УДК 517.958 DOI: 10.14529/mmph160303

ОДНОРОДНАЯ МОДЕЛЬ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ НЕНУЛЕВОГО ПОРЯДКА

О.П. Матвеева, Т.Г. Сукачева
Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого, Великий Новгород, Российская Федерация
E-mail: oltan.72@mail.ru

Рассматривается задача Коши–Дирихле для однородной модели динамики несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина–Фойгта ненулевого порядка. Данная задача исследуется с использованием теории полулинейных уравнений соболевского типа. Задача Коши–Дирихле для соответствующей системы дифференциальных уравнений в частных производных сводится к абстрактной задаче Коши для указанного уравнения. Доказана теорема существования и единственности решения указанной задачи, являющегося квазистационарной траекторией и получено описание ее фазового пространства.

Ключевые слова: уравнение соболевского типа; фазовое пространство; несжимаемая вязкоупругая жидкость.

Введение

Система уравнений

$$\begin{cases} (1-æ\nabla^2)v_t = \nu\nabla^2 v - (v\cdot\nabla)v + \sum\limits_{l=1}^{K}\beta_l\nabla^2 w_l - \nabla p + f, \\ \\ 0 = \nabla\cdot v, \quad \dfrac{\partial w_l}{\partial t} = v + \alpha_l w_l, \quad \alpha_l \in R_-, \quad l = \overline{1,K} \end{cases} \tag{1}$$

описывает модель динамики несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина–Фойгта порядка $K > 0$ [1].

Физический смысл функции $v = (v_1,\ldots,v_n), v_i = v_i(x,t)$, $x \in \Omega$ – скорость течения, функция $p = p(x,t)$ соответствует давлению. Здесь $\Omega \subset R^n$, $n = 2,3,4$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. Параметры $\nu \in R_+$ и $æ \in R$ отвечают за вязкие и упругие свойства жидкости соответственно. Параметры $\beta_l \in R_+$ характеризуют время ретардации (запаздывания) давления, функция $f = f(f_1,...,f_n)$, $f_i = f_i(x,t)$ определяет внешнее воздействие на жидкость.

Для системы (1) рассматривается задача Коши–Дирихле $(f \equiv 0)$

$$\begin{cases} v(x,0) = v_0(x),\ p(x,0) = p_0(x),\ w_l(x,0) = w_{l0}(x)\ \forall x \in \Omega, \\ v(x,t) = 0,\ w_l(x,t) = 0, l = \overline{1,K}, \forall (x,t) \in \partial\Omega \times R. \end{cases} \tag{2}$$

Разрешимость задачи (1), (2) рассматривается в рамках теории полулинейных уравнений соболевского типа [2, 3]. В первой части статьи изложена формальная схема задачи Коши для полулинейных уравнений указанного типа, а во второй части задача (1), (2) приводится как конкретная интерпретация формальной схемы. Отметим, что задача Тейлора для соответствующих моделей изучалась в работах [4, 5].

1. Формальная схема

Пусть операторы $\mathrm{L} \in L(U;F)$ и $\mathrm{M} \in C^\infty(U;F)$. Здесь U и F – банаховы пространства. Рассмотрим задачу Коши

$$u(0) = u_0 \tag{3}$$

для полулинейного уравнения соболевского типа

$$\mathrm{L}\dot{u} = \mathrm{M}(u). \tag{4}$$

Линейный оператор $\mathrm{L}: U \to F$ называется *бирасщепляющим*, если его образ $\operatorname{im}\mathrm{L}$ и ядро $\ker\mathrm{L}$ дополняемы соответственно в пространствах U и F. Пусть оператор L – бирасщепляющий, обозначим через $\mathrm{M}'_{u_0} \in L(U;F)$ производную Фреше оператора M в точке $u_0 \in U$ и рассмотрим цепочки M'_{u_0} – присоединенных векторов оператора L, которые выбираются из некоторого дополнения $\operatorname{coim}\mathrm{L} = U - \ker\mathrm{L}$ к ядру $\ker\mathrm{L}$. Введем условие (A1). Независимо от выбора $\operatorname{coim}\mathrm{L}$ любая цепочка M'_{u_0} – присоединенных векторов содержит точно p элементов для любого вектора $\varphi \in \ker\mathrm{L} \setminus \{0\}$.

Через $\tilde{\mathrm{L}}$ обозначим сужение оператора L на $\operatorname{coim}\mathrm{L}$. По теореме Банаха о замкнутом графике оператор $\tilde{\mathrm{L}}: \operatorname{coim}\mathrm{L} \to \operatorname{im}\mathrm{L}$ является топлинейным изоморфизмом. Пусть $U_0^0 = \ker\mathrm{L}$ и построим множества $U_q^0 = \tilde{\mathrm{A}}^q[U_0^0]$, $q = \overline{1,p}$, где $\tilde{\mathrm{A}} = \tilde{\mathrm{L}}^{-1}\mathrm{M}'_{u_0}$. Множества $U_q^0 \subset \operatorname{coim}\mathrm{L}$ являются линейными пространствами, то образ $F_p^0 = \mathrm{M}'_{u_0}[U_p^0]$ есть тоже линейное пространство, при этом $F_p^0 \cap \operatorname{im}\mathrm{L} = \{0\}$ (при выполнении (A1)). Введем еще одно условие (A2). $F_p^0 \oplus \operatorname{im}\mathrm{L} = F$.

