УДК 517.5 DOI: 10.14529/mmph160205

ВЫЧИСЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРИИ РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ РЯДОВ

С.И. Кадченко, О.А. Торшина
Магнитогорский государственный технический университет, г. Магнитогорск, Российская Федерация
E-mail: kadchenko@masu.ru

Изучение спектральных свойств возмущенных дифференциальных операторов является одной из важных задач спектральной теории. Для решения этой задачи нужно определить асимптотику спектра. Но при изучении асимптотики улучшение остаточного члена зачастую оказывается невозможным, более того, невозможно даже выделение из него второго члена асимптотики. Как следствие возникает необходимость перейти к исследованию более глубокой структуры спектра. Стандартным средством исследования стало получение формул регуляризованных следов. В работе с помощью теории регуляризованных рядов осуществляется вычисление четырех поправок теории возмущений с последующим выходом на собственные числа эллиптических дифференциальных операторов с потенциалом на проективной плоскости. Проективная плоскость при этом отождествляется со сферой за счет сопоставления противоположных точек и выкалывания полюсов.

Ключевые слова: дифференциальные операторы; спектральная теория; регуляризованные следы; теория возмущений; собственные числа.

Рассмотрим на проективной плоскости F дифференциальный оператор

$$T=-\Delta=-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right),$$

действующий в гильбертовом пространстве H. Собственные числа оператора Лапласа–Бельтрами образуют систему ортонормированных сферических функций. Обозначим $\lambda_n=n(n+1)$ $\left(n=\overline{0,\infty}\right)$ – собственные числа, $\nu_n=2n+1$ – кратность собственного числа λ_n оператора T; $v_{n,i}$ $\left(i=\overline{0,2n}\right)$ – собственные функции, $l_n=\{\lambda\,|\,\lambda=\lambda_n+n+1+ip,\ -\infty<p<+\infty\}$ – прямые на комплексной плоскости, $\mu_{n,i}$ – собственные числа оператора $T+P$

$$\left|\mu_{n,i}-n(n+1)\right|\le\text{const}\,.$$

Определим собственные числа дифференциального оператора с помощью теории регуляризованных рядов. Рассмотрим четырех поправки теории возмущений.

Первая поправка теории возмущений [1]

$$\sum_{i=1}^{2n}\left(P\upsilon_{ni},\upsilon_{ni}\right)=\frac{2m+1}{4\pi}\iint_F p(\theta,\varphi)\sin\theta d\varphi d\theta=0.$$

Вторая поправка теории возмущений $\alpha_n(p)$ к сумме $\sum_{i=0}^{2n}\mu_{n,i}$ представляется формулой [3]:

$$\alpha_n(p)=-\frac{1}{2\pi i}Sp\left\{\left[\int_{i_n}-\int_{l_{n-1}}\right]\lambda\left[(T-\lambda E)^{-1}P^2\right](T-\lambda E)^{-1}d\lambda\right\}=\sum_{k=1,k\ne n}^{\infty}\frac{\alpha_{k,n}}{\left|\lambda_k-\lambda_n\right|},$$

$$\alpha_{n,k}=\sum_{i=0}^{2k}\sum_{j=0}^{2n}\left(P\upsilon_{ki},\upsilon'_{nj}\right)\left(P\upsilon_{nj},\upsilon'_{ki}\right).$$

Вычислим вторую поправку теории возмущений. Для этого введем так называемое Λ преобразование $f(\alpha)$ функции $p(\theta,\varphi)$ [2]. Обозначим $T(\alpha)$ – пересечение конуса со сферой, $\phi(\theta,\theta',\alpha)$ – якобиан перехода $\theta,\varphi,\theta',\varphi'$ к координатам $\theta,\varphi,\theta',\alpha$.

$$\phi(\theta,\theta',\alpha)=\pm\frac{\sin\alpha}{\sqrt{\left(-\cos\alpha+\cos(\theta-\theta')\right)\left(\cos\alpha-\cos(\theta+\theta')\right)}}$$

При этом знак «плюс» берется, если $\varphi'<\varphi$, знак «минус», если $\varphi'>\varphi$. Тогда [4]

$$f(\alpha)=\iint_F p(\theta,\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi\iint_{T(\alpha)} p(\theta',\varphi')\sin\theta'\frac{\phi(\theta,\theta',\alpha)d\theta'}{\sin\alpha}.$$

$$\alpha_{k,n}=\frac{(2k+1)(2n+1)}{4\pi^2}\int_0^\pi f(\alpha)\sum_{i=1}^2 L_i\left(P_{2k}(\cos\alpha)\right)\sum_{i=1}^2 L_i\left(P_{2n}(\cos\alpha)\right)\sin\alpha d\alpha.$$

