УДК 517.9 DOI: 10.14529/mmph160304

НЕКЛАССИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. ФАЗОВЫЕ ПРОСТРАНСТВА ПОЛУЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

Н.А. Манакова, Г.А. Свиридюк
Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация
E-mail: manakovana@susu.ru

Статья имеет обзорный характер и содержит результаты с описанием морфологии фазовых пространств полулинейных уравнений соболевского типа. В первых трех параграфах приведены конкретные краевые задачи для уравнений и систем уравнений в частных производных соболевского типа, у которых фазовые пространства – простые гладкие банаховы многообразия. В последнем параграфе собраны те математические модели, чьи фазовые пространства лежат на гладких банаховых многообразиях с особенностями. Цель данной статьи – формирование фундамента будущих исследований морфологии фазовых пространств полулинейных уравнений соболевского типа. Кроме того, в статье дается объяснение феномена несуществования решения задачи Коши и феномена неединственности решения задачи Шоуолтера–Сидорова для полулинейных уравнений соболевского типа.

Ключевые слова: уравнения соболевского типа; фазовое пространство; морфология фазового пространства; банаховы многообразия; квазистационарные траектории; задача Шоуолтера–Сидорова; задача Коши; k-сборка Уитни.

Введение

К настоящему времени обширный класс процессов и явлений в естествознании и технике моделируется уравнениями или системами уравнений в частных производных, не разрешенных относительно старшей производной по времени [46]. Данные конкретные уравнения и системы уравнений редуцируются к абстрактным линейным

$$L\dot{u} = Mu + f \tag{1}$$

или полулинейным

$$L\dot{u} = Mu + N(u) \tag{2}$$

вырожденным операторным уравнениям в банаховых пространствах [47]. Здесь операторы L и M – линейные, подлежащие дальнейшему определению; N – нелинейный, как правило, гладкий оператор. Однако мы для идентификации уравнений вида (1) и (2) будем использовать термин «уравнения соболевского типа» [6, 8, 19, 20, 52, 53]. Этот термин ввел в обиход Р. Шоуолтер [51], чтобы увековечить память о великом российском математике С.Л. Соболеве, который в середине прошлого века инициировал активное изучение таких уравнений (см. прекрасное историческое обозрение в [46]).

Как давно и хорошо известно (см., например, [22–24] и библиографию там же), задача Коши

$$u(0) = u_0 \tag{3}$$

в случае

$$\ker L \neq \{0\} \tag{4}$$

для уравнений вида (1), (2) разрешима далеко не при всех начальных значениях u_0. Одним из возможных путей преодоления этой трудности является введение в рассмотрение концепции фазового пространства уравнения (1) или (2). Основы данной концепции заложены в [22] и [23], затем концепция была развита в [24, 25, 3, 27 – 29, 41, 32–34, 37, 4] и многих других работах.

Вкратце суть концепции заключается в следующем. Сначала фазовое пространство определяется как замыкание множества всех допустимых начальных значений u_0, под которыми понимаются такие векторы, для которых существует единственное (локальное) решение задачи (1), (3) или (2), (3). Затем выбирается такой вектор u_0, в окрестности O_{u_0} которого фазовое пространство В является гладким банаховым многообразием, причем в этой окрестности O_{u_0} сингулярное (т.е. с условием (4)) уравнение (1) или (2) редуцируется к регулярному уравнению

$$\dot{u} = F(u), \quad (5)$$

где F – гладкое сечение касательного расслоения TO_{u_0}. Завершает рассмотрение ссылка на теорему Коши [16], гарантирующую однозначную локальную разрешимость задачи (3), (5) и, тем самым, задачи (1), (3) или (2), (3).

Другим подходом, позволяющим преодолевать трудности, связанные с несуществованием решения задач (1), (3) и (2), (3), является рассмотрение в случае (4) вместо начального условия Коши (3) начального условия Шоуолтера–Сидорова

$$P(u(0) - u_0) = 0. \quad (6)$$

Здесь P – проектор, который строится по операторам L, M, такой, что $\ker P \supset \ker L$. Детальное обсуждение условия (6) можно найти в обзорной статье [38]. Здесь же мы отметим основные особенности условия (6). Во-первых, условия (3) и (6) совпадают, если существует непрерывный оператор L^{-1}. Во-вторых, решение задач (1), (6) и (2), (6) существует для всех u_0 (по крайней мере, во всех расмотренных ниже случаях). В-третьих, условие (6) не гарантирует единственности решения задачи (2), (6) в случае (4). Например, в случаях, когда фазовое пространство уравнения (2) лежит на гладком банаховом многообразии, имеющем особенности, такие, как k-сборки Уитни [3, 4, 35, 36].

Однако главное достоинство условия (6) для уравнения (2) в случае (4) раскрывается при постановке вычислительных экспериментов над галеркинскими приближениями точных решений задачи (2), (6) в конкретных ситуациях [2, 11]. Особенно важную роль условие (6) играет при численном исследовании динамической балансовой модели Леонтьева «затраты-выпуск» с учетом капитальных вложений. Эта модель представлена уравнением (1), где L и M – квадратные матрицы одного порядка, причем $\det L = 0$ [12]. Заметим, что в данном случае вырожденная линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами называется «системой уравнений леонтьевского типа» [39]. Результаты качественного и численного исследования систем уравнений леонтьевского типа выходят за рамки нашего обзора, отметим только их приложения к теории оптимальных измерений [44].

