УДК 517.958 **DOI: 10.14529/mmph160302**

ОБОБЩЕННАЯ МОДЕЛЬ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ ЗЕМЛИ

А.О. Кондюков
Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого, Великий Новгород, Российская Федерация
E-mail: k.a.o_leksey999@mail.ru

Описано фазовое пространство задачи Коши–Дирихле для системы уравнений в частных производных, моделирующей движение несжимаемой жидкости Кельвина–Фойгта высшего порядка в магнитном поле Земли. В рамках теории полулинейных уравнений соболевского типа доказана теорема существования единственного решения указанной задачи, которое является квазистационарной полутраекторией.

Ключевые слова: несжимаемая вязкоупругая жидкость; уравнения соболевского типа; фазовое пространство.

Введение

Система уравнений

$$
\begin{aligned}
&(1-\kappa\nabla^2)\,\mathrm{v}_t = \nu\nabla^2\mathrm{v} - (\mathrm{v}\cdot\nabla)\,\mathrm{v} + \sum_{m=1}^{M}\sum_{s=0}^{n_m-1} A_{m,s}\nabla^2\mathrm{w}_{m,s} - \frac{1}{\rho}\nabla\mathrm{p} - 2\Omega\times v + \frac{1}{\rho\mu}(\nabla\times\mathrm{b})\times\mathrm{b},\\
&\nabla\cdot\mathrm{v}=0,\ \nabla\cdot\mathrm{b}=0,\ \mathrm{b}_t=\delta\nabla^2\mathrm{b}+\nabla\times(\mathrm{v}\times\mathrm{b}),\\
&\frac{\partial\,\mathrm{w}_{m,0}}{\partial t}=\mathrm{v}+\alpha_m\,\mathrm{w}_{m,0},\ \alpha_m\in R_-,\ m=\overline{1,M},\\
&\frac{\partial\,\mathrm{w}_{m,s}}{\partial t}=s\,\mathrm{w}_{m,s-1}+\alpha_m\,\mathrm{w}_{m,s},\ s=\overline{1,n_m-1}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

моделирует динамику несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина–Фойгта высшего порядка $K(K=n_1+\ldots+n_M)$ [1] в магнитном поле Земли. Вектор функции $\mathrm{v}=(\mathrm{v}_1(x,t),\mathrm{v}_2(x,t),\ldots,\mathrm{v}_n(x,t))$ и $\mathrm{b}=(\mathrm{b}_1(x,t),\mathrm{b}_2(x,t),\ldots,\mathrm{b}_n(x,t))$ характеризуют скорость и магнитную индукцию соответственно, $\mathrm{p}=\mathrm{p}(x,t)$ – давление, κ – коэффициент упругости, ν – коэффициент вязкости, Ω – угловая скорость, δ – магнитная вязкость, μ – магнитная проницаемость, ρ – плотность, $A_{m,s}$ – параметры, которые определяют время ретардации (запаздывания) давления.

Прежде всего, надо заметить, что данная система обобщает систему, приведенную в [2, 3] при $K=0$ и $\kappa=0$.

Предполагая, что $\mu=1$ и $\rho=1$, рассмотрим разрешимость задачи Коши–Дирихле

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{v}(x,0)=\mathrm{v}_0(x),\,\mathrm{b}(x,0)=\mathrm{b}_0(x),\,\mathrm{w}_{m,s}(x,0)=\mathrm{w}^0_{m,s}(x),\,\forall x\in D;\\
&\mathrm{v}(x,t)=0,\,\mathrm{b}(x,t)=0,\,\mathrm{w}_{m,s}(x,t)=0,\,\forall(x,t)\in\partial D\times R_+,\,m=\overline{1,M},\,s=\overline{1,n_m-1}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

для системы (1). Здесь $D\subset R^n, n=2,3,4$ – ограниченная область с границей ∂D класса C^∞.

Также надо заметить, что задача (1), (2) входит в круг исследований сред Кельвина–Фойгта, начатых в работах [1, 4], в которых обобщалась система уравнений Навье–Стокса [5, 6] и получены теоремы существования и единственности соответствующих начально-краевых задач.

Случай $K=0$ и $\kappa=0$ задачи (1), (2) ранее изучался в [7]. Вырожденная модель магнитогидродинамики при $K=0$ и $\kappa\neq 0$ исследовалась в [8]. В данной работе обобщаются результаты, полученные в [9].

Нас будет интересовать разрешимость задачи (1), (2). Рассмотрим эту задачу в рамках теории полулинейных уравнений соболевского типа [10, 11]. Исходя из этого, в первой части статьи изложим абстрактную задачу Коши для полулинейного автономного уравнения соболевского типа (все результаты почерпнуты из монографии [12], поэтому будут приведены без доказательств). Во второй части задачу (1), (2) рассмотрим как конкретную интерпретацию абстрактной задачи.

В третьей части будет установлено существование квазистационарных полутраекторий указанной задачи и описано ее фазовое пространство. В заключении намечены возможные пути дальнейших исследований. Условимся обозначать конец доказательства значком ■.