Очевидно, что функция $f(\alpha)$ нечетная, то есть $f(\alpha)=-f(\pi-\alpha),\ 0\le\alpha\le\pi$. Докажем, что $f(0)=f(\pi)=0$. Для этого введем функцию [6]

$$\zeta(\alpha)=\begin{cases}(\sin\alpha)^{-2}, & 0<\alpha\le\dfrac{\pi}{2}\\ -(\sin\alpha)^{-2}, & \dfrac{\pi}{2}<\alpha\le\pi.\end{cases}$$

Если $f(0)=f(\pi)\ne0$, то $\int_0^\pi f(\alpha)\varsigma(\alpha)\sin\alpha d\alpha=\infty$. С другой стороны [5]

$$\left|\int_0^\pi f(\alpha)\varsigma(\alpha)\sin\alpha d\alpha\right|\le$$

$$\le\left|\iint_F\iint_F\frac{p(\theta,\varphi)p(\theta',\varphi')\sin\theta\sin\theta' d\theta d\theta' d\varphi d\varphi'}{\sin\alpha}\right|\le$$

$$\le\mathrm{const}\iint_F\iint_F\frac{d\theta d\theta' d\varphi d\varphi'}{\sin\alpha}\le\mathrm{const}\iint_F\iint_F\frac{\phi(\theta,\theta',\alpha)d\theta d\theta' d\varphi d\alpha}{\sin\alpha}=$$

$$=\mathrm{const}\iint_F\iint_F\frac{d\theta d\theta' d\varphi d\alpha}{\sqrt{\left(-\cos\alpha+\cos(\theta-\theta')\right)\left(\cos\alpha-\cos(\theta+\theta')\right)}}<\infty.$$

В результате, $f(0)=f(\pi)=0$. Докажем, что функция $f(\alpha)$ почти всюду дважды дифференцируема и $f''(\alpha)\in L_1[0,\pi]$. Запишем равенство [8]

$$\int_0^\pi f(\alpha)\varsigma(\alpha)d\alpha=\pm\iint_F\iint_F p(\theta,\varphi)p(\theta',\varphi')\varsigma(\alpha)\sin\theta\sin\theta'\times$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{\left(-\cos\alpha+\cos(\theta-\theta')\right)\left(\cos\alpha-\cos(\theta+\theta')\right)}}d\theta d\varphi d\theta' d\alpha.$$

Далее имеем [7]

$$\int_0^\pi f(\alpha)\varsigma'(\alpha)d\alpha=\pm\iint_F\iint_F p(\theta,\varphi)p(\theta',\varphi')\varsigma'(\alpha)\sin\theta\sin\theta'\times$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{\left(-\cos\alpha+\cos(\theta-\theta')\right)\left(\cos\alpha-\cos(\theta+\theta')\right)}}d\theta d\varphi d\theta' d\alpha=$$

$$=\pm\iint_F\iint_F\frac{\partial}{\partial\varphi'}\left\{p(\theta,\varphi)p(\theta',\varphi')\right\}\frac{\partial\varphi'}{\partial\alpha}\varsigma(\alpha)\sin\theta\sin\theta'\times$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{\left(-\cos\alpha+\cos\left(\theta-\theta'\right)\right)\left(\cos\alpha-\cos\left(\theta+\theta'\right)\right)}}d\theta d\varphi d\theta' d\alpha=$$

$$=\iint\limits_F\iint\limits_F p(\theta,\varphi)\,p'_{\varphi'}(\theta',\varphi')\varsigma(\alpha)\sin\theta\sin\theta'\times$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{\left(-\cos\alpha+\cos\left(\theta-\theta'\right)\right)\left(\cos\alpha-\cos\left(\theta+\theta'\right)\right)}}d\theta d\varphi d\theta' d\alpha\pm$$

$$\pm\frac{1}{2}\iint\limits_F\iint\limits_F p(\theta,\varphi)\,p'(\theta',\varphi')\frac{\sin\alpha\varsigma(\alpha)}{\left(-\cos\alpha+\cos\left(\theta-\theta'\right)\right)^{3/2}}\frac{1}{\left(\cos\alpha-\cos\left(\theta+\theta'\right)\right)^{1/2}}\sin\theta\sin\theta' d\theta d\varphi d\theta' d\alpha\pm$$

$$\pm\frac{1}{2}\iint\limits_F\iint\limits_F p(\theta,\varphi)\,p(\theta',\varphi')\frac{\sin\alpha\varsigma(\alpha)}{\left(-\cos\alpha+\cos\left(\theta-\theta'\right)\right)^{1/2}}\frac{1}{\left(\cos\alpha-\cos\left(\theta+\theta'\right)\right)^{3/2}}\sin\theta\sin\theta' d\theta d\varphi d\theta' d\alpha$$

