УДК 517.955.8 DOI: 10.14529/mmph160207

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ БИСИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В КОЛЬЦЕ С КВАДРАТИЧНЫМ РОСТОМ НА ГРАНИЦЕ

Д.А. Турсунов[1], У.З. Эркебаев[2]

[1] Уральский государственный педагогический университет, г. Екатеринбург, Российская Федерация

[2] Ошский государственный университет, г. Ош, Киргизия

Целью исследования является развитие асимптотического метода пограничных функций для бисингулярно возмущенных задач. В работе доказана возможность применения обобщенного метода пограничных функций к построению полного асимптотического разложения решения задачи Дирихле для бисингулярно возмущенного, линейного, неоднородного, эллиптического уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными в кольце с квадратичным ростом на границе. Построенный асимптотический ряд представляет собой ряд Пюйзо. Построенное разложение обосновано принципом максимума.

Ключевые слова: асимптотическое разложение решения; бисингулярное возмущение, уравнение эллиптического типа; задача Дирихле для кольца; малый параметр; обобщенный метод пограничных функций; пограничные функции; модифицированные функции Бесселя.

Введение. По многочисленности и разнообразию приложений задача Дирихле для эллиптических уравнений с малым параметром при старших производных занимает исключительное место в математике. К ней непосредственно сводятся: основная задача в гидродинамике – задача обтекания; задачи кручения и изгиба в теории упругости; в физике – определение температуры внутри пластинки при известных ее значениях на контуре, потенциал установившегося движения несжимаемой жидкости, электромагнитные и магнитные потенциалы, отыскание температуры теплового поля или потенциала электростатического поля в некоторой области при заданной температуре или потенциале на границе области и др. Явное решение этих задач построить в общем случае не удается, поэтому исследователи используют разные асимптотические методы. Случаи, когда в сингулярно возмущенных уравнениях соответствующее предельное уравнение имеет негладкое решение, по терминологии А.М. Ильина, называют бисингулярными. Ранее для построения асимптотики бисингулярно возмущенных задач в основном применялся метод сращивания (согласования) [1–5] либо другие методы, но не метод пограничных функций. Нами предлагается модификация метода пограничных функций, благодаря которой стало возможным построить асимптотику решения задачи Дирихле для бисингулярно возмущенных уравнений [6–9]. В данной работе исследуется задача Дирихле для бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения в кольце с квадратичным ростом на границе.

Постановка задачи. Исследуем задачу Дирихле

$$\varepsilon\Delta u(\rho,\varphi,\varepsilon)-(\rho-a)^2 q(\rho,\varphi)u(\rho,\varphi,\varepsilon)=f(\rho,\varphi,\varepsilon),\ (\rho,\varphi)\in D \quad (1)$$

$$u(a,\varphi,\varepsilon)=0,\ u(\beta,\varphi,\varepsilon)=0, \quad (2)$$

где $0<\varepsilon\ll 1$ – малый параметр, $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$ – оператор Лапласа, $f(a,\varphi,0)\neq 0$,

$D=\{(\rho,\varphi)\,|\,a<\rho<b, 0\le\varphi<2\pi\}$, $f(\rho,\varphi,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k f_k(\rho,\varphi)$, $q(\rho,\varphi)$, $f_k(\rho,\varphi)\in C^{(\infty)}(\bar{D})$,

$(\rho,\varphi)\in(\bar{D})$, $q(\rho,\varphi)>0$; $q(\rho,\varphi)$, $f(\rho,\varphi,\varepsilon)$ – заданные функции, $u(\rho,\varphi,\varepsilon)$ – искомая функция.

Решение задачи Дирихле (1)–(2) существует и единственно при $0<\varepsilon$ – const [10]. Нас интересует асимптотическое поведение решения задачи (1)–(2), когда $\varepsilon\to 0$.

Отметим, что задача (1)–(2) по терминологии А.М. Ильина является бисингулярно возмущенной [1, 2]. Действительно, первая сингулярность очевидна, предельное уравнение не является дифференциальным уравнением

$$-(\rho - a)^2 q(\rho,\varphi)\, u(\rho,\varphi,0) = f_0(\rho,\varphi),$$

и решение этого уравнения

$$u(\rho,\varphi,0) = -f_0(\rho,\varphi) \,/\, (\rho - a)^2 q(\rho,\varphi)$$

не может удовлетворять граничным условиям (2). Чтобы показать вторую особенность (сингулярность), рассмотрим структуру внешнего разложения решения задачи (1)–(2), которое ищем в виде

$$U(\rho,\varphi,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(\rho,\varphi),\ \ \varepsilon \to 0. \tag{3}$$

Подставляя (3) в (1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим простую рекуррентную систему уравнений

$$-(\rho - a)^2 q(\rho,\varphi)\, u_0(\rho,\varphi) = f_0(\rho,\varphi),\ -(\rho - a)^2 q(\rho,\varphi)\, u_k(\rho,\varphi) = f_k(\rho,\varphi) - \Delta u_{k-1}(\rho,\varphi),\ k \in \mathbf{N}.$$

Отсюда следует

$$u_0(\rho,\varphi) = -\frac{f_0(\rho,\varphi)}{q(\rho,\varphi)(\rho-a)^2},\ \ u_k(\rho,\varphi) = -\frac{f_k(\rho,\varphi) - \Delta u_{k-1}(\rho,\varphi)}{q(\rho,\varphi)(\rho-a)^2},\ \ k \in \mathbf{N}.$$

Так как $f_0(a,\varphi) \neq 0$, поэтому $u_k(\rho,\varphi) \in C^{(\infty)}\left(\bar{D} \setminus \{(a,\varphi)\}\right)$, т.е. все эти функции $u_k(\rho,\varphi)$ имеют нарастающие особенности

$$u_k(\rho,\varphi) = O\left(1/(\rho - a)^{2+4k}\right),\ k = 0, 1, 2, \ldots,\ \rho \to a.$$

А внешнее решение представимо в виде

$$U(\rho,\varphi,\varepsilon) = \frac{1}{(\rho-a)^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon}{(\rho-a)^4}\right)^k F_k(\rho,\varphi),\ \varepsilon \to 0, \tag{4}$$

где $F_k(\rho,\varphi) \in C^{(\infty)}(\bar{D})$, $k = 0, 1, \ldots$.