Итак, данная статья имеет обзорный характер и содержит полученные ранее результаты, объясняющие феномены несуществования решений задачи (1), (3) и (2), (3) и неединственность решения задачи (2), (6). В данный обзор не вошли, во-первых, результаты о распространении концепции фазового пространства на полулинейные уравнения соболевского типа высокого порядка [10]. Во-вторых, сюда не вошел обзор результатов о различных обобщениях условия Шоуолтера–Сидорова [7, 9, 31, 54], а также результаты о задаче Шоуолтера–Сидорова для стохастических уравнений соболевского типа [40, 48]. Все эти ранее разрозненные результаты оформились в новые научные направления теории уравнений соболевского типа и ее приложений, которые требуют отдельных подробных обзоров. Наконец, в обзор не вошли результаты (например, [21, 45, 50]), развивающие и обобщающие теорию уравнений, но их авторы не используют ни концепцию фазового пространства, ни неклассические начальные условия вида (6).

Статья содержит обзор работ по изучению морфологии фазовых пространств уравнений соболевского типа и состоит из 4 параграфов, введения и списка литературы. В первом параграфе исследуется существование квазистационарных траекторий задачи (2), (3) в случае (L, p)-ограниченного оператора M; приводятся условия простоты фазового пространства обобщенного уравнения Осколкова [34], уравнения плоскопараллельной динамики вязкоупругой несжимаемой жидкости [29]. Во втором параграфе находятся условия существования квазистационарных полутраекторий уравнения (2) в случае (L, p)-секториального оператора M; приведены достаточные условия простоты фазового пространства системы уравнений Навье–Стокса [30], уравнения плоскопараллельной конвекции вязкоупругой несжимаемой жидкости [19]. В третьем параграфе приведены условия существования решения задачи (2), (3) в случае s-монотонного, сильно коэрцитивного оператора M и фредгольмова оператора L и получены достаточные условия простоты фазового пространтства обобщенного фильтрационного уравнения Буссинеска и уравнения нелинейной диффузии [28]. В четвертом параграфе изучен феномен неединственности решения задачи Шоуолтера–Сидорова для уравнения Корпусова–Плетнера–Свешникова [35] и приведены условия существования сборок Уитни фазового пространства рассматриваемых уравнений.

1. Уравнения с относительно *p*-ограниченным оператором

Пусть U и F – банаховы пространства, операторы $L\in \mathrm{L}(U;F)$, $M\in Cl(U;F)$, оператор $N\in C^k(U;F)$, $k\in \mathrm{N}\cup\{\infty\}$. Рассмотрим L-резольвентное множество $\rho^L(M)=\{\mu\in \mathrm{C}:(\mu L-M)^{-1}\in \mathrm{L}(F,U)\}$ и L-спектр $\sigma^L(M)=\mathrm{C}\setminus\rho^L(M)$ оператора M.

Определение 1.1. Оператор M называется (L,σ)-ограниченным, если

$$\exists a\in \mathrm{R}_+\ \forall\mu\in \mathrm{C}\quad (|\mu|>a)\quad\Rightarrow\quad(\mu\in\rho^L(M)).$$

Пусть $\rho^L(M)\neq\varnothing$, через $R^L_\mu(M)=(\mu L-M)^{-1}L$ и $L^L_\mu(M)=L(\mu L-M)^{-1}$ обозначим соответственно правую и левую L-резольвенты оператора M.

Лемма 1.1. [52] Пусть оператор M (L,σ)-ограничен, а контур $\Gamma=\{\mu\in \mathrm{C}:|\mu|=r>a\}$. Тогда операторы

$$P=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R^L_\mu(M)d\mu\in \mathrm{L}(U),\quad Q=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma L^L_\mu(M)d\mu\in \mathrm{L}(F)$$

являются проекторами.

Положим $U^0=\ker P$, $U^1=\mathrm{im}\,P$, $F^0=\ker Q$, $F^1=\mathrm{im}\,Q$. Обозначим через L_k и M_k сужение оператора L и M на U^k и $\mathrm{dom}\,M\cap U^k$, $k=0,1$, соответственно.

Теорема 1.1. [52] (Теорема о расщеплении) Пусть оператор M (L,σ)-ограничен. Тогда

(i) операторы $L_k:U^k\to F^k$, $M_k:\mathrm{dom}\cap U^k\to F^k$, $k=0,1$;

(ii) существуют операторы $M_0^{-1}\in \mathrm{L}(F^0,U^0)$;

(iii) операторы $H=M_0^{-1}L_0\in \mathrm{L}(U^0)$, $S=L_1^{-1}M_1\in \mathrm{L}(U^1)$.

Определение 1.2. Оператор M называется (L,p)-ограниченым, если он (L,σ)-ограничен и $\exists\ p\in\{0\}\cup \mathrm{N}:\ H^p\neq \mathrm{O}$, а $H^{p+1}\equiv \mathrm{O}$.

Определение 1.3. Вектор-функцию $u\in C^k((-\tau,\tau);U)$, $k\in \mathrm{N}\cup\{\infty\}$, назовем *решением уравнения* (2), если она при некотором $\tau\in \mathrm{R}_+$ удовлетворяет ему. Решение $u=u(t)$ уравнения (2) назовем *решением задачи Коши* (2), (3), если оно еще и удовлетворяет начальному условию (3).

