УДК 517.953.5 DOI: 10.14529/mmph160204

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Б.Ю. Иргашев
Наманганский инженерно-педагогический институт, г. Наманган, Узбекистан
E-mail: bahrom_irgashev@inbox.ru

В последнее время всё больше внимание специалистов привлекают неклассические уравнениям математической физики. Связано это как с теоретическим интересом, так и практическим, например вырождающиеся уравнения третьего порядка встречаются в теории трансзвуковых течений.

Получены достаточные условия единственности и существования решения одной краевой задачи в прямоугольной области для вырождающегося уравнения третьего порядка с кратными характеристиками. Решение получено в виде бесконечного ряда по собственным функциям.

Ключевые слова: вырождающиеся уравнения; интегралы энергии; метод Фурье; функция Грина; функция Бесселя; неравенство Бесселя; разложение в ряд по собственным функциям.

Введение

Фундаментальные результаты для вырождающихся уравнений второго рода эллиптического типа были получены академиком М.В. Келдышем [1].

При изучении так называемого стационарного вязкого трансзвукового линейного уравнения (или ВТ-уравнение)

$$u_{xxx}(x,y)+u_{yy}+\frac{a}{y}u_y=f(x,y).$$

Для случая $a=0$, в работе [2], методом построения функции Грина в прямоугольной области, решена краевая задача. Также в работах [3, 4] в явном виде построены функции Грина некоторых внешних краевых задач в случаях: $a=0$ и $a=1$. Случай произвольного a исследован в [5]. Для вырождающегося модельного уравнения высокого нечетного порядка, краевая задача в прямоугольной области рассмотрена в работе [6].

Статья содержит две части. Первая часть содержит постановку задачи и доказательство единственности решения. Во второй части строится решение в виде бесконечного ряда по собственным функциям и доказывается её равномерная сходимость и возможность почленного дифференцирования по переменным x до третьего и по переменной y до второго порядков.

Постановка и единственность решения задачи

Для уравнения

$$L[u]=u_{xxx}+a_1(x)u_x+a_0(x)u-y^m u_{yy}=0, \tag{1}$$

где $0\le m<1, a_1(x)\in C^1[0,1], a_0(x)\in C[0,1]$, рассмотрим следующую задачу.

Задача A**.** Найти в области $\Omega=\{(x,y):0<x,y<1\}$ решение уравнения (1) из класса $C_{x,y}^{3,2}(\Omega)\cap C_{x,y}^{2,1}(\overline{\Omega})$, удовлетворяющее следующим краевым условиям:

$$u(x,0)=0,\ u(x,1)=0,\ 0\le x\le 1;$$
$$u(0,y)=\varphi_1(y),\ u(1,y)=\varphi_2(y),\ u_x(1,y)=\varphi_3(y),\ 0\le y\le 1,$$

где

$$\varphi_i(y)\in C^4(0,1],\quad \varphi_i(1)=\varphi_i''(1)=0,$$
$$\varphi_i^{(j)}(y)=O\left(y^{\frac{7}{2}-m-j}\right)\ \textit{при}\ y\to+0,\ i=1,2,3,\ j=\overline{0,4}.$$

Теорема единственности. Если $\frac{1}{2}a_{1x}(x)-a_0(x)\le 0$, то однородная краевая задача для уравнения (1) имеет только тривиальное решение.

Доказательство. Пусть $u(x,y)$ – нетривиальное решение однородной задачи A. Рассмотрим тождество

$$uL[u]=0,\ (x,y)\in\Omega. \tag{2}$$

Так как

$$uu_{xxx}=\left(uu_{xx}-\frac{1}{2}u_x^2\right)_x,\ u(a_1u_x+a_0u)=\left(\frac{1}{2}a_1u^2\right)_x+\left(a_0-\frac{1}{2}a_{1x}\right)u^2,$$

$$y^m uu_{yy}=\left(y^m uu_y-\frac{my^{m-1}u^2}{2}\right)_y-\frac{m(1-m)y^{m-2}u^2}{2}-y^m u_y^2$$

