УДК 519.857 DOI: 10.14529/mmph160208

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ СОПРОТИВЛЕНИЯ СРЕДЫ

В.И. Ухоботов, И.В. Изместьев
Челябинский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация.
E-mail: ukh@csu.ru, j748e8@gmail.com

Рассматривается задача преследования двух движущихся материальных объектов – перехватчика (преследователя) и цели (убегающего). Объекты движутся в одной плоскости под действием управляемых сил, направленных всегда перпендикулярно их скоростям. Законы изменения величин управляемых сил перехватчика и цели определяются контроллерами первого порядка. Кроме того, на объекты действуют силы сопротивления среды, пропорциональные квадратам скоростей. В рассматриваемой задаче построено управление, гарантирующее встречу.

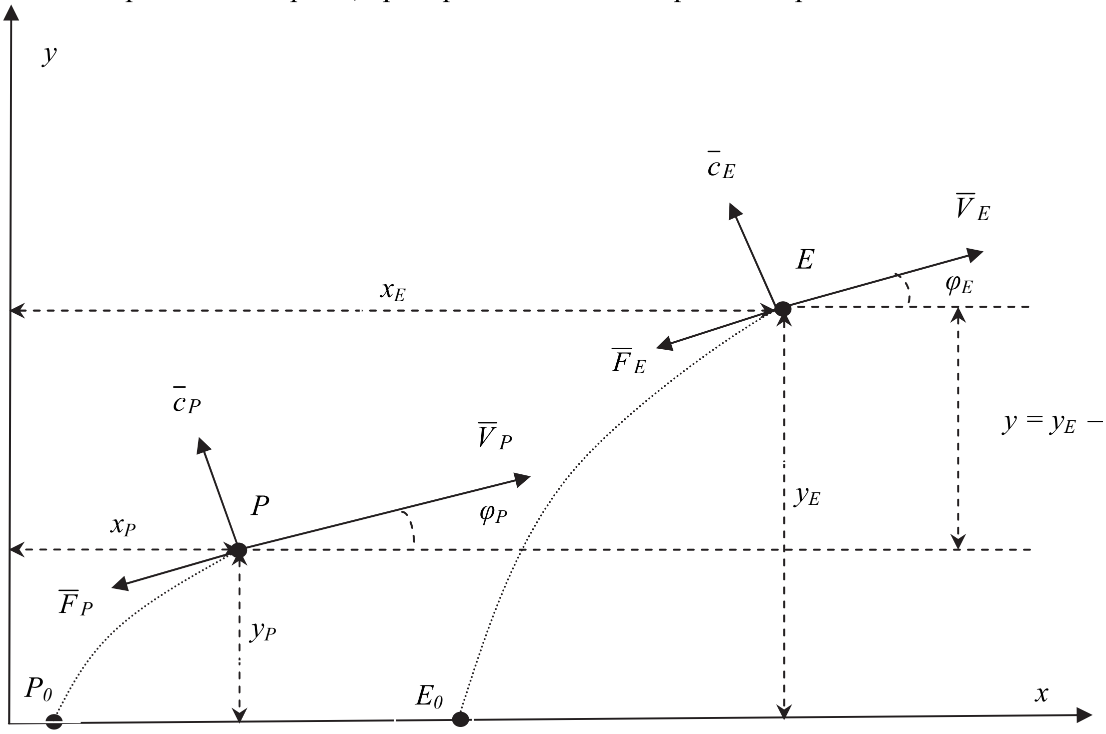
Ключевые слова: задача преследования; управление.

Введение

В работах [1–8] рассматривались различные варианты игровой задачи преследования двух движущихся объектов – перехватчика (преследователя) и цели (убегающего) при следующих предположениях: объекты движутся в некоторой плоскости; оба объекта имеют постоянные по величине скорости и ограниченные значения боковых ускорений; динамика каждого объекта описывается функцией преобразования первого порядка; траектории обоих объектов могут быть линеаризованы при данном геометрическом описании столкновения; доступна полная информация о положении объектов в каждый момент времени.