Следовательно, задача (1)–(2) является бисингулярной – коэффициенты ее внешнего разложения имеют нарастающие особенности, когда $\rho \to a$. Кроме этого, ряд (4) теряет асимптотический характер при $|\rho - a| \le \varepsilon^{1/4}$. Следует отметить, что квадратичный рост на границе существенно отличается от линейного роста [9], и эта особенность влияет на структуру асимптотического разложения решения, также выбор вспомогательного асимптотического ряда.

Основной результат. Справедлива

Теорема. Для решения задачи (1)–(2) при $\varepsilon \to 0$, справедливо асимптотическое разложение

$$u(\rho,\varphi,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k v_k(\rho,\varphi) + \sum_{k=0}^{+\infty} \sqrt{\varepsilon^k}\, z_k\left(\frac{b-\rho}{\sqrt{\varepsilon}},\varphi\right) + \sum_{k=-2}^{+\infty} \sqrt[4]{\varepsilon^k}\, w_k\left(\frac{\rho-a}{\sqrt[4]{\varepsilon}},\varphi\right),$$

где функции $v_k(\rho,\varphi) \in C^\infty(\bar{D})$, $w_k(\tau,\varphi) \in C^\infty(D_1)$, $z_k(\eta,\varphi) \in C^\infty(D_2)$, $\tau = (\rho - a)/\sqrt[4]{\varepsilon}$, $\eta = (b - \rho)/\sqrt{\varepsilon}$, $D_1 = \{(\tau,\varphi) |\ 0 < \tau < +\infty,\ 0 < \varphi \le 2\pi\}$, $D_2 = \{(\eta,\varphi) |\ 0 < \eta < +\infty,\ 0 < \varphi \le 2\pi\}$, причем $w_{4m-2}(\tau,\varphi) = O(1/\tau^2)$, $w_{4m-1}(\tau,\varphi) = O(1/\tau)$, $w_{4m}(\tau,\varphi) = O(1/\tau^4)$, $w_{4m+1}(\tau,\varphi) = O(1/\tau^3)$ при $\tau \to +\infty$, $m = 0, 1, \ldots$, $z_k(\eta,\varphi) = O(1/e^{\eta})$ при $\eta \to +\infty$.

Доказательство теоремы состоит из двух частей: построение формального асимптотического разложения решения (ФАРР) и обоснование этого ФАРР.

Построение ФАРР

ФАРР задачи (1)–(2) будем искать в виде

$$u(\rho,\varphi,\varepsilon) = V(\rho,\varphi,\varepsilon) + W(\tau,\varphi,\mu) + Q(\eta,\varphi,\lambda), \tag{5}$$

где $V(\rho,\varphi,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k v_k(\rho,\varphi)$, $W(\tau,\varphi,\mu) = \sum_{k=-2}^{+\infty} \mu^k w_k(\tau,\varphi)$, $Q(\eta,\varphi,\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k z_k(\eta,\varphi)$, $\tau = (\rho - a)/\mu$, $\varepsilon = \mu^4$, $\eta = (b - \rho)/\lambda$, $\varepsilon = \lambda^2$.

Классическое погранслойное решение $Q(\eta,\varphi,\lambda)$ устраняет невязку на внешней границы кольца $\rho = b$, и экспоненциально убывает вне пограничного слоя, а погранслойное решение $W(\tau,\varphi,\mu)$ устраняет невязку на внутренней границы кольца $\rho = a$, и степенным характером убывает вне пограничного слоя.

Учитывая граничное условие (2), имеем

$$W(0,\varphi,\mu) = -V(a,\varphi,\mu^4), \qquad (6)$$

$$Q(0,\varphi,\lambda) = \psi(\varphi, \lambda^2), \qquad (7)$$

где $\psi(\varphi,\varepsilon) = -V(b,\varphi,\varepsilon) - W((b-a)/\mu, \varphi, \mu)$, $\psi(\varphi, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \psi_j(\varphi)$.

Подставляя соотношение (5) в равенство (1), получим

$$\varepsilon\Delta V(\rho,\varphi,\varepsilon) - (\rho-a)^2 q(\rho,\varphi)V(\rho,\varphi,\varepsilon) = f(\rho,\varphi,\varepsilon) - h(\rho,\varphi,\varepsilon),\ (\rho,\varphi)\in D, \qquad (8)$$

$$\mu^2\left(\frac{\partial^2 W}{\partial\tau^2} + \frac{\mu}{(a+\tau\mu)}\frac{\partial W}{\partial\tau} + \frac{\mu^2}{(a+\tau\mu)^2}\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi^2} - \tau^2 q(a+\tau\mu,\varphi)W\right) = h\left(a+\tau\mu,\varphi,\mu^4\right),\ (\tau,\varphi)\in D_1, \qquad (9)$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial\eta^2} - \frac{\lambda}{(b-\eta\lambda)}\frac{\partial Q}{\partial\eta} + \frac{\lambda^2}{(b-\eta\lambda)^2}\frac{\partial^2 Q}{\partial\varphi^2} - (c-\eta\lambda)^2 q(b-\eta\lambda,\varphi)Q = 0,\ (\eta,\varphi)\in D_2, \qquad (10)$$

где $W = W(\tau,\varphi,\mu)$, $Q = Q(\eta,\varphi,\lambda)$, $c = b-a$.

По идее метода ввели вспомогательный асимптотический ряд $h(\rho,\varphi,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k h_k(\rho,\varphi)$, который конкретизируем ниже.