1. Абстрактная задача

Пусть U и F – банаховы пространства, оператор $L \in \mathcal{L}(U,F)$, т.е. линеен и непрерывен, причем $\ker L \neq \{0\}$; оператор $M : \mathrm{dom}\ M \to F$ линеен, замкнут и плотно определен в U, т.е. $M \in Cl(U;F)$. Обозначим через U_M линеал $\mathrm{dom}\, M$, снабженный нормой графика $\|\cdot\| = \|\cdot\|_U + \|\cdot\|_F$, т.е. $U_M = \{u \in \mathrm{dom}\, M : \|u\| = \|Mu\|_F + \|u\|_U\}$. Пусть оператор $F \in C^\infty(U_M;F)$.

Рассмотрим задачу Коши

$$u(0) = u_0 \tag{3}$$

для полулинейного автономного уравнения соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + F(u). \tag{4}$$

Назовем *локальным решением* (далее просто *решением*) задачи (3), (4) вектор-функцию $u \in C^\infty((0,T);U_M)$, которая удовлетворяет уравнению (4) и такая, что $u(t) \to u_0$ при $t \to 0+$.

Пусть оператор M сильно (L,p)-секториален (терминологию и результаты см. п. 1.2. [12]). Из [13] известно, что если выполняется это условие, то решение задачи (3), (4) может быть неединственным. Поэтому в дальнейшем мы будем искать только такие решения задачи (3), (4), которые являются *квазистационарными полутраекториями*. Из [12, с. 32] также известно, что решения задачи (3), (4) существуют не для всех $u_0 \in U_M$. Поэтому введем еще два определения.

Определение 1. Пусть пространство U расщепляется в прямую сумму $U = U_0 \oplus U_1$ так, что $\ker L \subset U_0$. Решение $u = v + w$, где $v(t) \in U_0$, а $w(t) \in U_1$ при всех $t \in (0,T)$, уравнения (4) назовем квазистационарной полутраекторией, если $L\dot{v} \equiv 0$.

Определение 2. Множество $B \subset U_M$ назовем фазовым пространством уравнения (4), если для любой точки $u_0 \in B$ существует единственное решение задачи (3), (4), причем $u(t) \in B$.

Исходя из условия сильной (L,p)-секториальности оператора M, пространства U и F будут расщепляться в прямые суммы $U = U^0 \oplus U^1$, $F = F^0 \oplus F^1$. Здесь U^0 и F^0 – ядра, а U^1 и F^1 – образы аналитических разрешающих полугрупп U^t и F^t линейного однородного уравнения $L\dot{u} = Mu$.

Указанные полугруппы имеют следующий вид:

$$U^t = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R^L_\mu(M)e^{\mu t}d\mu,\ \ F^t = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma L^L_\mu(M)e^{\mu t}d\mu,$$

где $\Gamma \subset \rho^L(M)$ – контур такой, что $\arg\mu \to \pm\theta$ при $|\mu| \to +\infty$, причем $\rho^L(M)$ – L-резольвентное множество оператора M, $R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1}L$ ($L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1}$) – *правая (левая) L-резольвента* оператора M.

В силу результатов работы [12, с. 33] приведем задачу (3), (4) к эквивалентной системе:

$$R\dot{u}^0 = u^0 + G(u), u^0(0) = u^0_0,\ \ \dot{u}^1 = Su^1 + H(u), u^1(0) = u^1_0. \tag{5}$$

Здесь $u^k \in U^k$, $k = 0,1$, $u = u^0 + u^1$, операторы $R = M_0^{-1}L_0$, $S = L_1^{-1}M_1$, $G = M_0^{-1}(I - Q)F$, $H = L_1^{-1}QF$; ($Q \in \mathcal{L}(F) (\equiv \mathcal{L}(F,F))$ – проектор, который расщепляет пространство F требуемым образом). Систему (5) назовем *нормальной формой* задачи (3), (4).

В дальнейшем будем изучать такие квазистационарные полутраектории уравнения (4), для которых $R\dot{u}^0 \equiv 0$. Для этого будем предполагать, что оператор R является бирасщепляющим [12, с. 34] (его ядро $\ker R$ и образ $\mathrm{im}\, R$ дополняемы в пространстве U). Положим $U^{00} = \ker R$, обозначив через $U^{01} = U^0 - U^{00}$ некоторое дополнение к подпространству U^{00}. Тогда первое уравнение системы (5) примет вид

$$R\dot{u}^{01} = u^{00} + u^{01} + G(u), \tag{6}$$

где $u = u^{00} + u^{01} + u^{1}$.

В работе [12, с. 34] доказана теорема, дающая необходимые условия существования решения уравнения (4).

Теорема 1. *Пусть оператор M сильно (L, p)-секториален, оператор R бирасщепляющий и существует квазистационарная полутраектория уравнения (4). Тогда она удовлетворяет соотношениям*

$$0 = u^{00} + u^{01} + G(u),\ u^{01} = \mathrm{const}. \tag{7}$$

Перейдем теперь к рассмотрению достаточных условий. Из [12, с. 35] известно, что если оператор M сильно (L, p)-секториален, то оператор S секториален. Это означает, что оператор M порождает на U^1 аналитическую полугруппу. Обозначим ее через $\{U_1^t : t \ge 0\}$, так как оператор U_1^t является сужением оператора U^t на U^1. Из расщепления $U = U^0 \oplus U^1$ вытекает, что существует проектор $P \in L(U)$. Этот проектор соответствует данному расщеплению. Но $P \in L(U_M)$ и, следовательно, U_M расщепляется в прямую сумму $U = U_M^0 \oplus U_M^1$ так, что вложение $U_M^k \subset U^k, k = 0,1$, плотно и непрерывно.