Одно из решений этой задачи, полученное в [1] и [4], основывалось на ее формализации в виде линейной дифференциальной игры преследования-уклонения с управлениями, принадлежащими компактам. Изначально игра формулировалась в четырехмерном пространстве со следующими координатами: относительное расстояние, относительная скорость и боковые ускорения игроков. Затем с помощью замены переменных игра редуцировалась в скалярную форму и решалась с использованием аппарата теории дифференциальных игр.

В данной статье рассматривается усложненный вариант такой задачи преследования при наличии сил сопротивления среды, пропорциональных квадратам скоростей.



Задача преследования

Постановка задачи

Считаем, что оба материальных объекта (P – преследователь, E – цель) движутся в одной плоскости (см. рис.). Выберем ось O_x так, чтобы она проходила через начальное положение P_0 и E_0 объектов P и E. На каждый объект $A = P, E$ действует управляющая сила $\overline{c}_A$, перпендикулярная скорости $\overline{V}_A$ объекта, и сила сопротивления среды $\overline{F}_A$, которая по величине пропорциональна квадрату скорости объекта и направлена в сторону, противоположную его скорости.

Целью преследователя является осуществление захвата цели. Это означает, что расстояние до цели не должно превосходить заданного числа $\varepsilon \geq 0$.

Запишем уравнения движения. Имеем

$$\dot{x}_A = V_A \cos\varphi_A, \quad \dot{y}_A = V_A \sin\varphi_A,$$

$$m_A \ddot{x}_A = m_A\left(\dot{V}_A \cos\varphi_A - \dot{\varphi}_A V_A \sin\varphi_A\right) = -c_A \sin\varphi_A - k_A V_A^2 \cos\varphi_A, \tag{1}$$

$$m_A \ddot{y}_A = m_A\left(\dot{V}_A \sin\varphi_A + \dot{\varphi}_A V_A \cos\varphi_A\right) = c_A \cos\varphi_A - k_A V_A^2 \sin\varphi_A. \tag{2}$$

Здесь $k_A \geq 0$ – коэффициент сопротивления среды, m_A – масса материального объекта. Считаем, что законы изменения величин управляемых сил описываются контроллерами первого порядка

$$\dot{c}_P = \delta_P u - c_P q_P, \quad \delta_P > 0, \quad q_P > 0, \quad |u| \leq 1, \quad \dot{c}_E = \delta_E v - c_E q_E, \quad \delta_E > 0, \quad q_E > 0, \quad |v| \leq 1. \tag{3}$$

Умножим уравнение (1) на $\cos\varphi_A$, а уравнение (2) – на $\sin\varphi_A$ и сложим. Получим

$$m_A \dot{V}_A = -k_A V_A^2. \tag{4}$$

Умножим уравнение (1) на $-\sin\varphi_A$, а уравнение (2) – на $\cos\varphi_A$ и сложим. Будем иметь

$$\dot{\varphi}_A m_A V_A = c_A. \tag{5}$$

Решая уравнение (4), находим

$$V_A(t) = \frac{V_A(0)}{V_A(0)\hat{k}_A t + 1}, \quad \hat{k}_A = \frac{k_A}{m_A}.$$

Отсюда, учитывая (5), получим

$$\dot{x}_A = \frac{V_A(0)}{V_A(0)\hat{k}_A t + 1}\cos\varphi_A, \quad \dot{y}_A = \frac{V_A(0)}{V_A(0)\hat{k}_A t + 1}\sin\varphi_A, \quad \dot{\varphi}_A = \hat{c}_A \frac{V_A(0)\hat{k}_A t + 1}{V_A(0)}; \quad \hat{c}_A = \frac{c_A}{m_A}.$$

Если материальные объекты достаточно массивны, то значения $\hat{c}_A$ являются достаточно малыми. Поэтому можно считать, что в процессе движения объектов направления их скоростей мало отклоняются от оси O_x. Тогда $\cos\varphi_A \approx 1$ и $\sin\varphi_A \approx \varphi_A$. Отсюда и из предыдущих уравнений получим, что

$$\dot{x}_A = \frac{V_A(0)}{V_A(0)\hat{k}_A t + 1}, \quad \dot{y}_A = \frac{V_A(0)}{V_A(0)\hat{k}_A t + 1}\varphi_A, \quad \dot{\varphi}_A = \hat{c}_A \frac{V_A(0)\hat{k}_A t + 1}{V_A(0)}. \tag{6}$$

Из первого уравнения в (6) находим, что

$$x_A(t) = x_A(0) + \frac{1}{\hat{k}_A}\ln\left(V_A(0)\hat{k}_A t + 1\right) \text{ при } \hat{k}_A > 0 \text{ и } x_A(t) = x_A(0) + V_A(0)t \text{ при } \hat{k}_A = 0. \tag{7}$$

В начальный момент времени $x_E(0) > x_P(0)$ (см. рис.). Из формулы (7) можем найти условия, при выполнении которых существует момент времени $T > 0$, при котором будет выполнено условие $x_E(T) = x_P(T)$.