Обозначим через $\mathrm{Q}_\mathrm{p}: F \to F_p^0$ проектор вдоль $\operatorname{im}\mathrm{L}$ и строим оператор $\mathrm{A} = \tilde{\mathrm{L}}^{-1}(\mathrm{I} - \mathrm{Q}_\mathrm{p})\mathrm{M}'_{u_0}$. Заметим, что $\mathrm{A}[U_q^0] = U_{q+1}^0$, $q = \overline{0, p-1}$, $\mathrm{A}[U_p^0] = \{0\}$. Отсюда

$$\mathrm{A}^\mathrm{q}[U_r^0] = \begin{cases} \{0\}, & q + r > p, \\ U_{q+r}^0, & q + r \le p. \end{cases} \tag{5}$$

Построим оператор D, котрый является сужением оператора $\mathrm{Q}_\mathrm{p}\mathrm{M}'_{u_0}\mathrm{A}^\mathrm{p}: U \to F_p^0$ на U_0^0. По построению $\mathrm{D}[U_0^0] = F_p^0$ и $\mathrm{D} \in L(U_0^0; F_p^0)$. Кроме того, $\ker\mathrm{D} = \{0\}$, иначе вектор $\varphi \in \ker\mathrm{D} \setminus \{0\} \subset \ker\mathrm{L} \setminus \{0\}$ имеет бесконечную цепочку $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p, 0, \ldots\}$ M'_{u_0} – присоединенных векторов. Согласно уже цитированной теореме Банаха оператор $\mathrm{D}: U_0^0 \to F_p^0$ является топлинейным изоморфизмом.

Через $\mathrm{P}_0: U \to U_0^0$ обозначим проектор вдоль $\operatorname{coim}\mathrm{L}$ и построим операторы $\mathrm{P}_\mathrm{q} = \mathrm{A}^\mathrm{q}\mathrm{D}^{-1}\mathrm{Q}_\mathrm{p}\mathrm{M}'_{u_0}\mathrm{A}^{\mathrm{p}-\mathrm{q}}$, $q = \overline{1,p}$. Операторы $\mathrm{P}_\mathrm{q}: U \to U_q^0$ – проекторы. Действительно, $\operatorname{im}\mathrm{P}_\mathrm{q} = U_q^0$, $\mathrm{P}_\mathrm{q} \in L(U)$ и $\mathrm{P}_\mathrm{q}^2 = \mathrm{A}^\mathrm{q}(\mathrm{D}^{-1}(\mathrm{Q}_\mathrm{p}\mathrm{M}'_{u_0}\mathrm{A}^\mathrm{p}))\mathrm{D}^{-1}\mathrm{Q}_\mathrm{p}\mathrm{M}'_{u_0}\mathrm{A}^{\mathrm{p}-\mathrm{q}} = \mathrm{P}_\mathrm{q}$ согласно определению оператора D. Из (6) и определения проектора P_0

$$\mathrm{P}_\mathrm{q}\mathrm{P}_\mathrm{r} = \mathrm{P}_\mathrm{r}\mathrm{P}_\mathrm{q} = \mathrm{O}, \qquad q, r = \overline{0,p}, \qquad q \ne r.$$

Пусть $U^0 = \oplus_{q=0}^{p} U_q^0$, $\mathrm{P} = \sum_{\mathrm{q}=0}^{\mathrm{p}} \mathrm{P}_\mathrm{q}$. Оператор $\mathrm{P} \in L(U)$ – проектор, $\operatorname{im}\mathrm{P} = U^0$. Пусть $U^1 = \ker\mathrm{P}$, тогда $U = U^0 \oplus U^1$.

Рассмотрим линеалы $F_q^0 = \mathrm{M}'_{u_0}[U_q^0]$, $q = \overline{0, p-1}$, и построим оператор $\mathrm{B} = \mathrm{M}'_{u_0}\tilde{\mathrm{L}}^{-1}(\mathrm{I} - \mathrm{Q}_\mathrm{p})$.

Так как $\mathrm{B}[F_q^0] = F_{q+1}^0$, $q = \overline{0, p-1}$, $\mathrm{B}[F_p^0] = \{0\}$, то

$$\mathrm{B}^\mathrm{q}[F_r^0] = \begin{cases} \{0\}, & q + r > p, \\ F_{q+r}^0, & q + r \le p. \end{cases} \tag{6}$$

Из (6) аналогично следует, что операторы $\mathrm{Q_q} = \mathrm{B^q M'_{u_0} D^{-1} Q_p B^{p-q}}$, $q = \overline{0, p-1}$ тоже являются проекторами на F_q^0, причем $\mathrm{Q_q Q_r} = \mathrm{Q_r Q_q} = \mathrm{O}$, $\quad r, q = \overline{0, p}$, $\quad q \ne r$.

Положим, $F^0 = \oplus_{q=0}^{p} F_q^0$, $\mathrm{Q} = \sum\limits_{\mathrm{q=0}}^{\mathrm{p}} \mathrm{Q_q}$. Оператор $\mathrm{Q} \in \mathrm{L}(F)$ – проектор, значит $F = F^0 \oplus F^1$, где $F^0 = \mathrm{im\,Q}$, $\quad F^1 = \ker \mathrm{Q}$.