В работе [12, с. 35] также доказана теорема , которая дает достаточные условия существования решения уравнения (4).

Теорема 2. *Пусть оператор M сильно (L, p)-секториален, оператор R бирасщепляющий, а оператор F принадлежит $C^{\infty}(U_M ; F)$. Пусть, кроме того,*

A_1) *в некоторой окрестности $O_{u_0} \subset U_M$ точки u_0 выполнено соотношение*

$$0 = u_0^{01} + (I - P_R)(G(u^{00} + u_0^{01} + u^1)); \tag{8}$$

A_2) *проектор P_R принадлежит $L(U_M^0)$ и оператор $I + P_R G'_{u_0^0} : U_M^{00} \to U_M^{00}$ – топлинейный изоморфизм ($U_M^{00} = U_M \cap U^{00}$);*

A_3) *для аналитических полугрупп $\{U_1^t : t \ge 0\}$ выполнено* соотношение

$$\int_0^{\tau} \left\| U_1^t \right\|_{L(U^1; U_M^1)} dt < \infty, \tau \in R_+. \tag{9}$$

Тогда существует единственное решение задачи (3), (4) являющееся квазистационарной полутраекторией уравнения (4).

Замечание 1. Соотношение $u^{01} = \mathrm{const}$ из (7) поясняет смысл термина «квазистационарные полутраектории», т.е. это такие полутраектории, которые «стационарны по некоторым переменным». Понятие квазистационарной полутраектории в динамическом случае совпадает с понятием квазистационарной траектории [13].

Замечание 2. Из условия A_1) теоремы 2 следует, что окрестность O_{u_0} является частью фазового пространства уравнения (4).

Замечание 3. Для обычных аналитических полугрупп, которые имеют оценку $\left\| U_1^t \right\|_{L(U^1; U_M^1)} < \mathrm{const}/t$, условие (9) не выполняется. Так как в дальнейшем мы собираемся использовать теорему 2 именно в таком случае, сделаем некоторые необходимые пояснения. Обозначим через $U_{\alpha}^1 = [U^1; U_M^1]_{\alpha}, \alpha \in [0,1]$, некоторое интерполяционное пространство, построенное по оператору S. Условие $F \in C^{\infty}(U_M ; F)$ в теореме 2 дополним условием $H \in C^{\infty}(U_M^1 ; U_{\alpha}^1)$, а условие (9) заменим на

$$\int_0^{\tau} \left\| U_1^t \right\|_{L(U^1; U_{\alpha}^1)} dt < \infty, \tau \in R_+. \tag{10}$$

Тогда утверждение теоремы 2 не изменится (обсуждение круга этих вопросов см. в [12, с.38]).

Теперь пусть U_k и F_k – банаховы пространства, операторы A_k линейны и непрерывны (т.е. принадлежат $L(U_k, F_k)$), а операторы $B_k : \operatorname{dom} B_k \to F$ линейны и замкнуты с областями определений $\operatorname{dom} B_k$ плотными в U_k, $k = 1,2$. Построим пространства $U = U_1 \times U_2$, $F = F_1 \times F_2$ и операторы $L = A_1 \otimes A_2$, $M = B_1 \otimes B_2$. По построению оператор L принадлежит $L \in L(U, F)$, а оператор $M : \operatorname{dom}\ M \to F$ линеен, замкнут и плотно определен, $\operatorname{dom} M = \operatorname{dom} B_1 \times \operatorname{dom} B_2$.

В [12, с. 38] приведена

Теорема 3. *Пусть операторы B_k сильно (A_k, p_k)-секториальны $k = 1,2$. Тогда оператор M сильно (L, p)-секториален, $p = \max(p_1, p_2)$.*

2. Конкретная интерпретация

Редуцируем задачу (1), (2) к задаче (3), (4). Во многих задачах гидродинамики использование градиента давления предпочтительнее рассмотрения давления, поэтому перейдем от системы (1) к системе

$$
\begin{aligned}
&(1-\kappa\nabla^2)v_t = \nu\nabla^2 v - (v\cdot\nabla)v + \sum_{m=1}^{M}\sum_{s=0}^{n_m-1} A_{m,s}\nabla^2 w_{m,s} - \overline{p} - 2\Omega\times v + (\nabla\times b)\times b,\\
&\nabla(\nabla\cdot v) = 0,\ \nabla(\nabla\cdot b) = 0,\ b_t = \delta\nabla^2 b + \nabla\times(v\times b),\\
&\frac{\partial w_{m,0}}{\partial t} = v + \alpha_m w_{m,0},\ \alpha_m \in R_-, m = \overline{1,M},\\
&\frac{\partial w_{m,s}}{\partial t} = s w_{m,s-1} + \alpha_m w_{m,s},\ s = \overline{1, n_m - 1}.
\end{aligned} \tag{11}
$$