Если $\hat{k}_A > 0$ при $A = P, E$, то требуемый момент времени $T > 0$ должен являться решением уравнения

$$\frac{\left(V_P(0)\hat{k}_P T + 1\right)^{\alpha}}{V_E(0)\hat{k}_E T + 1} = e^{\left(x_E(0) - x_P(0)\right)\hat{k}_E}; \quad \alpha = \frac{\hat{k}_E}{\hat{k}_P}. \tag{8}$$

Если $\alpha > 1$, то выражение, стоящее в левой части уравнения (8), при $T \to +\infty$ стремится к $+\infty$. Поэтому уравнение (8) имеет в этом случае положительный корень. Если $\hat{k}_P = \hat{k}_E = k > 0$, то уравнение (8) имеет положительный корень тогда и только тогда, когда

$$V_P(0) > V_E(0)e^{(x_E(0)-x_P(0))k}$$

и он равен

$$T = \frac{1}{k}\frac{e^{(x_E(0)-x_P(0))k}-1}{V_P(0)-V_E(0)e^{(x_E(0)-x_P(0))k}}.$$

В случае $0<\alpha<1$ уравнение (8) не всегда имеет положительный корень.

Если $\hat{k}_P=0$ и $\hat{k}_E>0$, то уравнение для определения момента времени $T>0$ принимает вид

$$\hat{k}_E V_P(0)T - \ln\left(V_E(0)\hat{k}_E T+1\right) = \left(x_E(0)-x_P(0)\right)\hat{k}_E.$$

Выражение, стоящее в левой части этого уравнения, стремится к $+\infty$ при $T\to+\infty$. Поэтому рассматриваемое уравнение имеет положительный корень.

Если $\hat{k}_P=0$ и $\hat{k}_E=0$, то при $V_P(0)>V_E(0)$ корень

$$T = \frac{x_E(0)-x_P(0)}{V_P(0)-V_E(0)}.$$

Далее будем считать, что уравнение (8) имеет положительный корень T. Тогда в этот момент времени T будет осуществлен захват цели, если выполнено неравенство

$$|\,y_P(T)-y_E(T)|\le\varepsilon. \tag{9}$$

Сведение задачи к однотипной дифференциальной игре

В работах [9, 10] показано, что задача управления с одномерной целью и заданным моментом окончания с помощью линейной замены переменных может быть сведена к однотипной задаче, для которой в работе [11] построено управление, гарантирующее встречу.

Сделаем замену переменных

$$w = y_E + \frac{\varphi_E}{\hat{k}_E}\ln\frac{1+V_E(0)\hat{k}_E T}{1+V_E(0)\hat{k}_E t} - y_P - \frac{\varphi_P}{\hat{k}_P}\ln\frac{1+V_P(0)\hat{k}_P T}{1+V_P(0)\hat{k}_P t}.$$

Тогда $w(T)=y_E(T)-y_P(T)$ и, как следует из второго и третьего уравнения (6),

$$\dot{w} = -\psi_P(t)\hat{c}_P + \psi_E(t)\hat{c}_E; \tag{10}$$

$$\psi_A(t) = \frac{V_A(0)\hat{k}_A t+1}{V_A(0)\hat{k}_A}\ln\frac{1+V_A(0)\hat{k}_A T}{1+V_A(0)\hat{k}_A t}\ge 0, \quad A=P,E.$$

Введем новую переменную

$$z = w - \hat{c}_P\int_t^T e^{q_P(t-r)}\psi_P(r)dr + \hat{c}_E\int_t^T e^{q_E(t-r)}\psi_E(r)dr.$$