В дальнейшем будем рассматривать (L,p)-ограниченный оператор M. В силу теоремы 1.1 уравнение (2) редуцируется к паре эквивалентных ему уравнений

$$H\dot{u}^0=u^0+M_0^{-1}(I-Q)N(u),\tag{7}$$

$$\dot{u}^1=Su^1+L_1^{-1}QN(u),\tag{8}$$

где $u^1=Pu$, $u^0=u-u^1$.

Определение 1.4. Вектор-функция $u=u(t)$ называется *квазистационарной траекторией уравнения* (2), если $H\dot{u}(t)\equiv 0$ при всех $\tau\in \mathrm{R}_+$. Если квазистационарная траектория уравнения (2) удовлетворяет условию Коши (3), то она называется *квазистационарной траекторией уравнения* (2), *проходящей через точку* u_0.

Замечание 1.1. Любая стационарная траектория уравнения (2) будет квазистационарной, однако обратное неверно. В случае $(L,0)$-ограниченности оператора M все решения уравнения (2) являются квазистационарными траекториями.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только квазистационарных траекторий. Введем в рассмотрение множество

$$\mathrm{B}=\{u\in U:(\mathrm{I}-Q)(Mu+N(u))=0\}.$$

Из (7) и теоремы о расщеплении вытекает, что, если $u=u(t)$ – квазистационарная траектория уравнения (2), то она с необходимостью лежит во множестве B, т.е. $u(t)\in \mathrm{B}$ при всех $t\in(-\tau,\tau)$.

Возьмем точку $u_0 \in \mathrm{B}$ и обозначим через F'_{u_0} сужение оператора $(\mathrm{I}-Q)(M+N'_{u_0})(\mathrm{I}-P)$ на подпространство U^0, здесь N'_{u_0} – производная Фреше оператора N в точке u_0. В силу построения оператор $F'_{u_0} \in \mathrm{L}(U^0;F^0)$. В дальнейшем нам понадобятся следующие условия:

$$\mathrm{B} \neq \varnothing; \tag{9}$$

$$\text{оператор } F'_{u_0} \text{ – диффеоморфизм.} \tag{10}$$

Теорема 1.2. [34] Пусть оператор M $(L,\ p)$-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathrm{N}$, причем выполнены условия (9), (10). Тогда существует единственная квазистационарная траектория уравнения (2), проходящая через точку u_0.

Определение 1.5. Множество $\Xi \subset U$ называется *фазовым пространством уравнения* (2), если

(i) любое решение $u = u(t)$ лежит в Ξ как траектория, т.е. $u(t) \in \Xi$ при любом $t \in (-\tau, \tau)$;

(ii) при любом $u_0 \in \Xi$ существует единственное решение задачи (2), (3).

Определение 1.6. Пусть точка $u_0 \in \mathrm{B}$, положим $u_0^1 = Pu_0 \in U^1$. Множество B в точке u_0 является *банаховым C^k-многообразием*, если существуют окрестности $O_0^{\mathrm{B}} \subset \mathrm{B}$ и $O_0^1 \subset U^1$ точек u_0 и u_0^1 соответственно и C^k-диффеоморфизм $\delta : O_0^1 \to O_0^{\mathrm{B}}$ такой, что δ^{-1} равен сужению проектора P на O_0^{B}. Множество B называется *банаховым C^k-многообразием, моделируемым пространством U^1*, если оно является банаховым C^k-многообразием в каждой своей точке. Связное банахово C^k-многообразие называется *простым*, если любой его атлас эквивалентен атласу, содержащему единственную карту.

Следствие 1.1. [34] Пусть оператор M $(L,\ p)$-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathrm{N}$, причем выполнены условия (9), (10). Тогда фазовым пространством уравнения (2) служит простое многообразие B, моделируемое подпространством U^1.

1.1. Обобщенное фильтрационное уравнение Осколкова

В цилиндре $\Omega \times \mathrm{R}$ рассмотрим задачу Коши–Дирихле

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \qquad u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times \mathrm{R}_+ \tag{11}$$

для обобщенного уравнения Осколкова

$$(\lambda - \Delta)u_t = \alpha\Delta u - K(u) + f,\ K(0) = 0,\ < K(u), u > \geq 0, \tag{12}$$

описывающего динамику давления неньютоновой жидкости, фильтрующейся в пористой среде. Уравнение (12) моделирует широкий класс процессов фильтрации вязкоупругих жидкостей [17].

Для того чтобы редуцировать задачу (11), (12) к задаче (2), (3) положим $U = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \cap W_2^{m+2}(\Omega)$, $F = W_2^m(\Omega)$, $m \in \{0\} \cup \mathrm{N}$, зададим операторы $L = \lambda - \Delta$, $M = \alpha\Delta$. По построению операторы $L, M \in \mathrm{L}(U;F)$, причем оператор L фредгольмов.

Лемма 1.2. [34]

(i) При всех $\alpha \in \mathrm{R}_+$ оператор M $(L,\ 0)$-ограничен.

(ii) При любом векторе $f \in F$, $m + 2 > n/2$ и любой функции $K \in C^\infty(\Omega)$ оператор $N : u \to K(u) - f$ принадлежит классу $C^\infty(U)$.

Обозначим через $\{\varphi_l\}$ собственные функции однородной задачи Дирихле для оператора Δ, а через $\{\lambda_l\}$ – соответствующие им собственные значения, занумерованные по неубыванию. Зафиксируем $f \in F$ и построим множество

$$\mathrm{B}_f = \{ u \in U : < Mu - N(u) - f, \varphi_l >= 0,\ \lambda = \lambda_l \}.$$

Замечание 1.2. Поскольку оператор M $(L,\ 0)$-ограничен, то все решения уравнения (12) являются квазистационарными траекториями.