Подробное обоснование такого перехода см., например, в [12]. Теперь нас будет интересовать разрешимость задачи (11), (2). Следуя работе [12], введем пространства $H_\sigma^2, H_\pi^2, H_\sigma$ и H_π. H_σ^2 – подпространство соленоидальных функций в пространстве $(W_2^2(D))^n \cap (\overset{\circ}{W}{}_2^1(D))^n$. H_σ-подпространство соленоидальных функций в пространстве $(L_2(D))^n$. H_π^2 и H_π - ортогональные в смысле $(L_2(D))^n$ дополнения H_σ^2 и H_σ соответственно. Ортопроектор на H_σ будем обозначать через Σ. Причем, этим же символом будет обозначаться его сужение на пространство $(W_2^2(D))^n \cap (\overset{\circ}{W}{}_2^1(D))^n$. Положим $\Pi = \mathrm{I} - \Sigma$. Формулой $A = \nabla^2 E_n$ (E_n – единичная матрица порядка n) зададим линейный непрерывный оператор $A : H_\sigma^2 \oplus H_\pi^2 \to H_\sigma \oplus H_\pi$ с дискретным конечнократным спектром $\sigma(A) \subset R$, который сгущается лишь на $-\infty$. Формулой $B_v : v \to \nabla(\nabla\cdot v)$ $(B_b : b \to \nabla(\nabla\cdot b))$ зададим линейный непрерывный сюрьективный оператор $B_v(B_b) : H_\sigma^2 \oplus H_\pi^2 \to H_\pi$ с ядром $\ker B_v = B_b = H_\sigma^2$. Положим $U_{10} = H_\sigma^2 \times H_\pi^2 \times H_p$, $F_{10} = H_\sigma \times H_\pi \times H_p$, где $H_\pi = H_p$; $U_{1i} = H^2 \cap \overset{\circ}{H}{}^1 = H_\sigma^2 \times H_\pi^2$, и $F_{1i} = L_2 = H_\sigma \times H_\pi$, $i = \overline{1,K}$. Тогда пространства $U_1 = \oplus_{l=0}^K U_{1l}$, $F_1 = \oplus_{l=0}^K F_{1l}$. Оператор $A_1 : U_1 \to F_1$ определим формулой $A_1 = \operatorname{diag}[\widehat{A}_1, E_K]$, где

$$
\widehat{A}_1 = \begin{pmatrix} \breve{A}_1 & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{O} \end{pmatrix},\ \breve{A}_1 = \begin{pmatrix} \Sigma(\mathrm{I}-\lambda A)\Sigma & \Sigma A(\mathrm{I}-\lambda A)\Pi \\ \Pi(\mathrm{I}-\lambda A)\Sigma & \Pi A(\mathrm{I}-\lambda A)\Pi \end{pmatrix}.
$$

Положим оператор $B_1 : U_1 \to F_1$ равным оператору M_1 (см. [12, с. 49]).

Замечание 4. Пространства U_1 и F_1 определяются в точности так же, как пространства U и F п. 2.2. [9]. Оператор A_1 определяется точно так же, как оператор L в п. 2.2. [12].

Замечание 5. Сужение оператора ΣA на H_σ^2 обозначим через A_σ. В силу теоремы Солонникова–Воровича–Юдовича спектр $\sigma(A_\sigma)$ вещественен, дискретен, конечнократен и сгущается лишь на $-\infty$.

Теорема 4. (i) Операторы $A_1, B_1 \in L(U_1, F_1)$, и, если $\kappa^{-1} \notin \sigma(A)$, то оператор A_1 – бирасщепляющий $\ker A_1 = \{0\} \times \{0\} \times H_p \times \underbrace{\{0\} \times \ldots \times \{0\}}_{K}$, $\operatorname{im} A_1 = H_\sigma \times H_\pi \times \{0\} \times F_{11} \times F_{12} \times \ldots \times F_{1K}$.

(ii) Если $\kappa^{-1} \notin \sigma(A) \cup \sigma(A_\sigma)$, *то оператор* B_1 $(A_1, 1)$*-ограничен, причем порядок несущественной особой точки в бесконечности равен единице.*

Доказательство. Утверждение теоремы есть прямое следствие результатов [12, с. 73].■

Далее положим $U_2 = F_2 = L_2(D)$ и равенством $B_2 = \delta\nabla^2 : \operatorname{dom} B_2 \to F_2$ определим линейный замкнутый и плотно определенный оператор B_2, $\operatorname{dom} B_2 = W_2^2(D) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$. Положим $A_2 \equiv \mathrm{I}$.

Теорема 5. *Оператор* B_2 *сильно* A_2*-секториален.*

Доказательство. Утверждение теоремы следует из секториальности оператора B_2 [2, гл.1] ■

Положим $U = U_1 \times U_2$, $F = F_1 \times F_2$. Вектор u пространства U имеет вид $u = \operatorname{col}(u_\sigma, u_\pi, u_p, w_1, \ldots, w_K, u_b)$, где $\operatorname{col}(u_\sigma, u_\pi, u_p, w_1, \ldots, w_K) \in U_1$, а $u_b \in U_2$, $b_\sigma \in H_\sigma^2$, $b_\pi \in H_\pi^2$. Здесь $u_\sigma = \Sigma v$, $u_\pi = (\mathrm{I} - \Sigma)v = \Pi v$, $u_p = \overline{p}$. Элемент $f \in F$, где $f = \operatorname{col}(f_\sigma, f_\pi, \underbrace{0, \ldots, 0}_{K+1})$, $f_\sigma = \Sigma f$, $f_\pi = \Pi f$. Операторы L и M определены формулами $L = A_1 \otimes A_2$, $M = B_1 \otimes B_2$. Оператор $L \in L(U, F)$, а оператор $M : \operatorname{dom} M \to F$ линеен, замкнут и плотно определен, $\operatorname{dom} M = U_1 \times \operatorname{dom} B_2$.