Отметим, что по построению

$$\mathrm{LA^q D^{-1} Q_p} = \mathrm{B^{q-1} M'_{u_0} D^{-1} Q_p}, \quad q = \overline{1, p}. \tag{7}$$

Кроме того,

$$\mathrm{BL} = \mathrm{M'_{u_0}(I - P_0)}. \tag{8}$$

Из (7), (8) получаем при $q = \overline{1, p}$

$$\begin{aligned} \mathrm{LP_q} &= \mathrm{LP_q(I-P_0)} = \mathrm{LA^q D^{-1} Q_p M'_{u_0} A^{p-q}(I-P_0)} = \\ &= \mathrm{B^{q-1} M'_{u_0} D^{-1} Q_p B^{p-q} M'_{u_0}(I-P_0)} = \mathrm{Q_{q-1} L}. \end{aligned} \tag{9}$$

Уравнение (4) перепишем в виде

$$\mathrm{L}\dot{u} = \mathrm{M'_{u_0}}\, u + \mathrm{F}(u), \tag{10}$$

где оператор $\mathrm{F} = \mathrm{M} - \mathrm{M'_{u_0}} \in C^\infty(U;F)$ по построению. На уравнение (10) подействовав последовательно проекторами $\mathrm{Q_q}$, $q = \overline{0, p}$, и $\mathrm{I-Q}$, получаем согласно (9) эквивалентную систему

$$\begin{cases} \mathrm{L}\dot{u}_1^0 = \mathrm{M'_{u_0}}\, u_0^0 + \mathrm{F_0}(u), \\ \quad \dots \\ \mathrm{L}\dot{u}_p^0 = \mathrm{M'_{u_0}}\, u_{p-1}^0 + \mathrm{F_{p-1}}(u), \\ \\ 0 = \mathrm{M'_{u_0}}\, u_p^0 + \mathrm{F_p}(u), \\ \\ \mathrm{L}\dot{u}^1 = \mathrm{(I-Q)\,M}(u), \end{cases} \tag{11}$$

где $u_q^0 \in U_q^0$, $\mathrm{F_q}(u) = \mathrm{Q_q F}(u) + \mathrm{Q_q M'_{u_0}}\, u^1$, $q = \overline{0, p}$, $u^1 \in U^1$. Значит, доказана следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть операторы* $\mathrm{L} \in L(U;F)$, $\mathrm{M} \in C^\infty(U;F)$, *при этом* L *– бирасщепляющий оператор, и пусть выполнены условия (A1) и (A2). Тогда уравнение* (4) *будет эквивалентно системе* (11).

Замечание 1. В условиях леммы 1 оператор $\mathrm{M'_{u_0}}$ (L, p)-ограничен в точке u_0 [6].

Теперь займемся поисками решения для задачи (3), (4).

Определение 1. *Решением* задачи (3), (4) будем называть вектор–функцию $u \in C^\infty((-t_0;t_0);U)$, $\quad t_0 = t_0(u_0) > 0$, удовлетворяющую уравнению (4) и условию (3).

Введем еще два определения.

Определение 2. Банахово C^k-многообразие B называется *фазовым пространством* для уравнения (4), если $\forall u_0 \in B$ существует единственное решение $u = u(t)$ для задачи (3), (4) на интервале $(-t_0, t_0)$ [2].

Определение 3. Решение $u = u(t)$ задачи (3), (4), для которого выполняется $\mathrm{L}\dot{u}^0 \equiv 0$ $\ \forall t \in (-t_0;t_0)$, где $u^0 = \mathrm{P}u$, назовем *квазистационарной траекторией* для уравнения (4).

Для того, чтобы выделить подмножество квазистационарных траекторий из множества всевозможных решений задачи (3), (4) введем в рассмотрение еще одно условие.

Рассмотрим множество $U = \{u \in U : u_q^0 = \mathrm{const},\ q = \overline{1, p}\}$. Очевидно, U – полное аффинное многообразие, которое моделируется подпространством $U_0^0 \oplus U^1$. Пусть точка $u_0 \in U$, через O_{u_0} обозначим некоторую окрестность $O_{u_0} \subset U$ точки u_0.

(A3). $\quad \mathrm{F_q}(u) \equiv 0 \qquad \forall u \in O_{u_0}, \quad q = \overline{1, p}.$

Теорема 1. *Пусть*

(i) справедливы условия леммы 1;

(ii) точка $u_0 \in B$, где $B = \{u \in U : \ \mathrm{Q_0 M}(u) = 0\}$;

(iii) выполняется условие (A3) .

Тогда существует единственное решение для задачи (3),(4), которое является квазистационарной траекторией, при этом $u(t) \in B, \quad \forall t \in (-t_0; t_0)$.

Доказательство. Предположим, что решение задачи (3), (4) уже найдено. Тогда из (11) по условию (A3), следует, что $\mathrm{L}\dot{u}^0 \equiv 0$, значит, решение будет являться квазистационарной траекторией. Установим существование единственного решения.