Теорема 1.3. [34] Пусть $\alpha \in \mathrm{R}_+$, $m > n/2 - 2$, $f \in F$. Тогда

(i) если $\ker L = \{0\}$, то фазовым пространством уравнения (12) служит все пространство U;

(ii) если $\ker L \neq \{0\}$, то фазовым пространством уравнения (12) служит простое многообразие B_f, моделируемое подпространством $U^1 = \left\{ u \in U : \left\langle u, \varphi_l \right\rangle = 0,\ \lambda = \lambda_l \right\}$.

1.2. Плоскопараллельная динамика вязкоупругой несжимаемой жидкости

Пусть $\Omega \subset \mathrm{R}^2$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. В цилиндре $\Omega \times \mathrm{R}$ рассмотрим задачу Коши–Дирихле

$$u(x,y,0) = u_0(x,y), \quad (x,y) \in \Omega; \tag{13}$$

$$u(x,y,t) = \Delta u(x,y,t) = 0, \quad (x,y,t) \in \partial\Omega \times \mathrm{R} \tag{14}$$

для уравнения

$$(1 - \chi\Delta)\Delta \frac{\partial u}{\partial t} = \nu\Delta^2 u - \frac{\partial(u, \Delta u)}{\partial(x,y)} + f. \tag{15}$$

Положим

$$U = \{u \in W_2^4(\Omega) : u(x) = \Delta u(x) = 0, x \in \partial\Omega\},\ F = L^2(\Omega).$$

Зададим операторы

$$L : u \to (1 - \chi\Delta)\Delta u,\ M : u \to \nu\Delta^2 u,\ N : u \to -\frac{\partial(u, \Delta u)}{\partial(x,y)} + f.$$

Лемма 1.3. [29]

(i) При любых $\nu, \chi \in \mathrm{R} \setminus \{0\}$ операторы $L, M \in \mathrm{L}(U;F)$ фредгольмовы.

(ii) При любых значениях параметров $\nu, \chi \in \mathrm{R} \setminus \{0\}$ оператор M (L, σ)-ограничен.

(iii) Оператор $N \in C^\infty(U;F)$.

Обозначим через $\sigma(\Delta)$ спектр однородной задачи Дирихле в области Ω для оператора Лапласа Δ, а через $\{\lambda_k\}$ множество собственных значений, занумерованное по невозрастанию с учетом кратности, $\{\varphi_k\}$ – семейство соответствующих собственных функций, ортонормированных относительно скалярного произведения $< \cdot, \cdot >$ из $L^2(\Omega)$. Пусть $\chi^{-1} \in \sigma(\Delta)$, тогда в силу фредгольмовости оператора L $\ker\ L = \mathrm{span}\{\psi_1, \psi_2, ..., \psi_m\}$, где $\psi_l \in \{\varphi_k\}$, l=1,2,..., m. Построим множество

$$\mathrm{B} = \{u \in U : < Mu + N(u), \psi_l >= 0,\ l = 1, 2, \ldots, m\}.$$

Положим $U^0 = \ker L$, $U^1 = \ker L^\perp$, где ортогональность понимается в смысле $L_2(\Omega)$. В силу фредгольмовости оператора L имеет место расщепление $U = U^0 \oplus U^1$.

Теорема 1.4. [29]

(i) Пусть $\chi^{-1} \in \mathrm{R} \setminus \sigma(\Delta)$, тогда фазовым пространством уравнения (15) является все пространство U.

(ii) Пусть $\chi^{-1} \in \sigma(\Delta)$, $\nu \in \mathrm{R} \setminus \{0\}$. Тогда множество B – простое C^∞-многообразие, моделируемое подпространством U^1.

2. Уравнения с относительно *p*-секториальным оператором

Пусть U и F – банаховы пространства, операторы $L \in \mathrm{L}(U;F)$, $M \in Cl(U;F)$.

Определение 2.1. Оператор M называется (L, p)-секториальным с числом $p \in \{0\} \cup \mathrm{N}$, если

(i) существуют константы $a \in \mathrm{R}$ и $\Theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ такие, что сектор

$$S_{a,\Theta}^L(M) = \{\mu \in \mathrm{C} : |\arg(\mu - a)| < \Theta, \mu \neq a\} \subset \rho^L(M);$$

(ii) существует константа $K \in \mathrm{R}_+$ такая, что

$$\max\left\{\| R^L_{(\mu,p)}(M)\|_{\mathrm{L}(\mathrm{U})}, \| L^L_{(\mu,p)}(M)\|_{\mathrm{L}(\mathrm{F})}\right\} \le \frac{K}{\prod\limits_{q=0}^{p} |\mu_q - a|}$$

при любых $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_p \in S^L_{a,\Theta}(M)$. Здесь

$$R^L_{(\mu,p)}(M) = \prod_{q=0}^{p}(\mu_q L - M)^{-1} L, \quad L^L_{(\mu,p)}(M) = \prod_{q=0}^{p} L(\mu_q L - M)^{-1}.$$

Пусть выполнено условие

$$U = U^0 \oplus U^1, \ F = F^0 \oplus F^1. \tag{16}$$

Тогда, аналогично п. 1, действия операторов L и M расщепляются, а через L_k и M_k обозначим сужение операторов L и M на U^k и $\operatorname{dom} M \cap U^k$, $k = 0, 1$, соответственно. Пусть выполнено условие

$$\exists\, L_1^{-1} \in \mathrm{L}(F^1; U^1). \tag{17}$$

Тогда оператор $H = M_0^{-1} L_0 \in \mathrm{L}(U^0)$ нильпотентен степени не выше $p \in \{0\} \cup \mathrm{N}$ и оператор $S = L_1^{-1} M_1 \in \mathrm{L}(U^1)$ секториален.