Теорема 6. *Пусть* $\kappa^{-1} \notin \sigma(A)$, *тогда оператор* M *сильно* $(L, 1)$*-секториален.*

Доказательство. Из теоремы 4 и п. 3.2. [12, с. 74] вытекает, что оператор B_1 сильно A_1-секториален. В силу этого и теорем 3 и 5 справедливо утверждение теоремы 6. ■

Построим нелинейный оператор F. В нашем случае его можно представить в виде $F = F_1 \otimes F_2$, где $F_1 = F_1(u_\sigma, u_\pi, b) = \operatorname{col}(-\Sigma(((u_\sigma + u_\pi) \cdot \nabla)(u_\sigma + u_\pi) - 2\Omega \times (u_\sigma + u_\pi) + (\nabla \times b) \times b),$ $-\Pi(((u_\sigma + u_\pi) \cdot \nabla)(u_\sigma + u_\pi) - 2\Omega \times (u_\sigma + u_\pi) + (\nabla \times b) \times b), \underbrace{0, \ldots, 0}_{K+1}), F_2 = F_2(u_\sigma, u_\pi, b) = \nabla \times ((u_\sigma + u_\pi) \times b)$. В данном случае $U_M = U_1 \times \operatorname{dom} B_2$.

Теорема 7. *Оператор* F *принадлежит* $C^\infty(U_M; F)$.

Доказательство. Утверждение теоремы 7 вытекает из того, что при любых $u \in U_M$ оператор F'_u принадлежит $L(U_M; F)$, вторая производная Фреше F''_u оператора F – непрерывный билинейный оператор из $U_M \times U_M$ в F, а $F'''_u \equiv O$ (аналогично [12, с. 74]) ■

Итак, редукция задачи (1), (2) к задаче (3), (4) завершена.

3. Фазовое пространство и квазистационарные полутраектории

Далее будем отождествлять задачи (1), (2) и (3), (4). Перейдем теперь к проверке условий теорем 1, 2.

Лемма 1. *Пусть* $\kappa^{-1} \notin \sigma(A) \cup \sigma(A_\sigma)$. *Тогда оператор* R *бирасщепляющий, причем* $P_R \in L(U_M^0)$.

Доказательство. В силу теоремы 4 и результатов пункта 3.2. из [12] существует аналитическая полугруппа $\{U^t : t \in R_+\}$ разрешающих операторов уравнения (4). В нашем случае естественно представить ее в виде $U^t = V^t \times W^t$, где $V^t(W^t)$ – сужение оператора U^t на $U_1(U_2)$. Исходя из того, что оператор B_2 секториален, $W^t = \exp(tB_2)$, откуда следует, что ядро этой полугруппы $W^\circ = \{0\}$, а образ $W^1 = U_2$. Рассмотрим полугруппу $\{V^t : t \in R_+\}$. В силу теорем 4 и 6 и результатов пункта 3.2. из [12] данная полугруппа продолжима до группы $\{V^t : t\in R\}$. Ее ядро $V^0 = U_1^{00}\oplus U_1^{01}$, где $U_1^{00}=\{0\}\times\{0\}\times H_p\times\{0\}\times\ldots\times\{0\}(=\ker A_1$ в силу теоремы 4), а $U_1^{01}=\Sigma A_\kappa^{-1}A_{\kappa\pi}^{-1}\left[H_\pi^2\right]\times H_\pi^2\times\underbrace{\{0\}\times\ldots\times\{0\}}_{K+1}$. Здесь $A_\kappa = I-\kappa A$, $A_{\kappa\pi}$ – сужение оператора ΠA_κ^{-1} на H_π. Хорошо известно, что при условии $\kappa^{-1}\notin\sigma(A)\bigcup\sigma(A_\sigma)$, оператор $A_{\kappa\pi}: H_\pi\to H_\pi^2$ является топлинейным изоморфизмом [17]. Через U_1^1 обозначим образ V^1. Тогда из того что, оператор B_1 сильно $(A_1,1)$-секториален вытекает то, что пространство U_1 разлагается в прямую сумму подпространств $U_1 = U_1^{00}\oplus U_1^{01}\oplus U_1^1$. Построим оператор R (см. (5), (6)). В нашем случае $R = B_{10}^{-1}A_{10}\in L(U_1^{00}\oplus U_1^{01})$. Здесь $A_{10}(B_{10})$ – сужение оператора $A_1(B_1)$ на $U_1^{00}\oplus U_1^{01}$ (В силу соответствующих результатов из [12, с. 75] и теоремы 6, легко показать, что оператор B_{10}^{-1} существует). По построению $\ker R = U_1^{00}$, а в работе [14] показано, что $\operatorname{im} R = U_1^{01}$. Следовательно, оператор R бирасщепляющий. Через P_R обозначим проектор пространства $U_1^{00}\oplus U_1^{01}$ на U_1^{00} вдоль U_1^{01}. В силу конструкции пространства U_M проектор P_R принадлежит $L(U_M^0)$, где $U_M^0 = U_M\cap(U_1^{00}\oplus U_1^{01})(\equiv U_1^{00}\oplus U_1^{01})$. Итак, утверждение леммы 1 доказано. ■