Регулярное внешнее решение $V(\rho,\varphi,\varepsilon)$

Учитывая $V(\rho,\varphi,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{+\infty}\varepsilon^k v_k(\rho,\varphi)$, из соотношения (8) для функции $v_k(\rho,\varphi)$ получим

$$v_0(\rho,\varphi) = -\frac{f_0(\rho,\varphi) - h_0(\rho,\varphi)}{(\rho-a)^2 q(\rho,\varphi)},\ v_k(\rho,\varphi) = -\frac{f_k(\rho,\varphi) - \Delta v_{k-1}(\rho,\varphi) - h_k(\rho,\varphi)}{(\rho-a)^2 q(\rho,\varphi)},\quad k\in\mathbf{N}.$$

Пусть $g_k(\rho,\varphi) = f_k(\rho,\varphi) - \Delta v_{k-1}(\rho,\varphi)$, $k = 0, 1,\ldots$, $v_{-1}(\rho,\varphi) \equiv 0$, тогда $v_k(\rho,\varphi)\in C^{(\infty)}(\bar{D})$, когда

$$h_0(\rho,\varphi) = \frac{g_{0,0}(\varphi)}{q_0(\varphi)}q(\rho,\varphi) + \left(\frac{g_{0,1}(\varphi)}{q_0(\varphi)} - \frac{g_{0,0}(\varphi)q_1(\varphi)}{q_0^2(\varphi)}\right)(\rho-a)q(\rho,\varphi),$$

$$h_k(\rho,\varphi) = g_{k,0}(\varphi) + g_{k,1}(\varphi)(\rho-a) + (\rho-a)^2\sum_{j=0}^{+\infty} h_{k,j}(\varphi)(\rho-a)^j,\ k = 1, 2,\ldots,$$

где $g_{k,0}(\varphi) = g_k(a,\varphi)$, $g_{k,1}(\varphi) = \frac{\partial g_k(a,\varphi)}{\partial\rho}$, $q_0(\varphi) = q_0(a,\varphi)$, $q_1(\varphi) = \frac{\partial q(a,\varphi)}{\partial\rho}$, $h_{k,j}(\varphi)$ – пока неизвестные функции.

Неизвестные функции $h_{k,j}(\varphi)$ выбираем так, чтобы $h_{k,j}(\varphi)\in C^\infty[0, 2\pi]$ и выполнялись соотношения

$$w_j(\tau, \varphi) \to 0 \text{ при } \tau\to+\infty,\ j = -2, -1, 0, 1, \ldots .$$

При таком выборе функции $h(\rho,\varphi,\varepsilon)$, получим

$$v_0(\rho,\varphi) = -\frac{g_0(\rho,\varphi) - \left(\frac{g_{0,0}(\varphi)}{q_0(\varphi)} + \left(\frac{g_{0,1}(\varphi)}{q_0(\varphi)} - \frac{g_{0,0}(\varphi)q_1(\varphi)}{q_0^2(\varphi)}\right)(\rho-a)\right)q(\rho,\varphi)}{(\rho-a)^2 q(\rho,\varphi)},$$

$$v_k(\rho,\varphi) = -\frac{g_k(\rho,\varphi) - g_{k,0}(\varphi) - g_{k,1}(\varphi)(\rho-a)}{(\rho-a)^2 q(\rho,\varphi)} + \frac{1}{q(\rho,\varphi)}\sum_{j=0}^{+\infty} h_{k,j}(\varphi)(\rho-a)^j.$$

Таким образом, мы почти построили регулярное внешнее решение $V(\rho,\varphi,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{+\infty}\varepsilon^k v_k(\rho,\varphi)$ в области $\bar{D}$, $v_k(\rho,\varphi)\in C^{(\infty)}(\bar{D})$.

Погранслойное решение $W(\tau,\varphi,\mu)$

Пусть $q(\rho,\varphi)=\sum_{j=0}^{\infty}q_j(\varphi)(\rho-a)^j$, $q_j(\varphi)=\dfrac{\partial^j q(a,\varphi)}{j!\partial\rho^j}$, тогда соотношение (9) примет вид

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\mu^k\left(\frac{\partial^2 w_{k-2}}{\partial\tau^2}-\tau^2 q_0 w_{k-2}\right)=-\sum_{k=1}^{+\infty}\mu^k\left(\frac{\partial w_{k-3}}{\partial\tau}+\mu\frac{\partial^2 w_{k-3}}{\partial\varphi^2}\right)+g_{0,0}+\mu\tau g_{0,1}+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(g_{k,0}+\mu\tau g_{k,1}\right)\mu^{4k}+$$
$$+\sum_{k=1}^{+\infty}\mu^k\sum_{j=1}^{k}\tau^{j+2}q_j w_{k-2-j}+\sum_{k=1}^{+\infty}\mu^{4k}\sum_{j=0}^{+\infty}h_{k,j}(\mu\tau)^{j+2}+\sum_{j=2}^{\infty}\left(\frac{g_{0,0}}{q_0}q_j+\left(\frac{g_{0,1}}{q_0}-\frac{g_{0,0}q_1}{q_0^2}\right)q_{j-1}\right)(\tau\mu)^j,$$

где $g_{k,0}=g_{k,0}(\varphi)$, $g_{k,1}=g_{k,1}(\varphi)$, $q_j=q_j(\varphi)$, $w_k=w_k(\tau,\varphi)$, $h_{k,j}=h_{k,j}(\varphi)$.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ и учитывая граничное условие (6), получим рекуррентную систему задач

$$Lw_{-2}\equiv\frac{\partial^2 w_{-2}}{\partial\tau^2}-\tau^2 q_0 w_{-2}=g_{0,0},\ (\tau,\varphi)\in D_1,\ w_{-2}(0,\varphi)=0; \quad (11)$$

$$Lw_{-1}=\tau^3 q_1 w_{-2}+g_{0,1}\tau-\frac{\partial w_{-2}}{\partial\tau},\ (\tau,\varphi)\in D_1,\ w_{-1}(0,\varphi)=0; \quad (12)$$