то, подставляя их в тождество (2), а затем, проинтегрировав по области Ω, получим:

$$\frac{1}{2}\int_0^1 u_x^2(0,y)dy+\int_0^1\int_0^1 u^2(x,y)\left(a_0(x)-\frac{1}{2}a_{1x}(x)\right)dxdy+\int_0^1\int_0^1\left(\frac{m(1-m)}{2}y^{m-2}u^2+y^m u_y^2\right)dxdy=0,$$

отсюда получаем, что

$$u(x,y)\equiv 0.$$

Здесь учли, что из $u(x,y)\in C_{x,y}^{2,1}(\overline{\Omega})$ и $u(x,0)=0$ следует $u(x,y)=O(y)$, при $y\to+0$. Теорема доказана.

Построение решения поставленной задачи.

Будем искать решение методом разделения переменных:

$$u(x,y)=X(x)Y(y),$$

тогда из уравнения (1) следует, что

$$\frac{X'''+a_1(x)X'+a_0(x)X}{X}=\frac{y^mY''}{Y}=-\lambda,\ \lambda>0.$$

Учитывая граничные условия относительно переменной y, получим следующую краевую задачу на нахождения собственной функции и собственного значения:

$$\begin{cases} Y''(y)+\lambda y^{-m}Y(y)=0,\\ Y(0)=0,\\ Y(1)=0. \end{cases} \tag{3}$$

Уравнению (3) удовлетворяют следующие функции [7]:

$$Y_1(y)=\sqrt{y}J_{\frac{1}{2-m}}\left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{2-m}y^{\frac{2-m}{2}}\right),\ Y_2(y)=\sqrt{y}J_{-\frac{1}{2-m}}\left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{2-m}y^{\frac{2-m}{2}}\right),$$

где $J_\alpha(\beta)$ – функция Бесселя первого рода. Так как при $0\le m<1$ число $\frac{1}{2-m}$ не является целым, то функции $Y_1(y),Y_2(y)$ линейно независимы [8]. Поэтому общее решение уравнения (3) имеет вид

$$Y(y)=\sqrt{y}\left[C_1J_{\frac{1}{2-m}}\left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{2-m}y^{\frac{2-m}{2}}\right)+C_2J_{-\frac{1}{2-m}}\left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{2-m}y^{\frac{2-m}{2}}\right)\right],$$

где C_1,C_2 – произвольные постоянные. Из представления функции Бесселя 1-го рода следует, что в окрестности $y=0$ справедливы равенства

$$Y_1(y)=y^{\frac{1}{2}}J_{\frac{1}{2-m}}\left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{2-m}y^{\frac{2-m}{2}}\right)=O(y),\ Y_2(y)=y^{\frac{1}{2}}J_{-\frac{1}{2-m}}\left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{2-m}y^{\frac{2-m}{2}}\right)=O(1).$$

Поэтому для удовлетворения краевого условия $Y(0)=0$ мы должны положить $C_2=0$, отсюда из условия $Y(1)=0$, получим

$$Y(1)=J_{\frac{1}{2-m}}\left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{2-m}\right)=0. \tag{4}$$

В силу $\frac{1}{2-m}>0$ уравнение (4) имеет бесконечно много вещественных корней, причем все они простые [8]. Обозначим их через, μ_n, где $n=0,1,2,...$, причем $0<\mu_0<\mu_1<\mu_2<...<\mu_n<...$. Известно [9], что

$$\mu_n\approx\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2-m}+\pi n,\ n\in N.$$

Тогда $\mu_n=\frac{2\sqrt{\lambda_n}}{2-m}$, отсюда $\lambda_n=\left(\frac{2-m}{2}\mu_n\right)^2=O\left(n^2\right)$, собственные функции имеют вид

$$Y_n(y)=\sqrt{y}J_{\frac{1}{2-m}}\left(\frac{2\sqrt{\lambda_n}}{2-m}y^{\frac{2-m}{2}}\right),\ n\in N.$$