Произведем замены: в первом интеграле $\theta-\theta'=\alpha ch\phi,\ \theta+\theta'=\alpha ch\phi'$, а во втором $\theta-\theta'=\alpha ch\phi,\ \theta+\theta'=\alpha\,\mathrm{sh}\,\phi\,\mathrm{ch}\,\phi'$, в третьем интеграле $\theta-\theta'=\alpha ch\phi,\ \theta+\theta'=\alpha\,\mathrm{sh}\,\phi\,\mathrm{ch}\,\phi'$. В результате по формуле Фубини получим $f'(\alpha)\in L_1[0,\pi]$, где производная взята в смысле С. Л. Соболева [9].

Далее

$$\int\limits_0^\pi f(\alpha)\varsigma''(\alpha)d\alpha=\iint\limits_F\iint\limits_F p(\theta,\varphi)\,p'_{\varphi'}(\theta',\varphi')\times$$

$$\times\frac{\sin\alpha}{\left(-\cos\alpha+\cos\left(\theta-\theta'\right)\right)\left(\cos\alpha-\cos\left(\theta+\theta'\right)\right)}\varsigma'(\alpha)\varsigma(\alpha)\sin\theta\sin\theta' d\theta d\varphi d\theta' d\alpha+$$

$$\pm\frac{1}{2}\iint\limits_F\iint\limits_F p(\theta,\varphi)\,p(\theta',\varphi')\frac{\sin\alpha\varsigma'(\alpha)\varsigma(\alpha)}{\left(-\cos\alpha+\cos\left(\theta-\theta'\right)\right)^{3/2}}\frac{1}{\left(\cos\alpha-\cos\left(\theta+\theta'\right)\right)^{1/2}}\sin\theta\sin\theta' d\theta d\varphi d\theta' d\alpha\pm$$

$$\pm\frac{1}{2}\iint\limits_F\iint\limits_F p(\theta,\varphi)\,p(\theta',\varphi')\frac{\sin\alpha\varsigma'(\alpha)\varsigma(\alpha)}{\left(-\cos\alpha+\cos\left(\theta-\theta'\right)\right)^{1/2}}\frac{1}{\left(\cos\alpha-\cos\left(\theta+\theta'\right)\right)^{3/2}}\sin\theta\sin\theta' d\theta d\varphi d\theta' d\alpha.$$

По аналогии в формуле для $f''(\alpha)$ получим

$$\frac{\cos\alpha}{\left(-\cos\alpha+\cos\left(\theta-\theta'\right)\right)^{1/2}\left(\cos\alpha-\cos\left(\theta+\theta'\right)\right)^{3/2}},\ \frac{\sin^2\alpha}{\left(-\cos\alpha+\cos\left(\theta-\theta'\right)\right)^{1/2}\left(\cos\alpha-\cos\left(\theta+\theta'\right)\right)^{5/2}}.$$

Сделаем замены $\theta+\theta'=\alpha ch\phi,\ \theta-\theta'=\alpha^4\,\mathrm{sh}\,\phi ch\phi',\quad -\theta+\theta'=2\alpha ch\phi,\ \theta-\theta'=\alpha^3\,\mathrm{sh}^3\,\phi\,\mathrm{ch}\,\phi'$. Воспользовавшись теоремой Фубини, получим, что $f''(\alpha)\in L_1[0,\pi]$ и существует почти всюду [11].