$$Lw_{4k}=p_{4k}(\tau,\varphi)+\sum_{j=0}^{k-1}h_{k-j,4j}\tau^{4j+2},\ w_{4k}(0,\varphi)=-v_k(a,\varphi),\ (\tau,\varphi)\in D_1,\ k=0,1,2,\ldots; \quad (13)$$

$$Lw_{4k+1}=p_{4k+1}(\tau,\varphi)+\sum_{j=0}^{k-1}h_{k-j,4j+1}\tau^{4j+3},\ w_{4k+1}(0,\varphi)=0,\ (\tau,\varphi)\in D_1,\ k=0,1,2,\ldots; \quad (14)$$

$$Lw_{4k+2+s}=p_{4k+2+s}(\tau,\varphi)+\tau^s g_{1+k,s}+\sum_{j=0}^{k-1}h_{k-j,4j+2+s}\tau^{4j+4+s},\ w_{4k+2+s}(0,\varphi)=0,\ (\tau,\varphi)\in D_1,\ s=0,1;\ k=0,1,2,\ldots; \quad (15)$$

где $p_s(\tau,\varphi)=\sum_{j=1}^{s+2}\tau^{j+2}q_j w_{s-j}+\left(\dfrac{g_{0,0}}{q_0}q_{s+2}+\left(\dfrac{g_{0,1}}{q_0}-\dfrac{g_{0,0}q_1}{q_0^2}\right)q_{s+1}\right)\tau^{s+2}-\dfrac{\partial w_{s-1}}{\partial\tau}-\dfrac{\partial^2 w_{s-2}}{\partial\varphi^2}$.

Докажем следующую вспомогательную лемму

Лемма 1. Пусть $F(\tau)\Phi(\varphi)\in C^\infty(\bar{D}_1)$, $q_0(\varphi)>0$. Тогда задача

$$\frac{\partial^2 z(\tau,\varphi)}{\partial\tau^2}-\tau^2 q_0(\varphi)z(\tau,\varphi)=F(\tau)\Phi(\varphi),\ (\tau,\varphi)\in D_1,\ z(0,\varphi)=z^0(\varphi) \quad (16)$$

имеет единственное решение $z(\tau,\varphi)\in C^\infty(\bar{D}_1)$.

Доказательство. Пусть $t=\sqrt[4]{q_0(\varphi)}\tau$, тогда задача (16) примет вид

$$\frac{\partial^2 z(t,\varphi)}{\partial t^2}-t^2 z(t,\varphi)=\frac{F(t)\Phi(\varphi)}{\sqrt{q_0(\varphi)}},\ z(0,\varphi)=z^0(\varphi),\ (t,\varphi)\in D_1. \quad (17)$$

Решение задачи (17) ищем в виде $z(t,\varphi)=z_1(t)\dfrac{\Phi(\varphi)}{\sqrt{q_0(\varphi)}}$, тогда относительно $z_1(t)$ получим задачу

$$z_1''(t)-t^2 z_1(t)=F(t),\quad z_1(0)=z_1^0,\quad t\in(0,+\infty).$$

Как нам известно, однородное уравнение

$$z''(t)-t^2 z(t)=0$$

имеет два независимых решения $z_1(t)=\sqrt{t}I_{1/4}\left(t^2/2\right)$, $z_2(t)=\sqrt{t}K_{1/4}\left(t^2/2\right)$, $I_{1/4}(s)$, $K_{1/4}(s)$ – модифицированные функции Бесселя [11]. Отметим, что $z_1(t)\sim\sqrt{\pi^{-1}}e^{t^2/2}/\sqrt{t}$, $z_2(t)\sim\sqrt{\pi}e^{-t^2/2}/\sqrt{t}$ при $t\to+\infty$; $z_1(0)=0$, $z_2(t)=O(1)$ при $t\to 0$; $W(z_1,z_2)=z_1z'_2-z_2z'_1=-1$.

Следовательно, решение задачи (17) имеет вид

$$z(t,\varphi)=\frac{z^0(\varphi)}{z_2(0)}z_2(t)-\frac{\Phi(\varphi)}{\sqrt{q_0(\varphi)}}\left(z_2(t)\int_0^t F(s)z_1(s)ds+z_1(t)\int_t^{+\infty}F(s)z_2(s)ds\right), t=\sqrt[4]{q_0(\varphi)}\tau .$$

Лемма 1 доказана.

Следствие. Если $F(\tau)=O(\tau^k)$, то $z(\tau,\varphi)=O(\tau^{k-2})$ при $\tau\to+\infty$, k – const.

Действительно, если учитывать асимптотические поведения модифицированных функций Бесселя, то получим

$$z(\tau)=O\left(\tau^{-\frac{1}{2}}e^{\tau^2/2}\right)\int_\tau^{+\infty}s^{-\frac{1}{2}}e^{-s^2/2}s^k ds=O\left(\tau^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}+k}\right)=O\left(\tau^{k-2}\right),\quad \tau\to+\infty.$$

Существование и единственность решений краевых задач (11)–(15) следует из леммы 1. Докажем теперь следующую лемму.

Лемма 2. Пусть $0<q_0(\varphi)\in C^\infty[0,2\pi]$, функции $p_j(\tau,\varphi)\in C^\infty(\bar{D}_1)$ разлагаются в асимптотические ряды

$$p_j(\tau,\varphi)=\frac{p_{j,j}(\varphi)}{\tau^j}+\frac{p_{j,j+4}(\varphi)}{\tau^{j+4}}+\ldots+\frac{p_{j,j+4k}(\varphi)}{\tau^{j+4k}}+\ldots,\ j=0,1,2,3,\text{ при } \tau\to+\infty.$$

Тогда в области $\bar{D}_1$ существуют решения уравнений

$$\frac{\partial^2\tilde{w}_j(\tau,\varphi)}{\partial\tau^2}-\tau^2q_0(\varphi)\tilde{w}_j(\tau,\varphi)=p_j(\tau,\varphi),\ j=0,1,2,3, \tag{18}$$

которые разлагаются в асимптотические ряды

$$\tilde{w}_j(\tau,\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\tilde{w}_{j,j+2+4k}(\varphi)}{\tau^{j+2+4k}},\ j=0,1,2,3,\ \tau\to+\infty. \tag{19}$$

При этом ряды (19) можно многократно почленно дифференцировать, и они являются ФАРР уравнений (18).