Если в качестве собственных функций взять

$$Y_k(y)=\frac{1}{\left\|\sqrt{y}J_{\frac{1}{2-m}}\left(\frac{2\sqrt{\lambda_k}}{2-m}y^{\frac{2-m}{2}}\right)\right\|_{L_2}}\sqrt{y}J_{\frac{1}{2-m}}\left(\frac{2\sqrt{\lambda_k}}{2-m}y^{\frac{2-m}{2}}\right),$$

то система $\{Y_k\}_{k=0}^{k=+\infty}$ будет ортонормированной. Поэтому в дальнейшем так и будем считать. Собственные функции удовлетворяют также следующему интегральному уравнению:

$$Y_k(y)=\lambda_k\int_0^1 G(y,\xi)\xi^{-m}Y_k(\xi)d\xi, \tag{5}$$

где

$$G(y,\xi)=\begin{cases}\xi(1-y),\ 0\le\xi\le y,\\ y(1-\xi),\ \ y\le\xi\le1.\end{cases}$$

Действительно, имеем

$$\lambda_k\int_0^1 G(y,\xi)\xi^{-m}Y_k(\xi)d\xi=-\int_0^1 G(y,\xi)Y_k''(\xi)d\xi=-(1-y)\int_0^y\xi Y_k''(\xi)d\xi-y\int_y^1(1-\xi)Y_k''(\xi)d\xi=$$

$$=(1-y)\left(-\xi Y_k'(\xi)\Big|_0^y+\int_0^y Y_k'(\xi)d\xi\right)-y\left((1-\xi)Y_k'(\xi)\Big|_y^1-\int_y^1 Y_k'(\xi)d\xi\right)=$$

$$=(1-y)\left(-yY_k'(y)+Y_k(y)\right)-y\left(-(1-y)Y_k'(y)-Y_k(y)\right)=-y(1-y)Y_k'(y)+(1-y)Y_k(y)+$$

$$+y(1-y)Y_k'(y)+yY_k(y)=Y_k(y)-yY_k(y)+yY_k(y)=Y_k(y).$$

Чтобы показать разложимость граничных функций $\varphi_i(y), i=1,2,3$ при некоторых условиях, по системе собственных функций $\{Y_k\}_{k=0}^{k=+\infty}$, воспользуемся теоремой Гильберта–Шмидта. Для этого предварительно превратим полученное интегральное уравнение в уравнение с симметричным ядром. Это делается обычным способом, т.е. умножением обоих сторон уравнения (5) на $y^{-\frac{m}{2}}$. Тогда имеем

$$y^{-\frac{m}{2}}Y_k(y)=\lambda_k\int_0^1 y^{-\frac{m}{2}}G(y,\xi)\xi^{-\frac{m}{2}}Y_k(\xi)\xi^{-\frac{m}{2}}d\xi .$$

Введем обозначения

$$f_k(y)=y^{-\frac{m}{2}}Y_k(y),\quad F(y,\xi)=y^{-\frac{m}{2}}G(y,\xi)\xi^{-\frac{m}{2}}=\begin{cases}\xi^{1-\frac{m}{2}}\left(y^{-\frac{m}{2}}-y^{1-\frac{m}{2}}\right), & 0\le\xi\le y,\\ y^{1-\frac{m}{2}}\left(\xi^{-\frac{m}{2}}-\xi^{1-\frac{m}{2}}\right), & y\le\xi\le 1.\end{cases}$$

Отсюда получим интегральное уравнение с непрерывным, по обоим переменным, и симметричным ядром

$$f_k(y)=\lambda_k\int_0^1 F(y,\xi)f_k(\xi)d\xi .$$

Тогда функция $y^{-\frac{m}{2}}\varphi_i(y)$, где $\varphi_i(y), i=1,2,3$ граничные функции, выражается через ядро $F(y,\xi)$ следующим образом:

$$y^{-\frac{m}{2}}\varphi_i(y)=\int_0^1 F(y,\xi)\left(-\xi^{\frac{m}{2}}\varphi_i''(\xi)\right)d\xi ,$$