Согласно лемме 1 и условию (A3) система (11) редуцируется к следующему виду в окрестности O_{u_0}

$$\begin{cases} 0 = \mathrm{M}'_{\mathrm{u}_0}\, u_0^0 + \mathrm{F}_0(u), \\ \\ \mathrm{L}\dot{u}^1 = (\mathrm{I} - \mathrm{Q})\,\mathrm{M}(u). \end{cases} \tag{12}$$

Отметим, что по построению оператор $\mathrm{M}'_{\mathrm{u}_0} : U_0^0 \to F_0^0$ явлется невырожденным, и $\mathrm{F}'_{0\mathrm{u}}|_{u=u_0} \equiv \mathrm{O}$, где через $\mathrm{F}'_{0\mathrm{u}}$ здесь обозначена производная Фреше для оператора F_0 в точке u. Тогда в силу теоремы о неявной функции будет существовать окрестность $O_{u_0}^1 \subset (\mathrm{I} - \mathrm{P})[O_{u_0}]$ и вектор-функция

$$\delta \in C^\infty(O_{u_0}^1; O_{u_0}^0),$$

где $O_{u_0}^0 = \mathrm{P}[O_{u_0}]$, такие, что $u(t) = u_0^0(t) + \sum_{q=1}^{p} u_q^0 + u^1$, причем $u(t) \in B, \ \forall t \in R$. Здесь $u_0^0(t) = \delta(u^1), \quad \forall u^1 \in O_{u_0}^1$, а $u_q^0 = P_q u_0 = \mathrm{const}$ при $q = \overline{1, p}.$

Из (9) следует, что $\mathrm{QL} = \mathrm{LP}$. Поэтому оператор $\mathrm{L} : U^1 \to F^1$. Обозначим через L_1 сужение оператора L на U^1. Оператор $\mathrm{L}_1 \in L(U^1; F^1)$ будет инъективен по построению. Установим сюрьективность этого оператора. Пусть $f^1 \in F^1$. Поэтому существует $\tilde{u} = \tilde{\mathrm{L}}^{-1} f^1 \in \mathrm{coim}\,\mathrm{L}$. Пусть $\mathrm{P}\tilde{u} \neq 0$, т.е. $\mathrm{P}\tilde{u} = \sum_{q=1}^{p} \mathrm{P_q}\,\tilde{u} = \sum_{q=1}^{p} \tilde{u}_q^0 \neq 0$. Тогда $\mathrm{L}\tilde{u} = \mathrm{LP}\tilde{u} + \mathrm{L}(\mathrm{I} - \mathrm{P})\tilde{u} = \sum_{q=1}^{p} \mathrm{L}\tilde{u}_q^0 + \mathrm{L}_1(\mathrm{I} - \mathrm{P})\tilde{u} = f^1 \notin F^1$. Противоречие. Значит оператор $\mathrm{L}_1 : U^1 \to F^1$ будет непрерывно биективен. Через L^{-1} обозначим сужение оператора $\tilde{\mathrm{L}}^{-1}$ на F^1.

Из всего вышесказанного вытекает, что система (12) на $O_{u_0}^1$ может быть редуцирована к виду

$$\dot{u}^1 = \mathrm{L}^{-1}(\mathrm{I} - \mathrm{Q})\,\mathrm{M}(\delta(u^1; t) + (\mathrm{P} - \mathrm{P}_0)u^0 + u^1) \equiv \Phi(u^1), \tag{13}$$

где $\Phi \in C^\infty(O^1_{u_0}; U^1)$. Однозначная локальная разрешимость является классическим результатом для задачи Коши $u^1(0) = (\mathrm{I} - \mathrm{P})u_0$ уравнения (13). Квазистационарная траектория будет иметь вид $u(t) = \delta(u^1(t)) + u^1(t)$, где $u^1 \in C^\infty((-t_0, t_0); O^1_{u_0})$ – решение задачи Коши уравнения (13).

2. Интерпретация формальной схемы

Модифицируем систему (1)

$$\begin{cases} (1 - æ\nabla^2)v_t = \nu\nabla^2 v - (v \cdot \nabla)v + \sum\limits_{l=1}^{K} \beta_l \nabla^2 w_l - \overline{p}, \\ 0 = \nabla(\nabla \cdot v), \quad \dfrac{\partial w_l}{\partial t} = v + \alpha_l w_l, \quad \alpha_l \in \mathbf{R}_-, \quad l = \overline{1, K}. \end{cases} \tag{14}$$

Замена $\overline{p} = \nabla p$ объясняется тем, что в большинстве задач гидродинамики рассматривать градиент предпочтительнее, чем давление.

Перейдем от задачи (14), (2) к задаче (4), (3). Положим

$$U = \oplus_{l=0}^{K} U_l, \qquad F = \oplus_{l=0}^{K} F_l, \tag{15}$$

где $U_0 = H^2_\sigma \times H^2_\pi \times H_p$, $F_0 = H_\sigma \times H_\pi \times H_p$, $U_i = H^2 \cap \overset{\circ}{H}{}^1 = H^2_\sigma \times H^2_\pi$, $F_i = L^2 = H_\sigma \times H_\pi$, $i = \overline{1, K}$. H^2_σ – подпространство соленоидальных векторов пространства $H^2 \cap \overset{\circ}{H}{}^1$, $H^2 = (W^2_2(\Omega))^n$, $\overset{\circ}{H}{}^1 = (\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega))^n, H^2_\pi$ – ортогональное (в смысле $L^2(\Omega) = (L^2(\Omega))^n$) дополнение к H^2_σ, H_σ и H_π – замыкания подпространств H^2_σ и H^2_π в норме L^2 соответственно; $H_p = H_\pi$.