Доказательство. Нетрудно заметить, что дифференцируемость рядов (19) вытекает непосредственно из уравнений (18). ФАРР ищем в виде (19), где $\tilde{w}_{j,k}(\varphi)$ – пока неизвестные функции. Подставляя эти ряды (19) в уравнение (18) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях τ, получим рекуррентные системы уравнений для $\tilde{w}_{j,j+2+4k}(\varphi)$, $k=0,1,2\ldots$:

$$-\tilde{w}_{j,j+2}(\varphi)q_0(\varphi)=p_{j,j}(\varphi),$$
$$(j+2)(j+3)\tilde{w}_{j,j+2}(\varphi)-\tilde{w}_{j,j+6}(\varphi)q_0(\varphi)=p_{j,j+4}(\varphi),\ \ldots,$$
$$(j+2+4k)(j+3+4k)\tilde{w}_{j,j+2+4k}(\varphi)-\tilde{w}_{j,j+6+4k}(\varphi)q_0(\varphi)=p_{j,j+4+4k}(\varphi) \text{ и т.д.}$$

Отсюда однозначно определяются $\tilde{w}_{j,j+2+4k}(\varphi)$, $k=0,1,2\ldots$:

$$\tilde{w}_{j,j+2}(\varphi)=-p_{j,j}(\varphi)/q_0(\varphi),\quad \tilde{w}_{j,j+2+4k}(\varphi)=-(p_{j,j+4k}(\varphi)-(j-2+4k)(j-1+4k)\tilde{w}_{j,j-2+4k}(\varphi))/q_0(\varphi),\ k=1,2,\ldots .$$

Теперь оценим остаточные члены рядов (19)

$$r_j(\tau,\varphi)=\tilde{w}_j(\tau,\varphi)-\sum_{k=0}^{N}\frac{\tilde{w}_{j,j+2+4k}(\varphi)}{\tau^{j+2+4k}},\ j=0,1,2,3,\ \tau\to+\infty.$$

Для остаточных членов получим следующие уравнения

$$\frac{\partial^2 r_j(\tau,\varphi)}{\partial\tau^2}-\tau^2q_0(\varphi)r_j(\tau,\varphi)=O\left(1/\tau^{j+4(N+1)}\right),\ j=0,1,2,3,\ \tau\to+\infty.$$

Учитывая следствие из леммы 1, мы получаем оценку для остаточных членов:

$$r_j(\tau,\varphi)=O\left(1/\tau^{j+2+4(N+1)}\right),\quad j=0,1,2,3,\ \tau\to+\infty.$$

Следовательно, (19) действительно являются асимптотическими разложениями решений уравнений (18). Лемма 2 доказана.

Докажем еще одну вспомогательную лемму, с помощью которой докажем соотношения $w_{4k-2}(\tau,\varphi) = O(1/\tau^2)$, $w_{4k-1}(\tau,\varphi) = O(1/\tau)$, $w_{4k}(\tau,\varphi) = O(1/\tau^4)$, $w_{4k+1}(\tau,\varphi) = O(1/\tau^3)$, $\tau \to +\infty$, $k = 0, 1,\ldots$

Лемма 3. Пусть $h_{k,j} = -\sum\limits_{s=1}^{4k+2} q_{s+j} w_{4k-s,s}$, $q_k = q_k(\varphi)$, $w_{i,j} = w_{i,j}(\varphi)$, $g_k = g_k(a,\varphi)$. Тогда при $\tau \to +\infty$, справедливы равенства

$$w_{4k+s}(\tau,\varphi) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{w_{4k+s,4j-s}}{\tau^{4j-s}}, \; s = 0, 1, 2, 3. \tag{20}$$

Доказательство. Применяя лемму 2, для уравнений (11)–(15) в случае $k = 0$, имеем

$$w_{-2}(\tau,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w_{-2,4k+2}}{\tau^{4k+2}}, \; w_{-1}(\tau,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w_{-1,4k+1}}{\tau^{4k+1}}, \; w_s(\tau,\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{w_{s,4k-s}}{\tau^{4k-s}}, \; s = 0, 1, 2, 3.$$

Теперь в остальных уравнениях (13), (14) и (15), при $k > 0$, мы должны выбрать неизвестные функции $h_{k,j}(\varphi)$, так чтобы максимальная степень разложения правых частей равенств (13)–(15) по τ не превышала второй степени, когда $\tau \to +\infty$. Подробно рассмотрим один конкретный случай выбора функции $h_{k,j}(\varphi)$, остальные выбираются аналогичным образом. Рассмотрим правую часть равенства (13) в случае $k = 1$:

$$p_4(\tau,\varphi) = \sum_{j=1}^{6} \tau^{j+2} q_j w_{4-j} + \left(\frac{g_{0,0}}{q_0} q_6 + \left(\frac{g_{0,1}}{q_0} - \frac{g_{0,0} q_1}{q_0^2} \right) q_5 \right) \tau^6 - \frac{\partial w_3}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 w_2}{\partial \varphi^2} + h_{1,0} \tau^2$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_{4k+2}}{\tau^{4k+2}} + \tau^2 \sum_{j=1}^{6} q_j w_{4-j,j} + h_{1,0} \tau^2.$$

Учитывая, что $h_{1,0} = -\sum\limits_{s=1}^{6} q_s w_{4-s,s}$, получаем $p_4(\tau,\varphi) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{c_{4k+2}}{\tau^{4k+2}}$. Применяя лемму 2, получаем разложение $w_4(\tau, \varphi) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{w_{4,4k}}{\tau^{4k}}$. Докажем теперь справедливость (20) при $s = 0$.