в самом деле,

$$-\int_0^1 F(y,\xi)\xi^{\frac{m}{2}}\varphi_i''(\xi)d\xi=\left(y^{1-\frac{m}{2}}-y^{-\frac{m}{2}}\right)\int_0^y\xi d\varphi_i'(\xi)-y^{1-\frac{m}{2}}\int_y^1(1-\xi)d\varphi_i'(\xi)=$$

$$=\left(y^{1-\frac{m}{2}}-y^{-\frac{m}{2}}\right)\left(y\varphi_i'(y)-\int_0^y\varphi_i'(\xi)d\xi\right)-y^{1-\frac{m}{2}}\left(-(1-y)\varphi_i'(y)+\int_y^1\varphi_i'(\xi)d\xi\right)=$$

$$=y^{2-\frac{m}{2}}\varphi'(y)-y^{1-\frac{m}{2}}\varphi_i'(y)-y^{1-\frac{m}{2}}\varphi_i(y)+y^{-\frac{m}{2}}\varphi_i(y)+y^{1-\frac{m}{2}}\varphi_i'(y)-y^{2-\frac{m}{2}}\varphi_i'(y)+y^{1-\frac{m}{2}}\varphi_i(y)=y^{-\frac{m}{2}}\varphi_i(y).$$

Так как функции $y^{-\frac{m}{2}}\varphi_i(y)$, $\xi^{\frac{m}{2}}\varphi_i''(\xi)$ непрерывны на отрезке $[0,1]$, то по теореме Гильберта-Шмидта функция $y^{-\frac{m}{2}}\varphi_i(y)$ разлагается в регулярно сходящийся ряд по собственным функциям $y^{-\frac{m}{2}}Y_k(y)$ ядра $F(y,\xi)$, т.е.

$$y^{-\frac{m}{2}}\varphi(y)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k y^{-\frac{m}{2}}Y_k(y),$$

где

$$c_k=\int_0^1 y^{-m}\varphi(y)Y_k(y)dy .$$

Разделив на $y^{-\frac{m}{2}}$, окончательно получим

$$\varphi(y)=\sum_{k=1}^{\infty}c_kY_k(y) .$$

Относительно переменной x получим краевую задачу

$$\begin{cases} X_k''' + \nu_k^3 X_k = -\left(a_1(x) X_k' + a_0(x) X_k\right), \\ X_k(0) = \varphi_{1k}, X_k(1) = \varphi_{2k}, X_k'(1) = \varphi_{3k}, \end{cases} \tag{6}$$

где

$$\varphi_{ik} = \int_0^1 \varphi_i(y) Y_k(y) y^{-m} dy,\ i = 1,2,3,\ \nu_k{}^3 = \lambda_k, \nu_k = O\left(k^{\frac{2}{3}}\right).$$

Обнулим краевые условия в задаче (6), для этого введем новую функцию $Z(x)$ по формуле:

$$Z(x) = X(x) - x(x-1)\varphi_{3k} - x(2-x)\varphi_{2k} - (x-1)^2 \varphi_{1k},$$

тогда получим краевую задачу в виде

$$\begin{cases} Z_k''' + \nu_k^3 Z_k = f(x) - \left(a_1(x) Z_k' + a_0(x) Z_k\right), \\ Z_k(0) = Z_k(1) = Z_k'(1) = 0, \end{cases} \tag{7}$$

где

$$f(x) = -\left(\nu_k^3 + a_0(x)\right)\left(x(x-1)\varphi_{3k} + x(2-x)\varphi_{2k} + (x-1)^2 \varphi_{1k}\right) -$$
$$-a_1(x)\left((2x-1)\varphi_{3k} + (2-2x)\varphi_{2k} + (2x-2)\varphi_{1k}\right).$$