Через $\Sigma : L^2(\Omega) \to H_\sigma$ обозначим ортопроектор вдоль H_π. Тогда $\Sigma \in L(H^2 \cap \overset{\circ}{H}{}^1)$, при этом $\operatorname{im}\Sigma = H^2_\sigma, \ker\Sigma = H^2_\pi$. Элемент пространства U – вектор, $\vec{u}(x,t)$ будет иметь вид $\vec{u}(x,t) = (u_\sigma, u_\pi, u_p, w_1, \ldots, w_K)$, где $u_\sigma = \Sigma v$, $u_\pi = (\mathrm{I} - \Sigma)v$, $u_p = \overline{p}$, и $\vec{u}(0) = (u_{\sigma_0}, u_{\pi_0}, u_{p_0}, w_{1_0}, \ldots, w_{K_0})$, где $u_{\sigma_0} = \Sigma v_0$, $u_{\pi_0} = (\mathrm{I} - \Sigma)v_0$, $u_{p_0} = \overline{p}_0$, $w_{l_0} = w_l(x, 0)$, $l = \overline{1, K}$, $\vec{u}(x,t) = 0 \quad \forall (x,t) \in \partial\Omega \times R$.

Операторы $\mathrm{L}, \mathrm{M} : U \to F$ определим формулами

$$\mathrm{L} = \begin{pmatrix} \hat{\mathrm{L}} & 0 \\ 0 & \mathrm{E}_K \end{pmatrix}, \tag{16}$$

где $\hat{\mathrm{L}} = \begin{pmatrix} \Sigma \mathrm{A}_æ \Sigma & 0 & 0 \\ 0 & \Pi \mathrm{A}_æ \Pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\Pi = \mathrm{I} - \Sigma$, $\mathrm{A}_æ = 1 - æ\nabla^2$;

$$\mathrm{M}(\vec{u}) = \mathrm{M}_1 \vec{u} + \mathrm{M}_2(\vec{u}), \tag{17}$$

где $\mathrm{M}_1 = \begin{pmatrix} \mathrm{M}_{11} & \mathrm{M}_{12} \\ \mathrm{M}_{21} & \mathrm{M}_{22} \end{pmatrix}$, $M_{11} = \begin{pmatrix} \nu\Sigma\Delta & \nu\Sigma\Delta & 0 \\ \nu\Pi\Delta & \nu\Pi\Delta & -\mathrm{I} \\ \Sigma\mathrm{C} & \Pi\mathrm{C} & 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{M}_{12} = \begin{pmatrix} \beta_1\Sigma\Delta & \ldots & \beta_K\Sigma\Delta \\ \beta_1\Pi\Delta & \ldots & \beta_K\Pi\Delta \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$, M_{21} содержит K строк вида $(\mathrm{I}, \mathrm{I}, 0)$, $\mathrm{M}_{22} = \operatorname{diag}[\alpha_1, \ldots, \alpha_K]$, $\mathrm{M}_2 = (\Sigma \mathrm{B}(u_\sigma + u_\pi), \Pi \mathrm{B}(u_\sigma + u_\pi), 0, \ldots, 0)^T$. Здесь $\mathrm{B}(u_\sigma + u_\pi) = -((u_\sigma + u_\pi) \cdot \nabla)(u_\sigma + u_\pi)$, $\mathrm{C}(u_\sigma + u_\pi) = \nabla(\nabla \cdot (u_\sigma + u_\pi))$.

Лемма 2. *Пусть пространства* U, F *определены формулами* (15), *при этом* $n = 2, 3, 4$, *а операторы* $\mathrm{L}, \mathrm{M} : U \to F$ *определены формулами* (16), (17). *Тогда:* (i) *оператор* $\mathrm{L} \in L(U; F)$, *причем если* $æ^{-1}\notin\sigma(-\nabla^2)$, *то* $\ker \mathrm{L}=\{0\}\times\{0\}\times H_p\times\underbrace{\{0\}\ldots\{0\}}_{K}$, $\operatorname{im}\mathrm{L}=H_\sigma\times H_\pi\times\{0\}\times F_1\times\ldots\times F_K$; (ii) *оператор* $\mathrm{M}\in C^\infty(U;F)$.

Доказательство. Утверждение (i) леммы 1 является очевидным, а утверждение (ii) легко проверяется непосредственно. Оператор

$$\mathrm{M}'_u=\mathrm{M}_1+\mathrm{M}_3, \tag{18}$$

где $\mathrm{M}_3=\begin{pmatrix}\hat{\mathrm{M}}_3 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $\hat{\mathrm{M}}_3=\begin{pmatrix}\Sigma\mathrm{B}_\sigma & \Sigma\mathrm{B}_\pi\\ \Pi\mathrm{B}_\sigma & \Pi\mathrm{B}_\pi\end{pmatrix}$, $\mathrm{B}_\sigma(\mathrm{B}_\pi)$ – частная производная Фреше оператора B в точке $u_\sigma+u_\pi$ по $u_\sigma(u_\pi)$. Очевидно, $\forall n\ge 3$ $\forall u\in U$ $\mathrm{M}_u^{(n)}\equiv 0$.

Таким образом, задача (14), (2) редуцирована к задаче (4), (3).

Приступим к проверке выполнимости условий (A1)–(A3). Обозначим через $\mathrm{A}_{æ\sigma}$ сужение оператора $\Sigma\mathrm{A}_æ\Sigma$ на H_σ^2.

Лемма 3. *Пусть выполняются условия леммы* 2, *причем* $\ker\mathrm{A}_{æ\sigma}=\{0\}$. *Тогда любой вектор* $\varphi\in\ker\mathrm{L}\setminus\{0\}$ *имеет точно один* M'_u*– присоединенный вектор независимо от точки* $u\in U$.