Лемма 2. *В условиях леммы 1 любое решение задачи (1), (2) лежит во множестве*

$$M=\{u\in U_M : u_\pi = 0, b_\pi = 0, u_p = \Pi(\nu A_\sigma - (u_\sigma\cdot\nabla)u_\sigma + \sum_{m=1}^{M}\sum_{q=0}^{n_m-1}A_{m,q}\nabla^2 w_{m,q} - 2\Omega\times u_\sigma + (\nabla\times b_\sigma)\times b_\sigma)\}.$$

Доказательство. Формулами (2.2.9), (2.2.10) из [12] определим проекторы P_k, Q_k, $k=0,1$. Из соответсвующих результатов [12] и в силу того, что ядро $W^0=\{0\}$, следует, что $I-P=(P_0+P_1)\otimes O$, $Q=(I-Q_0-Q_1)\otimes I$, $P:U\to U^1$, $Q:F\to F^1$. Применим проектор $I-P$ к уравнению (4), тогда получим уравнения

$$\Pi(\nu A(u_\sigma+u_\pi)-((u_\sigma+u_\pi)\cdot\nabla)(u_\sigma+u_\pi)+$$
$$+\sum_{m=1}^{M}\sum_{q=0}^{n_m-1}A_{m,q}\nabla^2 w_{m,q} - u_p - 2\Omega\times(u_\sigma+u_\pi)+(\nabla\times b)\times b)=0, \tag{12}$$
$$Bu_\pi = 0,\quad Bb_\pi = 0.$$

В силу свойств оператора B и теоремы 1 получим необходимое условие квазистационарности полутраектории $u_\pi\equiv 0$, $b_\pi\equiv 0$. Это значит, что все решения нашей задачи (если они существуют) с необходимостью должны лежать в плоскости $B=\{u\in U_M : u_\pi = 0, b_\pi = 0\}$.

В силу того, что $\Pi u_p = u_p$, из первого уравнения (12) получаем соотношение (7), т.е. в нашем случае

$$u_p = \Pi(\nu A u_\sigma - (u_\sigma\cdot\nabla)u_\sigma + \sum_{m=1}^{M}\sum_{q=0}^{n_m-1}A_{m,q}\nabla^2 w_{m,q} - 2\Omega\times u_\sigma + (\nabla\times b_\sigma)\times b_\sigma). \tag{13}$$

Из тождества $P_0\equiv P_R$ следует, что второе и третье уравнение в (12) есть соотношение (8) применительно к нашему случаю. В силу этого, справедливо утверждение леммы 2. ■

Замечание 6. Из соотношения (13) вытекает условие A_2) теоремы 2 для любой точки $u_0^0\in U_M^{00}(\equiv U_1^{00}\times\{0\})$. Поэтому аналогично [12, с. 77] получаем, что множество M – простое банахово многообразие C^∞-диффеоморфное подпространству $U_1^1\times U_2$, является кандидатом на роль фазового пространства задачи (1), (2) ((11), (2)).

Лемма 3. В условиях леммы 1 выполняется соотношение (9).

Доказательство. Проверим условия (9), (10). Построим пространство $U_\alpha = U_1 \times \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$. Очевидно, данное пространство будет интерполяционным пространством для пары $[U, U_M]_\alpha$, где $\alpha = 1/2$. Как отмечалось ранее, полугруппа $\{U^t : t \in R_+\}$ продолжима до группы $\{V_1^t : t \in R\}$ на U_1^1, причем V_1^t – сужение оператора V^t на U_1^1. Так как $U_M^1 = U_M \bigcap U_1^1$ по построению, оператор B_1 непрерывен (в силу теоремы 4) и полугруппа $\{U^t : t \in R_+\}$ равномерно ограничена, получим неравенство

$$\int_0^\tau \left\| V_1^t \right\|_{L(U_1^1; U_M^1)} dt \le \mathrm{const} \left\| B_1 \right\|_{L(U_1, F_1)} \int_0^\tau \left\| V_1^t \right\|_{L(U_1^1)} dt < \infty, \quad \tau \in R_+. \tag{14}$$

Согласно неравенству Соболева [12, с. 77], полугруппа $\{W^t : t \in \overline{R}_+\}$ удовлетворяет оценке

$$\int_0^\tau \left\| W^t \right\|_{L(\mathrm{dom}\, B_2; \overset{\circ}{W}{}_2^1(D))} dt < \infty. \tag{15}$$

Пусть $U_\alpha^1 = U_\alpha \bigcap U^1$, где $U^1 = U_1^1 \times U_2$. Тогда из неравенств (14) и (15) следует, что справедливо утверждение леммы 3. ■

Теперь найдем оператор H, учитывая условие (10). Его естественно представить в виде $H = H_1 \otimes H_2$, причем $H_1 = A_{11}^{-1}(I - Q_0 - Q_1)F_1$, а $H_2 \equiv F_2$ (A_{11} – сужение оператора A_1 на U_1^1.). Для оператора H справедливо утверждение, аналогичное теореме 7 для оператора F, т.е. $H \in C^\infty(U_M^1; U_\alpha^1)$, где $U_\alpha^1 = U_\alpha \bigcap U^1$.