Сведем задачу (7) к интегральному уравнению, которую в дальнейшем решим методом последовательных приближений. Функция Грина $G_k(x,\xi)$ задачи (7) имеет вид [2]:

$$G_k(x,\xi) = \frac{1}{\Delta}\left\{ 2e^{-\nu_k\left(\frac{3}{2}+x-\xi\right)} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\nu_k + \frac{\pi}{6}\right) - 2e^{-\frac{\nu_k}{2}(2x+\xi)} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\nu_k \xi + \frac{\pi}{6}\right) - \right.$$
$$-2e^{-\nu_k\left(\frac{3}{2}-\xi-\frac{x}{2}\right)} \sin\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\nu_k(1-x) + \frac{\pi}{6}\right] + 2e^{-\frac{\nu_k}{2}(\xi-x)} \sin\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\nu_k(\xi-x) + \frac{\pi}{6}\right] + \tag{8}$$
$$\left. +4e^{-\frac{\nu_k}{2}(3+\xi-x)} \sin\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\nu_k(1-\xi)\right] \sin\frac{\sqrt{3}}{2}\nu_k x \right\}, \quad 0 \le x \le \xi,$$

$$G_k(x,\xi) = \frac{1}{\Delta}\left\{ -2e^{-\frac{\nu_k}{2}(2x+\xi)} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\nu_k \xi + \frac{\pi}{6}\right) - 2e^{-\nu_k\left(\frac{3}{2}p-\xi-\frac{x}{2}\right)} \sin\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\nu_k(1-x) + \frac{\pi}{6}\right] + \right.$$
$$\left. +e^{-\nu_k(x-\xi)} + 4e^{-\frac{\nu_k}{2}(3+\xi-x)} \sin\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\nu_k(1-x) + \frac{\pi}{6}\right] \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\nu_k \xi + \frac{\pi}{6}\right) \right\}, \quad \xi \le x \le 1, \tag{9}$$

где

$$\Delta = 3\nu_k^2\left(1 - 2e^{-\frac{3}{2}\nu_k} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\nu_k + \frac{\pi}{6}\right)\right). \tag{10}$$

Из представлений (8),(9) и (10) имеем

$$\left|G_k(x,\xi)\right| \le \frac{M_0}{\nu_k^2}, M_0 > 0 \text{ – некоторое число},$$

а для производных справедливы соотношения

$$\left|\frac{\partial^s G_k(x,\xi)}{\partial t^s}\right| \le M_s \nu_k^{s-2}, s = 1,2,3,4, M_s > 0 \text{ – некоторые числа, } t = x \text{, либо } t = \xi$$

Задача (6) эквивалентна интегральному уравнению вида:

$$Z_k(x) = \int_0^1 f(\xi) G_k(x,\xi) d\xi - \int_0^1 \left(a_1(\xi) Z_k'(\xi) + a_0(\xi) Z_k(\xi)\right) G_k(x,\xi) d\xi =$$

$$=F(x)+\int\limits_0^1\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\left(a_1(\xi)G_k(x,\xi)\right)-a_0(\xi)G_k(x,\xi)\right)Z_k(\xi)d\xi,$$

где

$$F(x)=\int\limits_0^1 f(\xi)G_k(x,\xi)d\xi.$$

Будем решать полученное уравнение методом последовательных приближений

$$Z_k^0(x)=F(x),\quad Z_k^{n+1}=F(x)+\int\limits_0^1\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\left(a_1(\xi)G_k(x,\xi)\right)-a_0(\xi)G_k(x,\xi)\right)Z_k^n(\xi)d\xi\ ,$$

Если учесть ограниченность функций $a_0(x),a_1(x),a_1'(x)$, оценки для функции Грина, то начиная с некоторого номера k, будем иметь

$$\left|Z_k^{n+1}\right|\le K_1\left|F(x)\right|\left(1+\left|\frac{\partial G_k(x,\xi)}{\partial\xi}\right|+\left|\frac{\partial G_k(x,\xi)}{\partial\xi}\right|^2+\ldots+\left|\frac{\partial G_k(x,\xi)}{\partial\xi}\right|^n\right),$$