Пусть для любого $k \in \mathbf{N}$ справедливо соотношение (20) при $h_{k,j}(\varphi) = -\sum\limits_{s=1}^{4k+2} q_{s+j}(\varphi) w_{4k-s,s}(\varphi)$.

Тогда из равенства

$$Lw_{4(k+1)} = p_{4(k+1)}(\tau,\varphi) + \sum_{j=0}^{k} h_{k+1-j,4j} \tau^{4j+2} \tag{21}$$

следует справедливость соотношения

$$w_{4(k+1)}(\tau,\varphi) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{w_{4(k+1),4j}}{\tau^{4j}}.$$

Действительно, рассмотрим правую часть (21):

$$p_{4(k+1)}(\tau,\varphi) + \sum_{j=0}^{k} h_{k+1-j,4j} \tau^{4j+2} = \sum_{j=1}^{4(k+1)+2} \tau^{j+2} q_j w_{4(k+1)-j} + \left(\frac{g_{0,0}}{q_0} q_{4k+6} + \left(\frac{g_{0,1}}{q_0} - \frac{g_{0,0} q_1}{q_0^2} \right) q_{4k+5} \right) \tau^{4k+6} -$$
$$- \frac{\partial w_{4k+3}}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 w_{4k+2}}{\partial \varphi^2} + \sum_{j=0}^{k} h_{k+1-j,4j} \tau^{4j+2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_{4k+2}}{\tau^{4k+2}} + \sum_{s=1}^{4k+2} q_{s+j}(\varphi) w_{4k-s,s}(\varphi) + \sum_{j=0}^{k} h_{k+1-j,4j} \tau^{4j+2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_{4k+2}}{\tau^{4k+2}}.$$

Применяя лемму 2 для (21), получим $w_{4(k+1)}(\tau,\varphi) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{w_{4(k+1),4j}}{\tau^{4j}}$, $\tau \to +\infty$. Лемма 3 доказана.

Таким образом, нами определены все члены асимптотического ряда $W(\tau,\varphi,\mu)$. Заметим, что все пограничные функции $w_{k-2}(\tau,\varphi)$, $k = 0, 1,\ldots$ вне пограничного слоя убывают степенным ростом

$$w_{4k-2}(\tau,\varphi) = O(1/\tau^2),\ w_{4k-1}(\tau,\varphi) = O(1/\tau),\ w_{4k}(\tau,\varphi) = O(1/\tau^4),\ w_{4k+1}(\tau,\varphi) = O(1/\tau^3),\ k = 0, 1,\ldots,\ \tau\to+\infty,$$

т.е. $\forall k: \lim\limits_{\tau\to+\infty} w_k(\tau,\varphi)=0,\ k=-2,-1,0,1,\ldots$

При $\tau = (b-a)/\mu$ и $\mu\to 0$, справедливо разложение

$$W\left((b-a)/\mu,\varphi,\mu\right)=\sum_{k=-2}^{+\infty}\mu^k w_k\left((b-a)/\mu,\varphi\right)=\sum_{k=0}^{+\infty}\varepsilon^k\tilde{w}_k(\varphi).$$

Действительно, когда $\tau\to+\infty$ имеем

$$\sum_{k=-2}^{+\infty}\mu^k w_k(\tau,\varphi)=\frac{1}{\mu^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{w_{-2,4k+2}(\varphi)}{\tau^{4k+2}}+\frac{1}{\mu}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{w_{-1,4k+1}(\varphi)}{\tau^{4k+1}}+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{w_{0,4k+4}(\varphi)}{\tau^{4k+4}}+\ldots$$

$$+\mu^{4m}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{w_{4m,4k+4}(\varphi)}{\tau^{4k+4}}+\mu^{4m+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{w_{4m+1,4k+3}(\varphi)}{\tau^{4k+3}}+\mu^{4m+2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{w_{4m+2,4k+2}(\varphi)}{\tau^{4k+2}}+\ldots$$

При $\tau = (b-a)/\mu$ и $\mu^4 = \varepsilon$, получим

$$\sum_{k=-2}^{+\infty}\mu^k w_k\left(\frac{b-a}{\mu},\varphi\right)=\sum_{k=0}^{+\infty}\varepsilon^k\left(\frac{w_{-2,4k+2}(\varphi)}{(b-a)^{4k+2}}+\frac{w_{-1,4k+1}(\varphi)}{(b-a)^{4k+1}}+\varepsilon\frac{w_{0,4k+3}(\varphi)}{(b-a)^{4k+4}}+\ldots\right)=\sum_{k=0}^{+\infty}\varepsilon^k\tilde{w}_k(\varphi).$$

Классическое погранслойное решение $Q(\eta,\varphi,\lambda)$

Пусть $q(\rho,\varphi)=\sum\limits_{j=0}^{\infty}\tilde{q}_j(\varphi)(b-\rho)^j$, $\tilde{q}_j(\varphi)=(-1)^j\dfrac{\partial^j q(b,\varphi)}{j!\partial\rho^j}$, $\lambda/(b-\lambda\eta)\sim\lambda$ при $\lambda\to 0$, тогда из уравнения (10) и условия (7) для функции $z_k(\eta,\varphi)$ имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\left(\frac{\partial^2 z_k(\eta,\varphi)}{\partial\eta^2}-\lambda\frac{\partial z_k(\eta,\varphi)}{\partial\eta}+\lambda^2\frac{\partial^2 z_k(\eta,\varphi)}{\partial\varphi^2}\right)-(c-\eta\lambda)^2\sum_{j=0}^{\infty}\tilde{q}_j(\varphi)(\eta\lambda)^j\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k z_k(\eta,\varphi)=0,$$

$$(\eta,\varphi)\in D_2,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}z_k(0,\varphi)\lambda^k=\sum_{k=0}^{\infty}\psi_k(\varphi)\lambda^{2k},\quad \lim_{\eta\to+\infty}z_k(\eta,\varphi)=0.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, получим рекуррентную систему задач