Вычислим [10]

$$L_1\left(P_{2n}(\cos\alpha)\right)+L_2\left(P_{2n}(\cos\alpha)\right)=\sum_{m=0}^{2n}\left(\left|\sin\frac{\pi m}{2}\right|+\left|\cos\frac{\pi m}{2}\right|\right)\times$$

$$\times\prod_{k=0,k\neq m}^{2n}\frac{-\dfrac{d^2}{d\varphi^2}-k^2}{m^2-k^2}P_{2n}(\cos\alpha)=\sum_{m=1}^{2n}\prod_{k=0,k\neq m}^{2n}\frac{-\dfrac{d^2}{d\varphi^2}-k^2}{m^2-k^2}P_k(\cos\alpha)=$$

$$=\sum_{m=1}^{2n}\prod_{k=0,k\neq m}^{2n}\frac{-\dfrac{d^2}{d\varphi^2}-k^2}{m^2-k^2}2\sum_{s=0}^{2n}\frac{(n-s)!}{\delta_s(n+s)!}P_{2n}^{(s)}(\cos\theta')P_{2n}^{(s)}(\cos\theta)\cos s(\varphi-\varphi')=$$

$$=2\sum_{s=0}^{2n}\frac{(n-s)!}{\delta_s(n+s)!}P_{2n}^{(s)}(\cos\theta')P_{2n}^{(s)}(\cos\theta)\cos s(\varphi-\varphi')\sum_{m=1}^{2n}\prod_{k=0,k\neq m}^{2n}\frac{s^2-k^2}{m^2-k^2}=P_{2n}(\cos\alpha).$$

Тогда

$$\alpha_{k,n}=\frac{(2k+1)(2n+1)}{4\pi^2}\int_0^{\pi}f(\alpha)\sum_{i=1}^{2}L_i\left(P_{2k}(\cos\alpha)\right)\sum_{i=1}^{2}L_i\left(P_{2n}(\cos\alpha)\right)\sin\alpha d\alpha=$$

$$=\frac{(2k+1)(2n+1)}{4\pi^2}\int_0^{\pi}f(\alpha)P_{2k}(\cos\alpha)P_{2n}(\cos\alpha)\sin\alpha d\alpha.$$

В результате вторая поправка теории возмущений

$$\alpha_n(p)=-\frac{(2n+1)}{4\pi^2}\sum_{k=1,k\neq n}^{\infty}\frac{2k+1}{|\lambda_k-\lambda_n|}\int_0^{\pi}f(\alpha)P_{2k}(\cos\alpha)P_{2n}(\cos\alpha)\sin\alpha d\alpha=$$

$$=-\frac{(2n+1)}{4\pi^2}\sum_{k=1,k\neq n}^{\infty}\frac{2k+1}{|\lambda_k-\lambda_n|}\left\{\left[\int_0^{\varepsilon}+\int_{\pi-\varepsilon}^{\pi}\right]f(\alpha)P_{2k}(\cos\alpha)P_{2n}(\cos\alpha)\sin\alpha d\alpha+\right.$$

$$\left.+\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon}f(\alpha)P_{2k}(\cos\alpha)P_{2n}(\cos\alpha)\sin\alpha d\alpha\right\}.$$

Воспользовавшись [5]

$$P_{2k}(\cos\alpha)=\frac{\cos\{(2k+1/2)\alpha-\pi/4\}}{(\sin\alpha)^{1/2}}\left[\frac{(2/\pi)^{1/2}}{2k^{1/2}}+\frac{O(1)}{2k^{3/2}}\right]+$$

$$+\frac{\sin\{(2k+3/2)\alpha-\pi/4\}}{(\sin\alpha)^{3/2}}\frac{O(1)}{2k^{3/2}}+\frac{O(1)}{(\sin\alpha)^{5/2}2k^{5/2}}.$$

Получим:

$$\alpha_n(p)=-\frac{2m+1}{4\pi^2}\sum_{k=1,k\neq n}^{\infty}\frac{2k+1}{|\lambda_k-\lambda_n|}\left\{\left[\int_0^{\varepsilon}+\int_{\pi-\varepsilon}^{\pi}\right]f(\alpha)\sin\alpha P_{2k}(\cos\alpha)P_{2n}(\cos\alpha)d\alpha+\right.$$

$$+\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon}f(\alpha)\sin(\alpha)\left\langle\frac{\cos\{(2k+1)\alpha-\pi/4\}}{(\sin\alpha)^{1/2}}\left[\frac{(2/\pi)^{1/2}}{(2/k)^{1/2}}+\frac{O(1)}{(2/k)^{3/2}}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\sin\{(2k+3/2)\alpha-\pi/4\}}{(\sin\alpha)^{3/2}}\frac{O(1)}{(2k)^{3/2}}+\frac{O(1)}{(\sin\alpha)^{5/2}(2k)^{5/2}}\right\rangle\left\langle\frac{\cos\{(2k+1/2)\alpha-\pi/4\}}{(\sin\alpha)^{1/2}}\left[\frac{(2/\pi)^{1/2}}{(2/k)^{1/2}}+\frac{O(1)}{(2/k)^{3/2}}\right]+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\sin\{(2k+3/2)\alpha-\pi/4\}}{(\sin\alpha)^{3/2}}\frac{O(1)}{(2k)^{3/2}}+\frac{O(1)}{(\sin\alpha)^{5/2}(2k)^{5/2}}\right\rangle d\alpha\right\},$$