отсюда

$$\left|Z_k(x)\right|\le K_1\left|F(x)\right|\frac{1}{1-\left|\frac{\partial G_k(x,\xi)}{\partial\xi}\right|}\le M_0\left|F(x)\right|\le N_0\left(\left|\varphi_{1k}\right|+\left|\varphi_{2k}\right|+\left|\varphi_{3k}\right|\right),$$

где K_1,M_0,N_0 – некоторая положительная постоянная.

Аналогично можно показать выполнение следующих неравенств:

$$\left|Z_k'(x)\right|\le M_1\nu_k\left|F(x)\right|,\ \left|Z_k''(x)\right|\le M_2\nu_k^2\left|F(x)\right|,$$

$$\left|Z_k'''(x)\right|\le M_3\nu_k^3\left|F(x)\right|=M_3\lambda_k\left|F(x)\right|\le N_3\lambda_k\left(\left|\varphi_{1k}\right|+\left|\varphi_{2k}\right|+\left|\varphi_{3k}\right|\right),$$

где M_1,M_2,M_3,N_3 – некоторые положительные постоянные, не зависящие от номера k.

Формальным решением поставленной задачи будет ряд

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}Y_k(y)X_k(x). \tag{11}$$

Чтобы этот ряд был классическим решением поставленной задачи А, нужно показать возможность почленного дифференцирования ряда (11) по переменной x до третьего и по переменной y до второго порядков (именно эти порядки входят в уравнение). Из вышеуказанного имеем

$$\left|u(x,y)\right|\le M\sum_{k=0}^{\infty}\left|Y_k(y)\right|\left(\left|\varphi_{1k}\right|+\left|\varphi_{2k}\right|+\left|\varphi_{3k}\right|\right),$$

где M – некоторая положительная постоянная.

Покажем сходимость рядов участвующих в правой части этого неравенства. Применяя неравенство Коши–Буняковского, получим

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|Y_k(y)\right|\left|\varphi_{1k}\right|=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left|Y_k(y)\right|}{\lambda_k}\lambda_k\left|\varphi_{ik}\right|\le\sqrt{\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\left|Y_k(y)\right|}{\lambda_k}\right)^2}\sqrt{\sum_{k=0}^{\infty}\left(\lambda_k\left|\varphi_{ik}\right|\right)^2},i=1,2,3. \tag{12}$$

Покажем теперь сходимость каждого ряда в неравенстве (12). Имеем

$$\varphi_{ik}=\int\limits_0^1 y^{-m}\varphi_i(y)Y_k(y)dy=-\frac{1}{\lambda_\kappa}\int\limits_0^1\varphi_i(y)Y_k''(y)dy,\ k\in N,\ i=1,2,3,$$

отсюда

$$\lambda_k\varphi_{ik}=\int\limits_0^1\left(-\varphi_i''(y)y^m\right)y^{-m}Y_k(y)dy,\ k\in N,\ i=1,2,3,$$

применим здесь неравенство Бесселя

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(\varphi_{ik}\lambda_k)^2 \le \left\|\varphi_i''(y)y^m\right\|^2 = \int_0^1\left(\varphi_i''(y)\right)^2 y^m dy,\ i=1,2,3, \tag{13}$$

интеграл в неравенстве (13) существует и, значит, ряд сходится.

