an elliptic operator in the main part. A number of boundary value problems for the model composite type equations with the Laplace operator were investigated by T.D. Dzhuraev. Many studies have proved the existence of solutions to boundary value problems upon fulfillment of conditions of the convexity of area boundary. The method of proof used in this paper is similar to the method used in the research paper of the author mentioned above. For the research of composite type linear equations a combination of the method of potentials (Green's function) and integral identities is applied. The research method is based on reducing the studied problem with the help of the Green's function to an integral equation, the proof of its solubility and thus - the proof of the solvability of original problem.

Upon fulfillment of certain conditions on given functions, a third-order equation reduces to a second-order equation of elliptic type with an unknown right-hand side and the boundary function. With the help of Green's functions for elliptic equations, the studied problem is reduced to a second-order equivalent integral equation, the solvability follows from Fredholm alternative and the theorem of uniqueness of the solution of the original problem.

Keywords: Boundary value problem; composite type equations; Laplace operator; Green's function; third-order equations; energy integrals; Dirichlet problem; integral equations.

References

1. Bitsadze A.V. *Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh uravneniy vtorogo poryadka* [Boundary value problems for second-order elliptic equations]. Moscow, Nauka Publ., 1966, 204 p. (in Russ.).
2. Gakhov F.D. *Kraevye zadachi* [Boundary value]. Moscow, Nauka Publ., 1977, 640 p. (in Russ.).
3. Muskhelishvili N.I. *Singulyarnye integral'nye uravneniya* [Singular integral equations]. Moscow, Nauka Publ., 1968, 511 p. (in Russ.).
4. Dzhuraev T.D. *Kraevye zadachi dlya uravneniy smeshannogo i smeshanno-sostavnogo tipov* [Boundary value problems for the equations of mixed and mixed-composite types]. Tashkent, Fan Publ., 1979, 120 p. (in Russ.).
5. Karachik V.V. Cauchy and Goursat Problems for Differential Equation of Third Order. Bulletin of South Ural State University. Series of “Mathematics. Mechanics. Physics”, 2015, Vol. 7, no. 2, pp. 31–43. (in Russ.).

Received February 27, 2016