Замечание 2.1. Пусть оператор M (L, p)-секториален, $p \in \{0\} \cup \mathrm{N}$ и выполнены условия (16), (17), тогда оператор M сильно (L, p)-секториален [26, 30].

Рассмотрим секториальный оператор $A \in Cl(U)$ такой, что $Re\sigma(A) < 0$. Для любого $\alpha > 0$ положим

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-At} dt.$$

Определим A^α как оператор, обратный к $A^{-\alpha}$, $\operatorname{dom} A^\alpha = \operatorname{im} A^{-\alpha}$, $A^0 = \mathrm{I}$. Далее положим для каждого $\alpha \ge 0$, $U^\alpha = \operatorname{dom} A^\alpha$ и наделим пространство U^α нормой графика $\|u\|_\alpha = \|A^\alpha u\|$, $u \in U^\alpha$. Выберем константу $c \in \mathrm{R}_+$ таким образом, чтобы $\operatorname{Re}\sigma(S - cI) < 0$. По оператору $A = S - c\mathrm{I}$ построим пространства $U^\alpha, \alpha \ge 0$. Нормы $\|\cdot\|_\alpha$ при фиксированном α и различных c эквивалентны.

Теорема 2.1. [25] Пусть оператор M (L, p)-секториален, $p \in \{0\} \cup \mathrm{N}$ и выполнены условия (16), (17). Тогда U^α – банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_\alpha$ для $\alpha \ge 0$, причем $U^0 = U$ и $U^1 = \operatorname{dom} A$. Для $\alpha \ge \beta \ge 0$ пространство U^α плотно в U^β и вложение $U^\alpha \subset U^\beta$ непрерывно.

Пусть U_1^1 линеал $\operatorname{dom} M \cap U^1$, снабженный нормой графика, и $U_1^0 = \operatorname{dom} M \cap U^0$, положим $U_\alpha = U_1^0 \oplus U^\alpha$. Пусть при некотором фиксированном $\alpha \in [0,1)$ оператор $N \in C^\infty(U_\alpha; F)$, тогда рассмотрим задачу Коши (3) для полулинейного уравнения соболевского типа (2).

Определение 2.2. Вектор-функцию $u \in C^1((0,\tau); U) \cap C((0,\tau); U_\alpha)$ назовем *решением уравнения* (2), если она при некотором $\tau \in \mathrm{R}_+$ удовлетворяет ему. Решение $u = u(t)$ уравнения (2) назовем *решением задачи Коши* (2), (3), если оно еще и удовлетворяет $\lim\limits_{t \to 0+} \| u(t) - u_0 \|_{U_\alpha} = 0$ при некотором $u_0 \in U_\alpha$.

Пусть оператор M (L, p)-секториален, $p \in \{0\} \cup \mathrm{N}$, и выполнены условия (16), (17), тогда в силу теоремы о расщеплении [26] уравнение (2) редуцируется к паре эквивалентных ему уравнений (7), (8).

Определение 2.3. Вектор-функция $u = u(t)$, $t \in (0,\tau)$, называется *квазистационарной полутраекторией* уравнения (2), если $H\dot{u}(t) \equiv 0$ при всех $\tau \in \mathrm{R}_+$. Если квазистационарная полутраектория уравнения (2) удовлетворяет условию $\lim\limits_{t\to 0+} \| u(t) - u_0 \|_{U_\alpha} = 0$, то она называется *квазистационарной полутраекторией уравнения* (2), *проходящей через точку* u_0.

Замечание 2.2. Понятие квазистационарной полутраектории вводится по аналогии с понятием квазистационарной траектории (см. п. 1). В случае $(L, 0)$-секториального оператора M любое решение уравнения (2) является квазистационарной полутраекторией.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только квазистационарных полутраекторий. Аналогично п. 1, квазистационарные полутраектории поточечно принадлежат множеству

$$\mathrm{B} = \{u \in U : (\mathrm{I} - Q)(Mu + N(u)) = 0\}.$$

Предположим, что множество

$$\mathrm{B} \neq \varnothing. \tag{18}$$

Теорема 2.2. [25] Пусть оператор M (L, p)-секториален, причем выполнены условия (16), (17), а оператор $N \in C^\infty(U_\alpha; F)$. Пусть в точке $u_0 \in \mathrm{B}$ множество B является банаховым C^∞-многообразием. Тогда существует единственная квазистационарная полутраектория уравнения (2), выходящая из точки u_0.

Определение 2.4. Множество $\Xi \subset U_\alpha$ называется *фазовым пространством* уравнения (2), если

(i) любое решение $u = u(t)$ уравнения (2) лежит во множестве Ξ поточечно, т.е. $u(t) \in \Xi$, $t \in (0, \tau)$;

(ii) при любом $u_0 \in \Xi$ существует единственное решение задачи (2), (3).