Теперь вернемся к задаче (3), которая эквивалентна интегральному уравнению

$$Y_k(y)=\lambda_k\int_0^1 G(y,\xi)\xi^{-m}Y_k(\xi)d\xi,$$

отсюда

$$\frac{Y_k(y)}{\lambda_k}=\int_0^1 G(y,\xi)\xi^{-m}Y_k(\xi)d\xi,$$

по неравенству Бесселя, имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{Y_k(y)}{\lambda_k}\right)^2 \le \int_0^1 G^2(y,\xi)\xi^{-m}d\xi.$$

оценим последний интеграл:

$$\int_0^1 G^2(y,\xi)\xi^{-m}d\xi=\int_0^y \xi^{2-m}(1-y)^2d\xi+\int_y^1 y^2(1-\xi)^2\xi^{-m}d\xi \le \frac{1}{3-m}+2\left(\frac{1}{1-m}+\frac{2}{2-m}+\frac{1}{3-m}\right)=N.$$

Следовательно, ряд $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{Y_k(y)}{\lambda_k}\right)^2$ сходится и равномерно ограничен. Покажем теперь равномерную сходимость ряда (11)

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p}Y_k(y)X_k(x)\right| \le M\sum_{k=n}^{n+p}\left|\frac{Y_k(y)}{\lambda_k}\right|\lambda_k\left(|\varphi_{1k}|+|\varphi_{2k}|+|\varphi_{3k}|\right)\le$$

$$\le M\sqrt{\sum_{k=n}^{n+p}\left(\frac{|Y_k(y)|}{\lambda_k}\right)^2}\left(\sqrt{\sum_{k=n}^{n+p}\left(\lambda_k|\varphi_{1k}|\right)^2}+\sqrt{\sum_{k=n}^{n+p}\left(\lambda_k|\varphi_{2k}|\right)^2}+\sqrt{\sum_{k=n}^{n+p}\left(\lambda_k|\varphi_{3k}|\right)^2}\right)\le$$

$$\le MN\left(\sqrt{\sum_{k=n}^{n+p}\left(\lambda_k|\varphi_{1k}|\right)^2}+\sqrt{\sum_{k=n}^{n+p}\left(\lambda_k|\varphi_{2k}|\right)^2}+\sqrt{\sum_{k=n}^{n+p}\left(\lambda_k|\varphi_{3k}|\right)^2}\right).$$

Учитывая (13) имеем, что для любого $p>0$ суммы, стоящие в правой части, стремятся к нулю при $n\to+\infty$. Принимая во внимание, что правая часть не зависит от переменных (x,y), мы можем утверждать, что ряд (11) сходится равномерно в квадрате $[0,1]\times[0,1]$.

Аналогично доказывается возможность почленного дифференцирования бесконечного ряда (11) по переменным x до третьего и по y до второго порядка (т.к. в исходное уравнение входят частные производные этих порядков).

Литература

1. Келдыш, М.В. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области / М.В. Келдыш // Докл. АН СССР. – 1951. – Т. 77, № 2. – С. 181–183.

2. Апаков, Ю.П. О решении краевой задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками / Ю.П. Апаков // Украинский матем. журнал. – 2012. – Т. 64, № 1. – С. 3–13.

3. Диесперов, В.Н. О функции Грина линеаризованного вязкого трансзвукового уравнения / В.Н. Диесперов // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. – 1972. – Т. 12, № 5. – С. 1265–1269.

4. Диесперов В.Н. Об одной краевой задаче для линеаризованного осесимметрического ВТ-уравнения / В.Н. Диесперов, Л.А. Ломакин // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. – 1974. – Т. 14, № 5. – С. 1244–1260.

5. Засорин, Ю.В. Точные решения сингулярных уравнений вязких трансзвуковых течений / Ю.В. Засорин // Доклады АН СССР. – 1984. – Т. 287, № 6. – С. 1347–1351.

6. Апаков, Ю.П. Краевая задача для вырождающегося уравнения высокого нечетного порядка / Ю.П. Апаков, Б.Ю. Иргашев // Укр.мат.журн. – 2014. – Т. 66, № 10. – С. 1318–1331.

7. Градштейн, Н.С. Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений / Н.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.

8. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М.: Наука, 1974. – 296 с.

9. Владимиров, В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. – М.: Наука, 1981. – 512 с.