где ε – положительное число

$$f(\alpha)=\iint_F p(\theta,\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi\left[\iint_F p(\theta',\varphi')\sin\theta'\frac{\phi(\theta,\theta',\alpha)d\theta'}{\sin\alpha}\right].$$

С учетом асимптотических формул [4] получим

$$\alpha_n(p)=O\left(\varepsilon^2\ln n\right)+O\left(\frac{\varepsilon\ln n}{n}\right)+O\left(\frac{\varepsilon}{n^{3/2}}\right)+O\left(\frac{\varepsilon}{n}\right)+O\left(\frac{\varepsilon\ln n}{n^2}\right)+O\left(\frac{\varepsilon\ln n}{n^2}\right)+$$

$$+O\left(\frac{\varepsilon}{n^2}\right)+O\left(\frac{\varepsilon\ln n}{n^2}\right)-\frac{1}{4\pi^2 n}\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon}f(\alpha)\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)d\alpha+O\left(\frac{\varepsilon\ln n}{n^2}\right)+$$

$$+O\left(\frac{\ln n}{n^{3/2}}\right)+O\left(\frac{\ln\varepsilon\ln n}{n^{3/2}}\right)+O\left(\frac{\ln n}{n^3\varepsilon}\right)++O\left(\frac{\ln n}{n^{3/2}}\right)+O\left(\frac{1}{\varepsilon n^{3/2}}\right)+O\left(\frac{1}{n^3\varepsilon^3}\right).$$

Выбирая в качестве $\varepsilon = \frac{1}{n^{3/4}}$, найдем

$$\alpha_n(p) = \frac{1}{4\pi^2 n} \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} f(\alpha)\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)d\alpha + O\left(\frac{\ln n}{n^{3/2}}\right).$$

Учитывая, что $\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} f(\alpha)\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)d\alpha = 0$, получим

$$\alpha_n(p) = O\left(\frac{\ln n}{n^{3/2}}\right).$$

Вычислим третью поправку теории возмущений

$$\beta_n(p) = \frac{1}{6\pi i} Sp\left[\int_{l_n} - \int_{l_{n-1}}\right]\left[P(T-\lambda E)^{-1}\right]^3 d\lambda = \frac{1}{6\pi i} Sp\left[\int_{l_n} - \int_{l_{n-1}}\right]\sum \frac{(2n+1)(2k+1)(2l+1)}{(\lambda_n-\lambda)(\lambda_k-\lambda)(\lambda_l-\lambda)} d\lambda \times$$

$$\times\left(\frac{1}{4\pi}\right)^3 \iint_F \iint_F \iint_F p(\theta,\varphi)p(\theta',\varphi')p(\theta'',\varphi'')P_n(\cos\alpha)P_n(\cos\beta)P_n(\cos\gamma)\times$$

$$\times \sin\theta\sin\theta'\sin\theta'' d\varphi d\varphi' d\varphi'' d\theta' d\theta'',\ \cos\alpha = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi'),$$

$$\cos\beta = \cos\theta'\cos\theta'' + \sin\theta'\sin\theta''\cos(\varphi'-\varphi''),\ \cos\gamma = \cos\theta\cos\theta'' + \sin\theta\sin\theta''\cos(\varphi-\varphi'').$$

Если в шестикратном интеграле сделать замену $\varphi \to \pi+\varphi,\ \ \theta \to \pi-\theta,$ то

$$P_n(\cos(\pi-\alpha)) = P_n(-\cos\alpha) = (-1)^n P_n(\cos\alpha),\ P_l(\cos(\pi-\gamma)) = P_l(-\cos\gamma) = (-1)^l P_l(\cos\gamma).$$

В результате

$$\beta_n(p) = 0.$$

Для оценки четвертой поправки докажем теорему.