Доказательство. Пусть вектор $\varphi=(0,0,\varphi_p,0,\ldots,0)\in\ker\mathrm{L}$, $\varphi_p\ne 0$. Найдем вектор $\psi\in U$ такой, что $\mathrm{L}\psi=\mathrm{M}'_u\varphi$. Из (16) и (18) следует система

$$\mathrm{A}_{æ\sigma}\psi_\sigma=0,\qquad \Pi\mathrm{A}_æ\psi_\pi=-\varphi_p. \tag{19}$$

Из (19) получаем $\psi_\sigma=0$. Значит, если $\psi_\pi=0$, то $\varphi_p=0$. Поэтому $\psi_\pi\ne 0$.

Пусть

$$\tilde{\mathrm{L}}^{-1}=\begin{pmatrix}\hat{\mathrm{L}}^{-1} & 0\\ 0 & \mathrm{E}_K\end{pmatrix}, \tag{20}$$

где $\hat{\mathrm{L}}^{-1}=\begin{pmatrix}\Sigma\mathrm{A}_æ^{-1}\Sigma & 0 & 0\\ 0 & \Pi\mathrm{A}_æ^{-1}\Pi & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

Так как $\tilde{\mathrm{L}}^{-1}\mathrm{L}=\begin{pmatrix}\Sigma_\Pi & 0\\ 0 & \mathrm{E}_K\end{pmatrix}\in L(U)$, где $\Sigma_\Pi=\begin{pmatrix}\Sigma & 0 & 0\\ 0 & \Pi & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, а $\mathrm{L}\tilde{\mathrm{L}}^{-1}\in L(F)$, формально имеет такой же вид, то $\psi_\sigma=0$, $\psi_\pi=-\Pi\mathrm{A}_æ^{-1}\varphi_p$, компонента ψ_p вектора ψ произвольна, а все остальные K компонент вектора ψ будут равны нулю.

Далее

$$\mathrm{M}'_u\psi=(\Sigma(\tilde{\mathrm{B}}_\sigma\psi_\sigma+\tilde{\mathrm{B}}_\pi\psi_\pi),\Pi(\tilde{\mathrm{B}}_\sigma\psi_\sigma+\tilde{\mathrm{B}}_\pi\psi_\pi)-\psi_p,\mathrm{C}\psi_\pi,\ldots)^T,$$

где $\tilde{\mathrm{B}}(u_\sigma+u_\pi)=\nu\nabla^2(u_\sigma+u_\pi)-((u_\sigma+u_\pi)\cdot\nabla)(u_\sigma+u_\pi))$, $\tilde{\mathrm{B}}_\sigma(\tilde{\mathrm{B}}_\pi)$ – частная производная Фреше оператора $\tilde{\mathrm{B}}$ в точке $u_\sigma+u_\pi$ по $u_\sigma(u_\pi)$. Так как $\psi_\pi\ne 0$, то $\mathrm{C}\psi_\pi\ne 0$. Следовательно, $\mathrm{M}'_u\psi\notin\operatorname{im}\mathrm{L}$ независимо от $u\in U$. Условие (A1) выполняется, причем $p=1$.

Теперь приступим к проверке условия (A2), для этого обозначим через $\mathrm{A}_{æ\pi}$ сужение оператора $\Pi\mathrm{A}_æ^{-1}\Pi$ на H_π. Справедлива следующая лемма.

Лемма 4. *Согласно лемме* 3 *оператор* $\mathrm{A}_{æ\pi}:H_\pi\to H_\pi^2$ *– топлинейный изоморфизм.*

В силу леммы 2 оператор L из (16) – бирасщепляющий. Положим, $U_0^0=\ker\mathrm{L}$, $\operatorname{coim}\mathrm{L}=H_\sigma^2\times H_\pi^2\times\{0\}\times U_1\times\ldots\times U_K$.

Построим линеалы

$$F_0^0 = \mathrm{M}'_{u_0}[U_0^0] = \{0\}\times H_p \times\{0\}\times\underbrace{\{0\}\times\ldots\times\{0\}}_{K} = \{0\}\times H_\pi \times\{0\}\times\underbrace{\{0\}\times\ldots\times\{0\}}_{K} \subset \operatorname{im}\mathrm{L},$$

$$U_1^0 = \tilde{\mathrm{L}}^{-1}[F_0^0] = \Sigma\mathrm{A}_{æ}^{-1}[H_p]\times\mathrm{A}_{æ\pi}[H_p]\times\{0\}\times\underbrace{\{0\}\times\ldots\times\{0\}}_{K} =$$

$$\Sigma\mathrm{A}_{æ}^{-1}\mathrm{A}_{æ\pi}^{-1}[H_\pi^2]\times H_\pi^2\times\{0\}\times\underbrace{\{0\}\times\ldots\times\{0\}}_{K} \subset \operatorname{coim}\mathrm{L}$$

согласно лемме 4;

$$F_1^0 = \mathrm{M}'_{u_0}[U_1^0] = \Sigma\tilde{\mathrm{B}}_0\, A_{æ}^{-1}[H_p]\times\Pi\,\tilde{\mathrm{B}}_0\mathrm{A}_{æ}^{-1}[H_p]\times\mathrm{C}\mathrm{A}_{æ}^{-1}[H_p]\times\underbrace{\{0\}\times\ldots\times\{0\}}_{K}.$$

Оператор $\tilde{\mathrm{C}}$ – сужение оператора C на H_π^2. Так как существует оператор $\tilde{\mathrm{C}}^{-1}$, то по лемме 4 $F_1^0 = \Sigma\tilde{\mathrm{B}}_0\mathrm{A}_{æ}^{-1}\mathrm{A}_{æ\pi}^{-1}\tilde{\mathrm{C}}^{-1}[H_p]\times\Pi\,\tilde{\mathrm{B}}_0\mathrm{A}_{æ}^{-1}\mathrm{A}_{æ\pi}^{-1}\tilde{\mathrm{C}}^{-1}[H_p]\times H_p\times\underbrace{\{0\}\times\ldots\times\{0\}}_{K} \not\subset \operatorname{im}\mathrm{L}$, где $\tilde{\mathrm{B}}_0$ – производная Фреше оператора $\tilde{\mathrm{B}}$ в точке $u_{\sigma 0}+u_{\pi 0}$, а оператор $\tilde{\mathrm{L}}^{-1}$ определен в (20).