Замечание 2.3. Если выполнены условия теоремы 2.2, то некоторая окрестность $O_0 \subset \mathrm{B}$ точки $u_0 \in \mathrm{B}$ лежит в фазовом пространстве уравнения (2). Если множество B является простым банаховым C^∞-многообразием, то оно совпадает с фазовым пространством уравнения (2).

2.1. Система уравнений Навье–Стокса

В цилиндре $\Omega \times \mathrm{R}$ рассмотрим задачу Коши–Дирихле (11) для системы уравнений Навье – Стокса [25, 30]

$$(\lambda - \nabla^2) u_t = \nu \nabla u - (u \cdot \nabla) u - \nabla p + f, \quad \nabla(\nabla \cdot u) = 0, \tag{19}$$

которая моделирует динамику вязкой несжимаемой жидкости; здесь ∇p – градиент давления, вектор-функция $u = u(x,t) = (u_1, u_2, ..., u_n)$ – вектор скорости жидкости, $f = f(x,t) = (f_1, f_2, ..., f_n)$ – вектор объемных внешних сил, $\nu \in \mathrm{R}_+$ – кинематический коэффициент вязкости.

Положим H_σ^2 и H_π^2 (H_σ и H_π) – подпространства соленоидальных и потенциальных вектор-функций [15, 43] пространства $\mathsf{H}^2 = (W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))^n$ $(\mathsf{L}^2 = (L^2(\Omega))^n)$. Оператор $A = \mathrm{diag}\{\nabla^2, \ldots, \nabla^2\}$ является линейным непрерывным оператором с дискретным конечнократным отрицательным спектром $\sigma(A)$, сгущающимся лишь на $-\infty$. Обозначим через $A_{\sigma(\pi)}$ сужение оператора A на $\mathsf{H}_{\sigma(\pi)}^2$. Зададим оператор $K : u \to \nabla(\nabla \cdot u)$, оператор $K \in \mathrm{L}(\mathsf{H}^2, \mathsf{H}_\pi)$ и $\ker K = \mathsf{H}_\sigma^2$. Обозначим через $\Pi \in \mathrm{L}(\mathsf{H}^2, \mathsf{H}_\pi^2)$ проектор вдоль H_σ^2 и построим проектор $\Sigma = \mathrm{I} - \Pi$.

Положим $U = \mathsf{H}_\sigma^2 \times \mathsf{H}_\pi^2 \times \mathsf{H}_p$, $F = \mathsf{H}_\sigma \times \mathsf{H}_\pi \times \mathsf{H}_p$, где $\mathsf{H}_\pi = \mathsf{H}_\sigma$. Формулами

$$L = \begin{pmatrix} \Sigma & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \Pi & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \nu A_\sigma & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \nu A_\pi & \nu A_\pi & -\Pi \\ \mathbf{O} & K & \mathbf{O} \end{pmatrix}$$

зададим операторы $L \in \mathrm{L}(U; F)$, $\mathrm{im}\, L = \mathsf{H}_\sigma \times \mathsf{H}_\pi \times \{0\}$, $\ker L = \{0\} \times \{0\} \times \mathsf{H}_p$ и $M \in Cl(U; F)$, $\mathrm{dom}\, M = \mathsf{H}_\sigma^2 \times \mathsf{H}_\pi^2 \times \mathsf{H}_p^2$. Положим $\mathsf{H}^1 = \left(\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\right)^n$.

Лемма 2.1. [25]

(i) При любых $\nu \in \mathrm{R}_+$ оператор M $(L, 1)$-секториален и выполнены условия (16), (17).

(ii) При $n \in \{2,3,4\}$ оператор $C : v \to (v \cdot \nabla)v$ принадлежит классу $C^\infty(\mathsf{H}^1(\Omega);\mathsf{L}^2(\Omega))$.

Построим оператор

$$N(u) = \mathrm{col}(\Sigma C(u), \Pi C(u), 0), \quad u = u_\sigma + u_\pi.$$

Оператор $N \in C^\infty(\mathsf{H}_\sigma^1 \times \mathsf{H}_\pi^1 \times \mathsf{H}_p; \mathsf{H}_\sigma \times \mathsf{H}_\pi \times \mathsf{H}_p)$ и $\mathrm{dom}\, M \subset \mathsf{H}_\sigma^1 \times \mathsf{H}_\pi^1 \times \mathsf{H}_p \subset U$, где линеал $\mathrm{dom}\, M$ снабжен «нормой графика». Подпространство $U^1 = \mathsf{H}_\sigma \times \{0\} \times \{0\}$, тогда $\mathrm{dom}\, M \cap U^1 = \mathsf{H}_\sigma^2 \times \{0\} \times \{0\}$. Отсюда $\mathsf{H}_\sigma^1 \times \{0\} \times \{0\} = \left[U_1^1\right]_{1/2}$, где $U_1^1 = \mathrm{dom}\, M \cap U^1$. Далее построим $U^0 = \mathrm{dom}\, M \cap U^0 = \{0\} \times \mathsf{H}_\pi^2 \times \mathsf{H}_p^2$. Поэтому $U_\alpha = \mathsf{H}_\sigma^1 \times \mathsf{H}_\pi^2 \times \mathsf{H}_p^2$. Получим, что оператор $N \in C^\infty(U_\alpha; F)$. Множество, содержащее квазистационарные траектории, имеет вид

$$\mathrm{B} = \left\{ u \in U_\alpha : u_\pi = 0, \quad u_p = -\Pi C(u_\sigma) \right\}.$$

Теорема 2.3. [30] При любых $n \in \{2,3,4\}$, $\nu \in \mathrm{R}_+$ фазовым пространством уравнений (19) служит простое банахово многообразие B, моделируемое подпространством $\mathsf{H}_\sigma^1 \times \{0\} \times \{0\}$.