Итак, выполнены все условия теоремы 2, откуда вытекает справедливость следующей теоремы

Теорема 8. *Пусть $\kappa^{-1} \notin \sigma(A) \bigcup \sigma(A_\sigma)$. Тогда при любом u_0, таком, что $u_0 \in M$, и некотором $T \in R_+$ существует единственное решение $u = (u_\sigma, 0, u_p, u_b)$ задачи (1), (2), являющееся квазистационарной полутраекторией, причем $u(t) \in M$ при всех $t \in (0, T)$.*

Заключение. Следующим этапом исследования станет проведение вычислительного эксперимента для модели несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина–Фойгта в магнитном поле Земли. Кроме того было бы интересно перенести идеи и методы теории полулинейных уравнений соболевского типа на «стохастическую» ситуацию [15], а также на обратные и другие задачи [16, 17].

Автор выражает глубокую благодарность професору Т.Г. Сукачевой за постановку задачи и полезные советы, а также профессору Г.А. Свиридюку за интерес к данным исследованиям и поддержку.

Работа поддержана Министерством образования и науки Российской Федерации (государственное задание № 1.857.2014/К).

Литература

1. Осколков, А.П. Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина–Фойгта и жидкостей Олдройта / А.П. Осколков // Труды матем. ин-та АН СССР. – 1988. – № 179. – С. 126–164.

2. Хенри, Д. Геомерическая теория полулинейных параболических уравнений / Д. Хенри. – М.: Мир, 1985. – 376 с.

3. Hide, R. On planetary atmospheres and interiors / R. Hide. – Mathematical Problems in the Geophysical Sciences I, W.H. Reid ed., Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1971.

4. Осколков, А.П. Об одной квазилинейной параболической системе с малым параметром, аппроксимирующей систему Навье–Стокса / А.П. Осколков // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 1971. – Т. 21. – С. 79–103.

5. Ладыженская, О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О.А. Ладыженская. – М.: Физматгиз, 1961. – 204 с.

6. Темам, Р. Уравнение Навье–Стокса. Теория и численный анализ / Р. Темам. – М.: Мир, 1981. – 408 с.

7. Chen, F. On the differential system governing fluids in magnetic field with data in L^p/ F. Chen, P. Wang, C. Qu // Internat. J. Math. Math. Sci. – 1998. – V. 21, № 2. – P. 299–306.

8. Сукачева, Т.Г. Фазовое пространство одной задачи магнитогидродинамики / Т.Г. Сукачева, А.О. Кондюков // Дифф. уравнения. – 2015. – Т. 51, № 4. – С. 495–501.

9. Кондюков, А.О. Об одной модели магнитогидродинамики ненулевого порядка / А.О. Кондюков, Т.Г. Сукачева // XVI Всероссийский Симпозиум по прикладной и промышленной математике, летняя сессия, Челябинск, 21–27 июня 2015, с. 75.

10. Свиридюк, Г.А. Фазовые пространства одного класса операторных уравнений / Г.А. Свиридюк, Т.Г. Сукачева // Дифференц. уравнения– 1990. – Т. 26, № 2. – С. 250–258.

11. Свиридюк, Г.А. Задача Коши для одного класса полулинейных уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк, Т.Г. Сукачева // Сибирский математический журнал. – 1990. – Т. 31, № 5. – С. 109–119.

12. Матвеева, О.П. Математические модели вязкоупругих несжимаемых жидкостей ненулевого порядка / О.П. Матвеева, Т.Г. Сукачева. – Челябинск: Издательский Центр ЮУрГУ, 2014. – 101 с.

13. Свиридюк, Г.А. Квазистационарные траектории полулинейных динамических уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк // Изв. РАН. Сер. матем. – 1993. – Т. 57, № 3. – С. 192–207.

14. Свиридюк, Г.А. Об одной модели слабосжимаемой вязкоупругой жидкости / Г.А. Свиридюк // Изв. вузов. Матем. – 1994. – № 1. – С. 62–70.

15. Favini, A. Linear Sobolev Type Equations with Relatively *p*-Sectorial Operators in Space of “Noises” / A. Favini, G.A. Sviridyuk, N.A. Manakova // Hidawi Publishing Corporation. Abstract and Applied Analysis. – Vol. 2015. – p. 8.

16. Favini, A. Perturbation methods for inverse problems related to degenerate differential equations / A. Favini // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2014. – Vol. 1, № 2. – P. 32–44.

17. Elliptic Problems with Robin Boundary Coefficient–Operator Conditions in General L_p Sobolev Spaces and Applications / M. Cheggag, A. Favini, R. Labbas , S. Maingot , A. Medeghri // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software. –2015 – Vol. 8, no. 3. – P. 56–77.