Построим следующие операторы

$$\mathrm{P}_0 = \begin{pmatrix}\hat{\mathrm{P}}_0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\qquad \mathrm{P}_1 = \begin{pmatrix}\hat{\mathrm{P}}_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \tag{21}$$

где $\hat{\mathrm{P}}_0 = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&\Pi\end{pmatrix}$, $\hat{\mathrm{P}}_1 = \begin{pmatrix}0&\mathrm{P}_1^{12}&0\\0&\Pi&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\mathrm{P}_1^{12} = \Sigma\mathrm{A}_{æ}^{-1}\mathrm{A}_{æ\pi}^{-1}\Pi$;

$$\mathrm{Q}_0 = \begin{pmatrix}\hat{\mathrm{Q}}_0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\qquad \mathrm{Q}_1 = \begin{pmatrix}\hat{\mathrm{Q}}_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \tag{22}$$

где $\hat{\mathrm{Q}}_0 = \begin{pmatrix}0&0&0\\ \mathrm{Q}_0^{21}&\Pi&\mathrm{Q}_0^{23}\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\hat{\mathrm{Q}}_1 = \begin{pmatrix}0&0&\mathrm{Q}_1^{13}\\0&0&\mathrm{Q}_1^{23}\\0&0&\Pi\end{pmatrix}$, $\mathrm{Q}_1^{13} = \Sigma\tilde{\mathrm{B}}_0\mathrm{A}_{æ}^{-1}\mathrm{A}_{æ\pi}^{-1}\tilde{\mathrm{C}}^{-1}\Pi$, $\mathrm{Q}_1^{23} = \Pi\tilde{\mathrm{B}}_0\mathrm{A}_{æ}^{-1}\mathrm{A}_{æ\pi}^{-1}\tilde{\mathrm{C}}^{-1}\Pi$,

$\mathrm{Q}_0^{21} = -\Pi\mathrm{A}_{æ}\mathrm{A}_{æ\sigma}^{-1}\Sigma$, $\mathrm{Q}_0^{23} = -\mathrm{Q}_0^{21}\mathrm{Q}_1^{13} - \mathrm{Q}_1^{23}$. Очевидно, что операторы $\mathrm{P}_k \in L(U)$ и $\mathrm{Q}_k \in L(F)$, $k = 0,1$, определенные в (21), (22) – проекторы, при этом $\operatorname{im}\mathrm{P}_k = U_k^0$, $\operatorname{im}\mathrm{Q}_k = F_k^0$, $k = 0,1$ и $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1 = \mathrm{P}_1\mathrm{P}_0 = 0$, $\mathrm{Q}_0\mathrm{Q}_1 = \mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_0 = 0$. Также $\ker\mathrm{Q}_1 = \operatorname{im}\mathrm{L}$ и, значит, $F_1^0 \oplus \operatorname{im}\mathrm{L} = F$, поэтому условие (A2) выполняется.

Для проверки (A3) построим следующее множество $U = \{u \in U : P_1 u = \mathrm{const}\} = \{u \in U : u_\pi = \mathrm{const}\}$. В расссматриваемой ситуации условие (A3) состоит из единственного равенства $\mathrm{Q}_1\mathrm{M}(u) = (\mathrm{Q}_1^{13}\mathrm{C}(u_\sigma + u_\pi),\ \mathrm{Q}_1^{23}\mathrm{C}(u_\sigma + u_\pi),\ \mathrm{C}(u_\sigma + u_\pi), 0, \ldots, 0)^T = 0$, которое выполнено тождественно, если $u_\pi = 0$. Если положить $U = \{u \in U : u_\pi = 0\}$, то условие (A3) выполняется.

Перейдем теперь к построению множества B. По теореме 1, $B = \{u \in U : \mathrm{Q}_0\mathrm{M}(u) = 0\}$. Так как при $u_\pi = 0$ $\mathrm{Q}_0\mathrm{M}(\vec{u}) = 0 \Leftrightarrow (\mathrm{Q}_0^{21}\Sigma + \Pi)\tilde{\mathrm{B}}(u_\sigma) - u_p = 0$, и

$$\mathrm{Q}_0^{21}\Sigma + \Pi = \mathrm{A}_{æ\pi}^{-1}\Pi\mathrm{A}_{æ}^{-1}\Sigma + A_{æ\pi}^{-1}\Pi\mathrm{A}_{æ}^{-1}\Pi = \mathrm{A}_{æ\pi}^{-1}\Pi\mathrm{A}_{æ}^{-1}\quad , \tag{23}$$