Тогда $z(T)=y_E(T)-y_P(T)$ и, согласно (3) и (10),

$$\dot{z} = -a(t)u + b(t)v, \quad u\in[-1,1], \quad v\in[-1,1]; \; a(t)=\frac{\delta_P}{m_P}\int_t^T e^{q_P(t-r)}\psi_P(r)dr, \; b(t)=\frac{\delta_E}{m_E}\int_t^T e^{q_E(t-r)}\psi_E(r)dr.$$

В работе [11] показано, что, если выполнено неравенство

$$\max\left(|z(0)| + \int_0^T (b(r)-a(r))dr;\ \max_{0\le t\le T}\int_t^T \left(b(r)-a(r)\right)dr\right)\le\varepsilon, \tag{12}$$

то в дифференциальной игре (11) управление $u(t,z)=sign\,z$ обеспечивает в момент времени T выполнение неравенства $|\,z(T)|\le\varepsilon$ при любом допустимом управлении $|\,v|\le 1$. Если же неравенство (12) не выполнено, то управление $v(t,z)=sign\,z$ гарантирует выполнение неравенства $|\,z(T)|>\varepsilon$ при любом допустимом управлении $|\,u|\le 1$.

Таким образом, если выполнено неравенство (12), то управление преследователя $u(t,z)=sign\,z$ обеспечивает в момент времени T выполнение неравенства (9) при любом допустимом управлении $|\,v|\le 1$ цели. Поэтому будет осуществлен захват цели в момент времени T.

Литература

1. Shinar, J. Solution techniques for realistic pursuit-evasion games / J. Shinar // Advances in Control and Dynamic Systems. – 1981. – Vol. 17. – P. 63–124.

2. Shinar, J. Singular surface in a linear pursuit-evasion game with elliptical vectograms / J. Shinar, M. Medinah, M. Biton // J. Optimiz. Theory and Appl. – 1984. – Vol. 43, no. 3. – P. 431–456

3. Shinar, J. Pursuit of a faster evader – a linear game with elliptical vectograms / J. Shinar, M. Zarkh // Proc. 7th Intern. Symp. on Dynamic Games. – Yokosuka: Japan, 1996. – P. 855–868.

4. Shima, T. Time-varying linear pursuit-evasion game models with bounded controls / T. Shima, J. Shinar // J. Guidance, Control and Dynamics. – 2002. – no. 25. – P. 425–432.

5. Turetsky, V Continuous feedback control strategy with maximal capture zone in a class of pursuit games / V. Turetsky, V.Y. Glizer // International Game Theory Review. – 2005. – Vol. 7, no. 1. – P. 1–24.

6. Shima, T. Capture conditions in a pursuit-evasion game between players with biproper dynamics / T. Shima // Journal of Optimization Theory and Applications. – 2005. – Vol. 126, no. 3. – P. 503–528.

7. Kumkov, S.S. On level sets with “narrow throats” in linear differential games / S.S. Kumkov, V.S. Patsko, J. Shinar // Intern. Game Theory Rev. – 2005. – Vol. 7, no 3. – P. 285–311.

8. Model problem in a line with two pursuers and one evader / S.A. Ganebny, S.S. Kumkov, Le S. Menec, V.S. Patsko // Dyn. Games Appl. – 2012. – Vol. 2, no. 2. – P. 228–257.

9. Красовский, Н.Н. Позиционные дифференциальные игры / Н.Н. Красовский, А.И. Субботин. – М.: Наука, 1974. – 456 с.

10. Ухоботов, В.И. Однотипные дифференциальные игры с терминальным множеством в форме кольца / В.И. Ухоботов, И.В. Изместьев // Динамика систем и процессы управления (SDCP’2014): Труды международной научной конференции (Екатеринбург, 15–20 сентября 2014 г.). – Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2015. – С. 325–332.

11. Ухоботов, В.И. Однотипные дифференциальные игры с выпуклой целью / В.И. Ухоботов // Тр. ИММ УрО РАН. – 2010. – Т. 16. – № 5. – С. 196–204.

Поступила в редакцию 21 декабря 2015 г.