Теорема 1. *Для оператора Лапласа–Бельтрами с дважды непрерывно дифференцируемым потенциалом на* $l_n = \{\lambda \mid \lambda = \lambda_n + n + 1 + ip,\ \ -\infty < p < \infty\}$ *справедливо равенство*

$$\left\|(T-\lambda E)^{-1}\right\|_2^2 \le \frac{O(1)}{|e|+n},$$

где $\lambda \in l_n$ *и* $e = \operatorname{Im}(\lambda)$

Доказательство. Имеем

$$\left\|(T-\lambda E)^{-1}\right\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{v_k}{(\lambda_k-\lambda_n-n-1)^2+e^2} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{v_k}{(\lambda_k-\lambda_n-n-1)^2+e^2} + \frac{v_k}{(n+1)^2+e^2} +$$

$$+\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{v_k}{(\lambda_k-\lambda_n-n-1)^2+e^2} = A_1 + A_2 + A_3.$$

Оценим каждое из слагаемых в отдельности

$$A_1 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{v_k}{(\lambda_k-\lambda_n-n-1)^2+e^2} =$$

$$= \mathrm{const} \int_0^{n-1} \frac{(2k+1)dk}{(k(k+1)-n(n+1)-n-1)^2+e^2} =$$

$$= \mathrm{const} \int_0^{n-1} \frac{(2k+1)dk}{\left((n+1)^2-k(k+1)\right)^2+e^2} =$$

$$=\mathrm{const}\int\limits_{0}^{n(n-1)}\frac{dm}{\left((n+1)^2-m\right)^2+e^2}\le\frac{O(1)}{|e|+n}.$$

Оценим

$$A_2=\frac{v_k}{(n+1)^2+e^2}=\frac{2n+1}{(n+1)^2+e^2}\le\frac{O(1)n}{(n+|e|)^2}=\frac{O(1)}{|e|+n}.$$

Здесь была использована эквивалентность норм $|a|+|b|$ и $\sqrt{|a|^2+|b|^2}$.

Далее

$$A_3=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{v_k}{(\lambda_k-\lambda_n-n-1)^2+e^2}=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{2k+1}{\left[(n+1)^2-k(k+1)\right]^2+e^2}.$$

Оценивая A_3 аналогично A_1, получим

$$A_3\le\frac{O(1)}{|e|+n}.$$

Теорема доказана.

Учитывая результаты теоремы 1, рассмотрим четвертую поправку теории возмущений.

$$\left|-\frac{1}{2\pi i}Sp\left[\int\limits_{l_n}-\int\limits_{l_{n-1}}\right]\left(P(T-\lambda E)^{-1}\right)^4 d\lambda\right|\le$$

$$\le O(1)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\|(T-\lambda E)^{-1}\right\|_2^2\left\|(T-\lambda E)^{-1}\right\|^2 d\lambda\le O(1)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi}{\left(|\xi|+n\right)^3}=O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Теорема 2. *Пусть p – потенциал, удовлетворяющий условию Липшица, тогда для собственных чисел оператора $T+P$ верна оценка*

$$\sum_{i=0}^{2n}\mu_{n,i}-n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{4\pi^2 n}\int\limits_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon}f(\alpha)\operatorname{ctg}\alpha(\pi-\alpha)\,d\alpha=O\left(\frac{\ln n}{n^{3/2}}\right).$$

Интерес к подобного рода задачам все время возрастает в связи с широкой областью их применения [12–14].

Литература

1. Дубровский, В.В. Проблема решения задач на собственные значения для дифференциальных операторов со сложным вхождением спектрального параметра / В.В. Дубровский, О.А. Торшина // Новые математические методы. Электромагнитные волны и электронные системы. – 2002. – Т. 7, no. 9. – С. 4–10.

2. Дубровский, В.В. Формула первого регуляризованного следа для дифференциального оператора Лапласа–Бельтрами / В.В. Дубровский, О.А. Торшина // Дифференциальные уравнения и их приложения. – 2002. – № 1. – С. 9–19.

3. Торшина, О.А. Алгоритм вычисления регуляризованного следа оператора Лапласа – Бельтрами с потенциалом на проективной плоскости / О.А. Торшина // Вестник МаГУ. Математика. – 2003. – Вып. 4. – С. 183–215.

4. Торшина, О.А. Следы дискретных операторов с частными производными / О.А. Торшина // Альманах современной науки и образования. Научно-теоретический тематический журнал. – 2012. – № 4(59). – С. 220–222.

5. Торшина, О.А. Формула первого регуляризованного следа Лапласа–Бохнера с потенциалом на проективной плоскости / О.А. Торшина // Воронежская зимняя математическая школа. – 2004. – С. 104–105.