то

$$B = \{u \in U : \mathrm{A}_{æ\pi}^{-1}\Pi\mathrm{A}_{æ}^{-1}\tilde{\mathrm{B}}(u_\sigma) = u_p,$$
$$u_\pi = 0, u_\sigma \in H_\sigma^2, u_i \in H_\sigma^2 \times H_\pi^2,\ i = \overline{1,K}\}. \tag{24}$$

Для доказательства (23) отметим, что $\Pi A_{æ}^{-1} A_{æ\sigma} \Sigma + \Pi A_{æ}^{-1} \Pi A_{æ} \Sigma = \Pi A_{æ}^{-1} (\Sigma A_{æ} + \Pi A_{æ}) \Sigma = 0$. Следовательно, $\Pi A_{æ}^{-1} A_{æ\sigma} \Sigma = -A_{æ\pi} \Pi A_{æ} \Sigma$, $A_{æ\pi}^{-1} \Pi A_{æ}^{-1} A_{æ\sigma} \Sigma = -\Pi A_{æ} \Sigma$, $A_{æ\pi}^{-1} \Pi A_{æ}^{-1} \Sigma = -\Pi A_{æ} A_{æ\sigma}^{-1} \Sigma = Q_0^{21} \Sigma$. Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия леммы 3,* $u_0 \in B$ (24). *Тогда для некоторого* $t_0 = t_0(u_0)$ *существует единственное решение задачи* (14), (2), *которое является квазистационарной траекторией,* $u = (u_\sigma, 0, \bar{p}, w_1, \ldots, w_k)$ *класса* $C^\infty((-t_0, t_0); B)$ *и такое, что* $u \in B$ *для всех* $t \in (-t_0; t_0)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (государственное задание № 1.857.2014/К).

Литература

1. Осколков, А.П. Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина–Фойгта и жидкостей Олдройта / А.П.Осколков // Труды матем. ин-та АН СССР. – 1988. – № 179. – С. 126–164.

2. Свиридюк, Г.А. Задача Коши для одного класса полулинейных уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк, Т.Г. Сукачева // Сиб. матем. журнал. – 1990. – Т. 31, № 5. – С. 109–119.

3. Сукачева, Т.Г. Об одной модели движения несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина–Фойгта ненулевого порядка / Т.Г. Сукачева // Дифференциальные уравнения. – 1997. – Т. 33, № 4. – С. 552–557.

4. Сукачева, Т.Г. Задача Тейлора для модели несжимаемой вязкоупругой жидкости нулевого порядка / Т.Г. Сукачева, О.П. Матвеева // Дифференциальные уравнения. – 2015. – Т. 51, № 6. – С. 771–779.

5. Матвеева, О.П. Квазистационарные траектории задачи Тейлора для модели несжимаемой вязкоупругой жидкости ненулевого порядка / О.П. Матвеева // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2010. – Вып. 5. – № 16(192). – С. 39–47.

6. Свиридюк, Г.А. Некоторые математические задачи динамики вязкоупругих несжимаемых сред / Г.А Свиридюк, Т.Г. Сукачева // Вестник МаГУ. – 2005. – № 8. – С. 5–33.

Поступила в редакцию 20 ноября 2015 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2016, vol. 8, no. 3, pp. 22–30

DOI: 10.14529/mmph160303

HOMOGENEOUS MODEL OF INCOMPRESSIBLE VISCOELASTIC FLUID OF THE NON-ZERO ORDER

O.P. Matveeva, T.G. Sukacheva
Yaroslav-the-Wise Novgorod State University, Veliky Novgorod, Russian Federation
E-mail: oltan.72@mail.ru

The paper deas with the Cauchy–Dirichlet problem for homogeneous dynamics model of the incompressible viscoelastic Kelvin–Voigt fluid of the non-zero order. The problem is studed using the theory of semilinear Sobolev type equations. The Cauchy–Dirichlet problem for the corresponding system of differential equations in partial derivatives is reduced to the abstract Cauchy problem for the indicated equations. The theorem of unique existance of solution to indicated problem, which is a quasistationary trajectory, is proved. The phase space is described.

Keyword: Sobolev type equation; phase space; incompressible viscoelastic fluid.

References

1. Oskolkov A.P. Initial-boundary value problems for equations of motion Kelvin–Voight and Oldroyd fluids. *Trudy Mat. In-ta AN SSSR*, 1988, no. 179, pp. 126–164.

2. Sviridyuk G.A., Sukacheva T.G. Cauchy problem for a class of semilinear equations of Sobolev type. *Siberian Mathematical Journal*, 1990, Vol. 31, no. 5, pp. 794–802. DOI: 10.1007/BF00974493

3. Sukacheva T.G. On a certain model of motion of an incompressible visco-elastic Kelvin–Voight fluid of nonzero order. *Differential Equations*, 1997, Vol. 33, no. 4, pp. 552–557.

4. Sukacheva T.G., Matveeva O.P. Taylor problem for the zero-order model of an incompressible viscoelastic fluid. *Differential Equations*, 2015, Vol. 51, no. 6, pp. 771–779. DOI: 10.1134/S0012266115060099

5. Matveeva O.P. Quasi-stationary trajectories of the Taylor problem for the model of the incompressible viscoelastic fluid of nonzero order. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling and Programming Computer Software*, 2010, issue 5, no. 16(192), pp. 39–47. (in Russ.).

6. Sviridyuk G.A., Sukacheva T.G. Some mathematical problems of the dynamics of viscoelastic incompressible media. *Vestnik MaGU*, 2005, no. 8, pp. 5–33. (in Russ.).

Received November 20, 2015