DOI: 10.14529/mmph160208

ON A PURSUIT PROBLEM UNDER RESISTANCE OF A MEDIUM

V.I. Ukhobotov, I.V. Izmestyev
Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E-mail: ukh@csu.ru, j748e8@gmail.com

This paper considers a game pursuit problem, in which the interceptor (pursuer) and target (evader) move in the same plane under the influence of controlled forces directed always perpendicularly to their velocities. The laws of value variation of controlled forces of interceptor and target are determined by first-order controllers. Besides that, each object is influenced by the force of resistance of a medium which is proportional to the squared velocity of the object and is directed to the side which is opposite to its velocity.

It is assumed that during the motion of objects, directions of their velocities are little different from an axis passing through their initial positions. It allows linearizing equations of motion of the pursuer and target. As a result of linearization it turns out that the projections of the position of objects on the axis change by a known law. When there is a coincidence of these projections, the time point prescribes the moment of the end of prosecution process. It is expected that the capture has occurred, if at this time point the module of difference of vector projections of object position on a perpendicular axis does not exceed a predetermined number. Eventually, a linear differential game of pursuit-evasion with fixed end time is obtained. Full information on the state of objects at each time point is available for players.

With the help of a linear change of variables, the game comes down to a homogeneous one-dimensional differential game, in which the possible values of control belong to the segments which depend on the time.

As a result of the research the set of initial conditions is found, under which the capture of target is possible when in any of its allowable motion, and the control of pursuer that will ensure the capture is built.

Keywords: pursuit problem; control.

References

1. Shinar J. Solution techniques for realistic pursuit-evasion games. *Advances in Control and Dynamic Systems*, 1981, Vol. 17, pp. 63–124. DOI: 10.1016/b978-0-12-012717-7.50009-7

2. Shinar J., Medinah M., Biton M. Singular surface in a linear pursuit-evasion game with elliptical vectograms. *J. Optimiz. Theory and Appl.*, 1984, Vol. 43, no. 3, pp. 431–456. DOI: 10.1007/BF00934465

3. Shinar J., Zarkh M. Pursuit of a faster evader – a linear game with elliptical vectograms. *Proc. 7th Intern. Symp. on Dynamic Games,* Yokosuka, Japan, 1996, pp. 855–868.

4. Shima T., Shinar J. Time-varying linear pursuit-evasion game models with bounded controls. *J. Guidance, Control and Dynamics*, 2002, Vol. 25, no. 3, pp. 425–432. DOI: 10.2514/2.4927

5. Turetsky V, Glizer V.Y. Continuous feedback control strategy with maximal capture zone in a class of pursuit games. *International Game Theory Review*, 2005, Vol. 7, no. 1, pp. 1–24. DOI: 10.1142/S0219198905000375

6. Shima T. Capture conditions in a pursuit-evasion game between players with biproper dynamics. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2005, Vol. 126, no 3, pp. 503–528. DOI: 10.1007/s10957-005-5495-3

7. Kumkov S.S., Patsko V.S., Shinar J. On level sets with "narrow throats" in linear differential games. Intern. *Game Theory Rev*, 2005, Vol. 7, no. 3, pp. 285–311. DOI: 10.1142/S0219198905000533

8. Ganebny S.A., Kumkov S.S., Le Menec S., Patsko V.S. Model problem in a line with two pursuers and one evader. *Dyn. Games Appl*, 2012, Vol. 2, no. 2, pp. 228–257. DOI: 10.1007/s13235-012-0041-z

9. Krasovskij N.N., Subbotin A.I. *Pozicionnye differencial'nye igry* [Positional Differential Games]. Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p. (in Russ.).

10. Ukhobotov V.I., Izmestyev, I.V. Odnotipnye differencial'nye igry s terminal'nym mnozhestvom v forme kol'tsa [One-type differential games with a terminal set in the form a ring]. Dinamika sistem i processy upravlenia [System dynamics and control processes]. *Proceeding of International Conference SDCP'2014* (Ekaterinburg, Russia, Sept. 15–20, 2014), Ekaterinburg, IMM UrO RAN Publ., 2015, pp. 325–332. (in Russ.).

11. Ukhobotov V.I. Odnotipnye differencial'nye igry s vypukloj cel'ju [One type differential games with convex goal]. *Trudy Instituta Matematiki I Mehaniki Uro RAN*, 2010, Vol. 16, no. 5, pp. 196–204.

Received December 21, 2015