6. Торшина, О.А. Формула первого регуляризованного следа оператора Лапласа–Бельтрами с негладким потенциалом на проективной плоскости / О.А. Торшина // Вестник Самарского государственного технического университета. Математика. – 2006. – С. 32–40.

7. Торшина, О.А. Формула регуляризованного следа дифференциального оператора со сложным вхождением спектрального параметра / О.А. Торшина // Общие проблемы управления и их приложения. – 2003. – С. 467–468.

8. Торшина, О.А. Численный метод вычисления поправок теории возмущений / О.А. Торшина // Альманах современной науки и образования. – 2013. – № 12. – С. 168–170.

9. A new method for approximate evaluation of the first eigenvalues in the spectral problem of hydrodynamic stability of poiseuille flow in a circular pipe / V.V. Dubrovskii, S.I. Kadchenko, V.F. Kravchenko, V.A. Sadovnichii // Doklady Mathematics. – 2001. – Т. 64, № 2. – С. 165–168.

10. A new method for the evaluation of the first eigenvalues in the spectral problem of hydrodynamic stability of viscous fluid flow between two rotating cylinders / V.V. Dubrovskii, S.I. Kadchenko, V.F. Kravchenko, V.A. Sadovnichii // Doklady Mathematics. – 2001. – Т. 64, № 3. – С. 425–429.

11. A new metod for approximate evaluation of the first eigenvalues in the Orr–Sommerfelg eigenvalue problem / V.V. Dubrovskii, S.I. Kadchenko, V.F. Kravchenko, V.A. Sadovnichii // Doklady Mathematics. – 2001. – Т. 63, № 3. – С. 355–358.

12. Computation of the first eigenvalues of a discrete operator / V.V. Dubrovskii, S.I. Kadchenko, V.F. Kravchenko, V.A. Sadovnichii // Электромагнитные волны и электронные системы. – 1998. – Т. 3, № 2. – С. 4.

13. Computation of the first eigenvalues of the hydrodynamic stability problem for a viscous fluid flow between two rotating cylinders / V.A. Sadovnichii, V.V. Dubrovskii, S.I. Kadchenko, V.F. Kravchenko // Differential Equations. – 2000. – Т. 36. – Вып. 6. – С. 819–824.

14. Evaluation of eigenvalues of the problem of hydrodynamic stability of viscous liquid flow between two rotating cylinders at small Reynolds numbers / V.A. Sadovnichii, V.V. Dubrovskii, S.I. Kadchenko, V.F. Kravchenko // Doklady Mathematics. – 1998. – Т. 58, № 3. – С. 483–486.

Поступила в редакцию 10 декабря 2015 г.

DOI: 10.14529/mmph160205

CALCULATION OF EIGENVALUES OF ELLIPTIC DIFFERENTIAL OPERATORS USING THE THEORY OF REGULARIZED SERIES

S.I. Kadchenko, O.A. Torshina
Magnitogorsk State Technical University of G.I. Nosova, Magnitogorsk, Russian Federation
E-mail: kadchenko@masu.ru

The study of the spectral properties of perturbed differential operators is one of the significant problems of the spectral theory. In order to solve this problem it is necessary to determine the asymptotic behavior of the spectrum. But when investigating the asymptotic behavior, the improvement of remainder term is often impossible. Moreover, even the separation of the second term of the asymptotics from the remainder term is impossible. As a consequence it is necessary to come over to the study of deeper spectrum structure. A standard research tool is the derivation of formulas for regularized traces. The author makes a calculation of four amendments of the perturbation theory with the help of the theory of regularized series, followed by the access to the eigenvalues of elliptic differential operators with potential on a projective plane. In this case the projective plane is identified with the sphere by comparing opposite points and poles puncturing.

Keywords: differential operators; spectral theory; regularized traces; perturbation theory; eigenvalues.

References

1. Dubrovskiy V.V., Torshina O.A. Problema resheniya zadach na sobstvennye znacheniya dlya differentsial'nykh operatorov so slozhnym vkhozhdeniem spektral'nogo parametra [Problem solving eigenvalue problems for differential operators with a complex spectral parameter]. *Novye matematicheskie*

metody. Elektromagnitnye volny i elektronnye sistemy [New mathematical methods. An electromagnetic waves and electronic systems], 2002, no. 9, Vol. 7, pp. 4–10. (in Russ.).