2.2. Плоскопараллельная конвекция вязкоупругой несжимаемой жидкости

Пусть $\Omega = (0,l) \times (0,h) \subset \mathrm{R}^2$. В области $\Omega \times \mathrm{R}_+$ рассмотрим задачу Бенара

$$\psi(x,0,t) = \Delta\psi(x,0,t) = 0, \ \psi(x,h,t) = \Delta\psi(x,h,t) = 0, \tag{20}$$

$$\Theta(x,0,t) = \Theta(x,h,t) = 0, \tag{21}$$

$$\text{функции } \Theta \text{ и } \psi \text{ периодичны по } x \text{ с периодом } l, \tag{22}$$

$$\psi(x,y,0) = \psi_0(x,y), \quad \Theta(x,y,0) = \Theta_0(x,y) \tag{23}$$

для системы уравнений

$$\begin{aligned} (1-\chi\Delta)\Delta\frac{\partial\psi}{\partial t} &= \nu\Delta^2\psi - \frac{\partial(\psi,\Delta\psi)}{\partial(x,y)} + g\alpha\frac{\partial\Theta}{\partial x}, \\ \frac{\partial\Theta}{\partial x} &= \delta\Delta\Theta - \frac{\partial(\psi,\Theta)}{\partial(x,y)} + \beta\frac{\partial\psi}{\partial x}, \end{aligned} \tag{24}$$

которая моделирует термоконвекцию вязкоупругой несжимаемой жидкости Кельвина–Фойгта [14]. Здесь функция $\Theta = \Theta(x,t)$ соответствует температуре жидкости, параметр $\delta \in \mathrm{R}_+$ характеризует температуропроводность, g – ускорение свободного падения. Положим

$$U = U_\psi \times U_\Theta, \ F = F_\psi \times F_\Theta,$$

где

$$U_\psi = \{\psi \in W_2^4(\Omega) : \psi \text{ удовлетворяет (20), (22)}\},$$

$$U_\Theta = \{\psi \in W_2^4(\Omega) : \Theta \text{ удовлетворяет (21), (22)}\},$$

$$F_\psi = F_\Theta = L^2(\Omega).$$

Зададим операторы

$$L = \begin{pmatrix} (1-\chi\Delta)\Delta & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{I} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \nu\Delta^2 & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \delta\Delta \end{pmatrix},$$

$$N : u \to \begin{pmatrix} g\alpha\dfrac{\partial\Theta}{\partial x} - \dfrac{\partial(\psi,\Delta\psi)}{\partial(x,y)} \\ \beta\dfrac{\partial\psi}{\partial x} - \dfrac{\partial(\psi,\Theta)}{\partial(x,y)} \end{pmatrix}, \quad u = (\psi,\Theta).$$

Тогда

$$\mathrm{dom}M = U_\psi \times \{\Theta \in W_2^2(\Omega) : \Theta \text{ удовлетворяет (21), (22)}\}.$$

Лемма 2.2. [14]

(i) При любых $\chi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ оператор $L \in \mathrm{L}(U;F)$ фредгольмов.

(ii) При любых значениях параметров $\nu, \delta \in \mathbb{R}_+$, $\chi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ оператор M сильно (L, 0)-секториален.

(iii) Оператор $N \in C^\infty(U;F)$.

Рассмотрим пространство

$$U_N = U_\psi \times \{\Theta \in W_2^1(\Omega) : \Theta \text{ удовлетворяет (21), (22)}\}$$

и множество

$$\mathrm{B}_N = \{(\psi, \Theta) \in U_N : < \nu\chi^{-2}\psi + g\alpha\frac{\partial\Theta}{\partial x} - \frac{\partial(\psi, \Delta\psi)}{\partial(x,y)}, \xi_l >= 0,\ l = 1,2,\ldots,\dim\ker(\chi^{-1} - \Delta)\}.$$

Теорема 2.4. [14] Пусть $\nu, \delta \in \mathbb{R}_+$ и, если

(i) $\chi^{-1} \in \backslash\sigma(\Delta)$, тогда фазовым пространством системы уравнений (24) служит множество U_N;

(ii) $\chi^{-1} \in \sigma(\Delta)$, тогда фазовым пространством для системы уравнений (24) служит простое банахово C^∞-многообразие B_N, моделируемое подпространством

$$U_N^1 = \{(\psi, \Theta) \in U_N : < \psi, \xi_l >= 0,\ l = 1,2,\ldots,\dim\ker(\chi^{-1} - \Delta)\}.$$

3. Уравнения с *s*-монотонным и сильно коэрцитивным оператором

Пусть $H = (H; \langle\cdot,\cdot\rangle)$ – вещественное сепарабельное гильбертово пространство, отождествленное со своим сопряженным; (A, A^*) и (V, V^*) – дуальные (относительно двойственности $\langle\cdot,\cdot\rangle$) пары рефлексивных банаховых пространств, причем вложения

$$V \subset A \subset H \subset A^* \subset V^* \tag{25}$$

плотны и непрерывны. Пусть $L \in L(A; A^*)$ – линейный, непрерывный, самосопряженный, неотрицательно определенный, фредгольмов оператор, $N \in C^r(V; V^*), r \geq 1$ – *s*-монотонный (т.е. $\left\langle N_u' v, v\right\rangle > 0,\quad u, v \neq 0$) и сильно коэрцитивный (т.е. $\lim\limits_{\|v\|_V \to \infty} \dfrac{\langle N(u+v), v\rangle}{\|v\|_V} = +\infty \quad \forall u \in V$) оператор.