Поступила в редакцию 18 мая 2016 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series “Mathematics. Mechanics. Physics”
2016, vol. 8, no. 3, pp. 13–21

DOI: 10.14529/mmph160302

GENERALIZED MODEL OF INCOMPRESSIBLE VISCOELASTIC FLUID IN THE EARTH'S MAGNETIC FIELD

A.O. Kondyukov
Yaroslav-the-Wise Novgorod State University, Veliky Novgorod, Russian Federation
E-mail: k.a.o_leksey999@mail.ru

The initial boundary value problem for a system of partial differential equations modeling the dynamics of Kelvin-Voigt incompressible viscoelastic fluid of higher order in the Earth's magnetic field is studied. Problems of this type arise in the study of the process of rotation of a certain volume of fluid in the Earth's magnetic field. Research of the models of Kelvin–Voigt media has its source in the scientific works by A.P. Oskolkov, who summarizes the system of Navier–Stokes equations and theorems of unique existence of solutions to the corresponding initial boundary value problems. Subsequently, these models are studied by G.A. Sviridyuk and his followers. This model is studied for the first time and summarizes corresponding results for the model of magnetohydrodynamics of the nonzero order. The article deals with local unique solvability of chosen problem in the framework of the theory of autonomous semilinear Sobolev type equations. The main method is the method of phase space. The basic tool is the notion of *p*-sectorial operator and resolving singular semigroup of operators generated by it. In other words, the semigroup approach is used in the research. Besides the introduction, conclusion and reference list, the article includes three parts. In the first part of the article, the abstract Cauchy problem for semilinear autonomous equation of Sobolev type is presented. Here the concepts of Cauchy problem for Sobolev type equations, the phase space, quasi-stationary semitrajectory are introduced, and the theorems providing necessary and sufficient conditions for the existence of quasi-stationary semitrajectories are presented. In the second part, the Cauchy–Dirichlet problem is considered as a specific interpretation of the abstract problem. In the third part, the existence of a unique solution to the problem, which is a quasi-stationary semitrajectory is proved, and the description of its phase space is obtained. In conclusion, the possible ways of further research are outlined.

Keywords: incompressible viscoelastic fluid; Sobolev type equations; phase space.

References

1. Oskolkov A.P. *Trudy matem. instituta AN SSSR*, 1988, no. 179, pp. 126–164. (in Russ.).

2. Henry D. *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1981, 348 p. (in Eng.). DOI: 10.1007/BFb0089647

3. Hide R. On Planetary Atmospheres and Interiors, in *Mathematical Problems in the Geophisical Sciences*. 1, W.H. Raid, Ed., Amer. Math. Soc., Providence R.I., 1971.

4. Oskolkov A.P. *Zapiski nauchnogo seminara LOMI*, 1971, Vol. 21, pp. 79–103. (in Russ.).

5. Ladyzhenskaya O.A. *The mathematical theory of viscous incompressible flow*. N.Y., London, Paris, Gordon and Breach, 1969, 234 p.

6. Temam R. *Uravnenie Nav'e–Stoksa. Teoriya i chislennyy analiz* [Navier-Stokes Equation. Theory and Numerical Analysis]. Moscow, Mir Publ., 1981, 408 p. (in Russ.). [Temam R. Navier-Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis, Amsterdam–New York–Oxford, North-Holland, 1977, 500 p. (in Eng.).]

7. Chen F., Wang P., Qu C. On the differential system governing fluids in magnetic field with data in L^p. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 1998, Vol. 21, no. 2, p. 299–306. DOI: 10.1155/S0161171298000416

8. Sukacheva T.G., Kondyukov A.O. Phase space of a model of magnetohydrodynamics. *Differential Equations*, 2015, Vol. 51, no. 4, pp. 502–509. DOI: 10.1134/S0012266115040072

9. Kondyukov A.O., Sukacheva T.G. Ob odnoy modeli magnitogidrodinamiki nenulevogo poryadka [About a magnetohydrodynamics model of non zero order]. *XVI Vserossiyskiy Simpozium po prikladnoy i promyshlennoy matematike, letnyaya sessiya, Chelyabinsk, 21–27 iyunya 2015* [XVI All-Russian Symposium on Applied and Industrial Mathematics, summer session, Chelyabinsk, 21–27 June 2015], p. 75.

10. Sviridyuk G.A., Sukacheva T.G. *Differ. Uravn.,* 1990, Vol. 26, no. 2, pp. 250–258. (in Russ.).

11. Sviridyuk G.A., Sukacheva T.G. *Sibirskiy matematicheskiy zhurnal*, 1990, Vol. 31, no. 5, pp. 109–119.(in Russ.).

12. Matveeva O.P., Sukacheva T.G. *Matematicheskie modeli vyazkouprugikh neszhimaemykh zhidkostey nenulevogo poryadka* [Mathematical models of viscoelastic incompressible fluid of nonzero order], Chelyabinsk: Publ. Center of the South Ural State University, 2014, 101 p. (in Russ.).

13. Sviridyuk G.A. *Izv. RAN. Ser. matem*, 1993, Vol. 57, no. 3, pp. 192–207. (in Russ.).

14. Sviridyuk G.A. On a model of the dynamics of a weakly compressible viscoelastic fluid. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 1994, Vol. 38, no. 1, pp. 59–68. (in Russ.).

15. Favini A., Sviridyuk G.A., Manakova N.A. Linear Sobolev Type Equations with Relatively. *p*-Sectorial Operators in Space of "Noises", *Abstract and Applied Analysis*, 2015, p. 8, Article ID 697410. DOI:10.1155/2015/697410

16. Favini A. Perturbation methods for inverse problems related to degenerate differential equations. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2014, Vol. 1, no. 2, pp. 32–44.

17. Cheggag M., Favini A., Labbas R., Maingot S., Medeghri A. Elliptic Problems with Robin Boundary Coefficient–Operator Conditions in General L^p Sobolev Spaces and Applications. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2015, Vol. 8, no. 3, pp. 56–77. DOI: 10.14529/mmp150304

Received May 18, 2016