Поступила в редакцию 22 декабря 2015 г.

DOI: 10.14529/mmph160204

BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A THIRD-ORDER DEGENERATE EQUATION

B.Yu. Irgashev
Namangan Engineering Pedagogical Institute, Namangan, Uzbekistan
E-mail: bahrom_irgashev@inbox.ru

The article deals with a boundary value problem in a rectangular area for a third-order degenerate equation with minor terms.

The study of such equations is caused by both a theoretical and applied interest (known as VT (viscous transonic) – the equation can be found in gas dynamics).

Imposing some restrictions on the coefficients of lower derivatives and using the method of energy integrals, the unique solvability of the problem is demonstrated. The solution of the problem is sought by separation of variables (Fourier method), thus two one-dimensional boundary value problems for ordinary differential equations are obtained.

According to the variable y we have the problem on eigenvalues and eigenfunctions for a second-order degenerate equation. The eigenvalues and eigenfunctions are found. Eigenfunctions are the first-order Bessel functions. In order to obtain some necessary estimates the spectral problem reduces to an integral equation by constructing the Green's function. Hereafter, Bessel inequality is used. The possibility of expansion of boundary functions in the system of eigenfunctions is also shown.

In order to obtain the necessary a priori estimates for the solution of one-dimensional boundary value problem with respect to the variable x and its derivatives, the problem reduces to a second-order Fredholm integral equation, with the help of Green's function. The estimates of Green's function and its derivatives are obtained. Fredholm equation is solved by the method of successive approximations, and the necessary estimates for this solution and its derivatives are obtained.

The formal solution of the boundary value problem is obtained in the form of an infinite series in eigenfunctions. In order to prove the uniform convergence of the last series composed of the partial derivatives, first using the Cauchy–Bunyakovsky inequality, the series consisting of two variables is decomposed into two one-dimensional series, and then all of the obtained estimates mentioned above and estimates for the Fourier coefficients are used.

Keywords: degenerate equations; energy integrals; Fourier method; Green's function; Bessel function; Bessel's inequality; eigenfunction expansion.

References

1. Keldysh M.V. *Dokl. AN SSSR*, 1951, Vol. 77, no. 2, pp. 181–183. (in Russ.).

2. Apakov Yu. P. On the solution of a boundary-value problem for a third-order equation with multiple characteristics. *Ukrainian Mathematical Journal,* 2012, Vol. 64, no. 1, pp. 3–13. (in Russ.). DOI: 10.1007/s11253-012-0625-1

3. Diesperov V.N. On Green's function of the linearized viscous transonic equation. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1972, Vol. 12, no. 5, pp. 225–241. DOI: 10.1016/0041-5553(72)90013-4

4. Diesperov V.N., Lomakin L.A. A boundary value problem for a linearized axisymmetric viscous transonic equation. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1974, Vol. 14, Issue 5, pp. 148–163. DOI: 10.1016/0041-5553(74)90202-X

5. Zasorin Yu.V. Doklady AN SSSR, 1984, Vol. 287, no. 6, pp. 1347–1351. (in Russ).

6. Apakov Yu.P., Irgashev B.Yu. Boundary-Value Problem for a Degenerate High-Odd-Order Equation. *Ukrainian Mathematical Journal,* 2015, Vol. 66, Issue 10, pp. 1475–1490. DOI: 10.1007/s11253-015-1039-7

7. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. *Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedeniy* [Table of integrals, sums, series and compositions]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1962, 1100 p. (in Russ.).

8. Beytmen G., Erdeyi A. *Vysshie transtsendentnye funktsii. Funktsii Besselya, funktsii parabolicheskogo tsilindra, ortogonal'nye mnogochleny*. Moscow, Nauka Publ., 1974, 296 pp. (in Russ.). [Bateman H., Erdelyi A. *Higher Transcendental Functions. Vol. 2*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1953. (in Eng.).]

9. Vladimirov V.S. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1981, 512 pp. (in Russ.).

Received December 22, 2015