$$lz_0\equiv\frac{\partial^2 z_0(\eta,\varphi)}{\partial\eta^2}-c^2\tilde{q}_0(\varphi)z_0(\eta,\varphi)=0,\ z_0(0,\varphi)=\psi_0(\varphi),\tag{22}$$

$$lz_1=c\eta\left(c\tilde{q}_1(\varphi)-2\tilde{q}_0(\varphi)\right)z_0(\eta,\varphi)+\frac{\partial z_0(\eta,\varphi)}{\partial\eta},\ z_1(0,\varphi)=0,\tag{23}$$

$$lz_k=\sum_{j=1}^{k}\left(c^2\tilde{q}_j(\varphi)-2c\tilde{q}_{j-1}(\varphi)+\tilde{q}_{j-2}(\varphi)\right)\eta^j z_{k-j}(\eta,\varphi)-\eta^k\tilde{q}_{k-2}(\varphi)z_0(\eta,\varphi)+\frac{\partial z_{k-1}(\eta,\varphi)}{\partial\eta}-\frac{\partial^2 z_{k-2}(\eta,\varphi)}{\partial\varphi^2},$$

$$z_k(0,\varphi)=\begin{cases}\psi_m(\varphi)\ \text{при}\,k=2m\\ 0\ \text{при}\ k=2m+1, m\in N\end{cases}\quad k=2,3,\ldots\tag{24}$$

Дополнительно потребуем выполнения условий

$$\lim_{\eta\to+\infty}z_k(\eta,\varphi)=0,\ k=0,1,\ldots$$

Как нам известно [1, 2], решения задач (22)–(24) существуют, единственны и экспоненциально убывают при $\eta\to+\infty$,

$$z_0(\eta,\varphi)=\psi_0(\varphi)e^{-\eta c\sqrt{\tilde{q}_0(\varphi)}},\ z_1(\eta,\varphi)=\left(\eta^2 c_{1,2}(\varphi)+\eta c_{1,1}(\varphi)\right)e^{-\eta c\sqrt{\tilde{q}_0(\varphi)}},$$

$$z_{2k}(\eta,\varphi)=e^{-\eta c\sqrt{\tilde{q}_0(\varphi)}}(\psi_k(\varphi)+\sum_{j=1}^{4k}\eta^j c_{2k,j}(\varphi)),\ z_{2k+1}(\eta,\varphi)=e^{-\eta c\sqrt{\tilde{q}_0(\varphi)}}\sum_{j=1}^{4k+2}\eta^j c_{2k+1,j}(\varphi),$$

т.е. $z_k(\eta,\varphi)=O(1/e^{\eta})$, $c_{k,j}(\varphi)$ – гладкие функции.

Следовательно,

$$Q(\eta,\varphi,\lambda)=e^{-\eta c\sqrt{\tilde{q}_0(\varphi)}}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda^{2k}\left(\psi_k(\varphi)+P_{2k}\right)+\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda^{2k+1}P_{2k+1}\right),\ \eta\to+\infty,$$

где $P_{2k}=\sum_{j=1}^{4k}\eta^j c_{2k,j}(\varphi)$, $P_{2k+1}=\sum_{j=1}^{4k+2}\eta^j c_{2k+1,j}(\varphi)$.

Обоснование ФАРР

Пусть $R(\rho,\varphi,\varepsilon)=u(\rho,\varphi,\varepsilon)-u_m(\rho,\varphi,\varepsilon)$, где $u_m(\rho,\varphi,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{m}\varepsilon^k v_k(\rho,\varphi)+\sum_{k=0}^{2m+1}\lambda^k z_k(\eta,\varphi)+\sum_{k=-2}^{4m+1}\mu^k w_k(\tau,\varphi)$, $R(\rho,\varphi,\varepsilon)$ – остаточный член. Тогда для $R(\rho,\varphi,\varepsilon)$ получим задачу

$$\varepsilon\Delta R(\rho,\varphi,\varepsilon)-(\rho-a)^2 q(\rho,\varphi)R(\rho,\varphi,\varepsilon)=O(\varepsilon^{m+1}),\ \varepsilon\to 0,\ (\rho,\varphi)\in D,\ R(a,\varphi,\varepsilon)=0,\ R(b,\varphi,\varepsilon)=0.$$

Применяя принцип максимума, получаем оценку $R(\rho,\varphi,\varepsilon)=O(\varepsilon^m)$, $\varepsilon\to 0$, в области $\bar{D}$. Теорема доказана.

Заключение. Построено равномерное асимптотическое разложение по малому параметру решения задачи Дирихле для бисингулярно возмущенного линейного, неоднородного дифференциального уравнения в частных производных эллиптического типа второго порядка с двумя независимыми переменными в кольце с квадратичным ростом на границе. Для этого случая доказали применимость обобщенного метода пограничных функций. Полученный асимптотический ряд представляет собой ряд Пюйзо. Главный член асимптотического разложения решения имеет отрицательную дробную степень по малому параметру, что свойственно бисингулярно возмущенным уравнениям. Формальное асимптотическое разложение решения задачи Дирихле обосновано принципом максимума.

Литература

1. Ильин, А.М. Согласование асимптотических разложений краевых задач / А.М. Ильин. – М.: Наука. – 1989. – 334 с.

2. Ильин, А.М. Метод сращивания асимптотических разложений для уравнения $\varepsilon\Delta u-a(x,y)u_y=f(x,y)$ в прямоугольнике / А.М. Ильин, Е.Ф. Леликова // Мат. сборник. – 1975. – Т. 96 (138), № 4. – С. 568–583.

3. Ильин, А.М. Об асимптотике решения одного уравнения с малым параметром / А.М. Ильин, Е.Ф. Леликова // Алгебра и анализ. – 2010. –Т. 22. – Вып. 6. – С. 109–126.

4. Леликова, Е.Ф. Об асимптотике решения одного уравнения с малым параметром при части старших производных / Е.Ф. Леликова // Тр. ИММ УрОРАН. – 2012. –Т. 18, № 2. – С. 170–178.