2. Dubrovskiy V.V., Torshina O.A. Formula pervogo regulyarizovannogo sleda dlya differentsial'nogo operatora Laplasa–Bel'trami (The formula for the first regularized trace of the differential Laplace–Beltrami). *Differentsial'nye uravneniya i ikh prilozheniya* [Differential equations and their applications], 2002, no. 1, pp. 9–19. (in Russ.).

3. Torshina O.A. Algoritm vychisleniya regulyarizovannogo sleda operatora Laplasa–Bel'trami s potentsialom na proektivnoy ploskosti [The algorithm for calculation of the regularized trace for the Laplace–Beltrami operator with potential on the projective plane]. *Vestnik MaGU. Matematika*, 2003, Vol. 4, pp. 183–215. (in Russ.)

4. Torshina O.A. Sledy diskretnykh operatorov s chastnymi proizvodnymi [The traces of discrete operators with partial derivatives]. *Al'manakh sovremennoy nauki i obrazovaniya* [Almanac of modern science and education], 2012, no. 4(59), pp. 220–222. (in Russ.).

5. Torshina O.A. Formula pervogo regulyarizovannogo sleda Laplasa–Bokhnera s potentsialom na proektivnoy ploskosti (The formula for the first regularized trace of the Laplace–Bochner with potential on the projective plane). *Voronezhskaya zimnyaya matematicheskaya shkola* [Voronezh Winter Mathematical School], 2004, pp. 104–105. (in Russ.).

6. Torshina O.A. Formula pervogo regulyarizovannogo sleda operatora Laplasa–Bel'trami s negladkim potentsialom na proektivnoy ploskosti [The formula for the first regularized trace for the Laplace–Beltrami operator with potential on the non-smooth projective plane]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Matematika* [Vestnik of Samara State Technical University. Mathematics], 2006, pp. 32–40. (in Russ.).

7. Torshina O.A. Formula regulyarizovannogo sleda differentsial'nogo operatora so slozhnym vkhozhdeniem spektral'nogo parametra [The formula of the regularized trace of a differential operator with complex spectral parameter]. *Obshchie problemy upravleniya i ikh prilozheniya* [General management problems and their applications], 2003, pp. 467–468. (in Russ.).

8. Torshina O.A. Chislennyy metod vychisleniya popravok teorii vozmushcheniy [A numerical method for calculating corrections of perturbation theory]. *Al'manakh sovremennoy nauki i obrazovaniya* [Almanac of modern science and education], 2013, no. 12, pp. 168–170. (in Russ.).

9. Dubrovskii V.V., Kadchenko S.I., Kravchenko V.F., Sadovnichii V.A. A new method for approximate evaluation of the first eigenvalues in the spectral problem of hydrodynamic stability of poiseuille flow in a circular pipe. *Doklady Mathematics*, 2001, Vol. 64, no. 2, pp. 165–168.

10. Dubrovskii V.V., Kadchenko S.I., Kravchenko V.F., Sadovnichii V.A. A new method for the evaluation of the first eigenvalues in the spectral problem of hydrodynamic stability of viscous fluid flow between two rotating cylinders. *Doklady Mathematics*, 2001, Vol. 64, no. 3, pp. 425–429.

11. Dubrovskii V.V., Kadchenko S.I., Kravchenko V.F., Sadovnichii V.A. A new metod for approximate evaluation of the first eigenvalues in the Orr–Sommerfelg eigenvalue problem. *Doklady Mathematics*, 2001, Vol. 63, no. 3, pp. 355–358.

12. Dubrovskii V.V., Kadchenko S.I., Kravchenko V.F., Sadovnichii V.A. Computation of the first eigenvalues of a discrete operator. *Elektromagnitnye volny i elektronnye sistemy* [Electromagnetic Waves and Electronic Systems], 1998, Vol. 3, no. 2, p. 4. (in Russ.).

13. Sadovnichii V.A., Dubrovskii V.V., Kadchenko S.I., Kravchenko V.F. Computation of the first eigenvalues of the hydrodynamic stability problem for a viscous fluid flow between two rotating cylinders. *Differential Equations,* 2000, Vol. 36, Issue 6, pp 819–824. DOI: 10.1007/bf02754405

14. Sadovnichii V.A., Dubrovskii V.V., Kadchenko S.I., Kravchenko V.F. Evaluation of eigenvalues of the problem of hydrodynamic stability of viscous liquid flow between two rotating cylinders at small Reynolds numbers. *Doklady Mathematics*, 1998, Vol. 58, no. 3, pp. 483–486.

Received December 10, 2015