5. Леликова, Е.Ф. Об асимптотике решения уравнения с малым параметром в области с угловыми точками / Е.Ф. Леликова // Математический сборник. – 2010. – Т. 201, № 10. – С. 93–108.

6. Турсунов, Д.А. Асимптотическое разложение решения бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения / Д.А. Турсунов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2013. – № 6(26). – С. 37–44.

7. Турсунов, Д.А. Асимптотическое разложение решения возмущенного эллиптического уравнения, когда предельное уравнение имеет особые точки / Д.А. Турсунов, У.З. Эркебаев // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2015. – № 3(35). – С. 26–34.

8. Турсунов, Д.А. Асимптотическое разложение решения задачи Дирихле для кольца с особенностью на границе / Д.А. Турсунов, У.З. Эркебаев // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2016. – № 1(39). – С. 42–52.

9. Турсунов, Д.А. Асимптотика решения задачи Дирихле для бисингулярно возмущенного уравнения в кольце / Д.А. Турсунов, У.З. Эркебаев // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2015. – Т. 25. – Вып 4. – С. 517–525.

10. Гилбарг, Д. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка / Д. Гилбарг, Н. Трудингер. – М.: Наука, 1989. – 464 с.

11. Федорюк, М.В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / М.В. Федорюк . – М.: Наука, 1983. – 352 с.

Поступила в редакцию 24 февраля 2016 г.

DOI: 10.14529/mmph160207

ASYMPTOTICS OF THE SOLUTION TO THE BISINGULAR PERTURBED DIRICHLET PROBLEM IN THE RING WITH QUADRATIC GROWTH ON THE BOUNDARY

D.A. Tursunov[1], U.Z. Erkebaev[2]
[1] Urals State Pedagogical University, Ekaterinburg, Russian Federation
[2] Osh State University, Osh, Kyrgyzstan
E-mail: d_osh@rambler.ru

The Dirichlet problem for elliptic equations with a small parameter in the highest derivatives takes a unique place in mathematics. In general case it is impossible to build explicit solution to these problems, which is why the researchers apply different asymptotic methods. The aim of the research is to develop the asymptotic method of boundary functions for constructing complete asymptotic expansions of the solutions to such problems. The proposed generalized method of boundary functions differs from the matching method in the fact that the growing features of the outer expansion are actually removed from it and with the help of the auxiliary asymptotic series are fully included in the internal expansions, and differs from the classical method of boundary functions in the fact that the boundary functions decay in power-mode nature and not exponentially. Using the proposed method, a complete asymptotic expansion of the solution to the Dirichlet problem for bisingular perturbed linear inhomogeneous second-order elliptic equations with two independent variables in the ring with quadratic growth on the boundary is built. A built asymptotic series corresponds to the Puiseux series. The basic term of the asymptotic expansion of the solution has a negative fractional degree of the small parameter, which is typical for bisingular perturbed equations, or equations with turning points. The built expansion is justified by the maximum principle.

Keywords: Asymptotic expansion of a solution; bisingular perturbation; elliptic equation; Dirichlet problem in the ring; small parameter; generalized method of boundary functions; boundary functions; modified Bessel functions.

References

1. Il'in, A.M. *Soglasovanie asimptoticheskikh razlozheniy kraevykh zadach* [Concordance of asymptotic expansions of boundary value problems]. Moscow, Nauka Publ., 1989, 334 p. (in Russ.).

2. Il'in A.M., Lelikova E.F. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1975, Vol. 25, no. 4, pp. 533–548. DOI: 10.1070/SM1975v025n04ABEH002461

3. Il'in A.M., Lelikova E.F. On asymptotic approximations of solutions of an equation with a small parameter. *St. Petersburg Mathematical Journal*, 2011, Vol. 22, no. 6, pp. 927–939. DOI: 10.1090/S1061-0022-2011-01177-X

4. Lelikova E.F. On the asymptotics of a solution to an equation with a small parameter at some of the highest derivatives. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics (Supplementary issues), 2013, Vol. 281, suppl. 1, pp. 95–104. (in Russ.). DOI: 10.1134/S008154381305009X

5. Lelikova E.F. The asymptotics of the solution of an equation with a small parameter in a domain with angular points. *Sbornik: Mathematics*, 2010, Vol. 201, no. 10, pp. 1495–1510. DOI:10.1070/-SM2010v201n10ABEH004119

6. Tursunov D.A. Asymptotic expansion of the solution of the bisingularly perturbed elliptic equation. *Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh.*, 2013, no. 6(26), pp. 37–44. (in Russ.).

7. Tursunov D.A., Erkebaev U.Z. Asymptotic expansion of the solution of a perturbed elliptic equation when the limit equation has singular points. *Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh.*, 2015, no. 3(35), pp. 26–34. (in Russ.). DOI: 10.17223/19988621/35/4

8. Tursunov D.A., Erkebaev U.Z. Asymptotic expansion of the solution of the Dirichlet problem for a ring with a singularity on the boundary. Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh., 2016, no. 1(39), pp. 42–52. (in Russ.).

9. Tursunov D.A., Erkebaev U.Z. Asymptotics of the Dirichlet problem solution for a bisingular perturbed equation in the ring. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2015, Vol. 25, Issue 4, pp. 517–525. (in Russ.).

10. Gilbarg D., Trudinger N. *Ellipticheskie differentsial'nye uravneniya s chastnymi proizvodnymi vtorogo poryadka* [Elliptic Partial Differential Equations of Second Order]. Moscow, Nauka Publ., 1989, 464 p. [Gilbarg D., Trudinger N.S. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2001, 518 p. (in Eng.). DOI: 10.1007/978-3-642-61798-0_1]

11. Fedoryuk M.V. *Asimptoticheskie metody dlya lineynykh obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy* [Asymptotic methods for linear ordinary differential equations]. Moscow, Nauka Publ., 1983, 352 p. (in Russ.).

Received February 24, 2016