Рассмотрим задачу Коши (3) для полулинейного уравнения соболевского типа

$$L\dot{u} + N(u) = f. \tag{26}$$

Ввиду самосопряженности и фредгольмовости оператора L отождествим $A \supset \ker L \equiv \mathrm{coker}\, L \subset A^*$, тогда $A^* = \mathrm{coker}\, L \oplus \mathrm{im}\, L$. Обозначим через $\overline{\mathrm{im}\, L}$ замыкание $\mathrm{im}\ L$ в топологии V^*, тогда $V^* = co\ker L \oplus \overline{\mathrm{im}\, L}$. Обозначим через Q проектор V^* вдоль $\mathrm{coker}\, L$ на $\overline{\mathrm{im}\, L}$ и сделаем допущение:

$$(\mathrm{I} - Q)f \text{ не зависит от } t \in (0, \tau). \tag{27}$$

Тогда, если $u = u(t),\ t \in (0, \tau)$, – решение уравнения (26), то оно с необходимостью лежит во множестве

$$\mathrm{B}_f = \begin{cases} \{u \in V : (\mathrm{I} - Q)N(u) = (\mathrm{I} - Q)f\}, \text{если } \ker L \neq \{0\}; \\ V, \quad \text{если} \quad \ker L = \{0\}. \end{cases}$$

Введем в рассмотрение множество

$$\mathrm{coim}\, L = \{u \in A : \langle u, v\rangle = 0 \quad \forall v \in \ker L \setminus \{0\}\}.$$

Обозначим через P проектор вдоль $\ker L$ на $\mathrm{coim}\, L \cap V \equiv \tilde{V}$. Ввиду (25) $V = \ker L \oplus \tilde{V}$.

Теорема 3.1. [28] Пусть выполнено условие (27), тогда множество B_f есть банахово C^r-многообразие, диффеоморфно проектирующееся вдоль $\ker L$ на $\tilde{V}$ всюду, за исключением, быть может, точки нуль.

3.1. Обобщенное фильтрационное уравнение Буссинеска

В цилиндре $\Omega \times \mathrm{R}_+$ рассмотрим задачу Коши–Дирихле (11) для обобщенного фильтрационного уравнения Буссинеска

$$(\lambda - \Delta)u_t - \Delta(|u|^{p-2}u) = f, \qquad p \geq 2, \tag{28}$$

которое моделирует процесс фильтрации жидкости. Здесь искомая функция $u = u(x,t)$ отвечает потенциалу скорости движения свободной поверхности фильтрующейся жидкости; параметры $\alpha \in \mathrm{R}_+$, $\lambda \in \mathrm{R}$ характеризуют среду, причем параметр λ может принимать отрицательные значения; свободный член $f = f(x,t)$ соответствует внешнему воздействию.

Положим $H = W_2^{-1}(\Omega)$, $A = L_2(\Omega)$, $V = L_p(\Omega)$. В силу теоремы вложения Соболева при $p \geq \dfrac{2n}{n+2}$ пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \subset L_q(\Omega)$ вложены непрерывно, поэтому выполнено непрерывное вложение $L_p(\Omega) \subset W_2^{-1}(\Omega)$. Определим в H скалярное произведение формулой

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega u\tilde{v}dx \ \ \forall u, v \in H, \tag{29}$$

где $\tilde{v}$ – обобщенное решение однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа $(-\Delta)$ в области Ω. Положим $V^* = (L_p(\Omega))^*$ и $A^* = (L_2(\Omega))^*$, где $(L_p(\Omega))^*$ – сопряженное относительно двойственности (29) пространство, и выполнено непрерывное вложение $W_q^{-1}(\Omega) \subset (L_p(\Omega))^*$. При таком определении A^* и V^* имеют место плотные и непрерывные вложения (25). Операторы L и M определим следующим образом:

$$\langle Lu, v \rangle = \int_\Omega (\lambda u\tilde{v} + uv)dx, \quad u,v \in A;$$

$$\langle N(u), v \rangle = \int_\Omega |u|^{p-2}uvdx, \quad u,v \in V.$$

Обозначим через $\{\varphi_k\}$ последовательность собственных функций однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа $(-\Delta)$ в области Ω, а через $\{\lambda_k\}$ – соответствующую последовательность собственных значений, занумерованную по неубыванию с учетом кратности.

Лемма 3.1. [28]

(i) При всех $\lambda \geq -\lambda_1$ оператор $L \in \mathrm{L}(A; A^*)$ самосопряжен, фредгольмов и неотрицательно определен, причем ортонормальное семейство $\{\varphi_k\}$ его функций тотально в пространстве A.

(ii) Оператор $N \in C^1(V; V^*)$ s-монотонен и сильно коэрцитивен.

Постороим проектор

$$Q = \begin{cases} \mathrm{I}, & \text{если } \lambda \neq -\lambda_1; \\ \mathrm{I} - \langle \cdot, \varphi_1 \rangle, & \text{если } \lambda = -\lambda_1 \end{cases}$$

и множества

$$\mathrm{B}_f = \begin{cases} V, & \text{если } \lambda > -\lambda_1; \\ \{u \in V : \int_\Omega |u|^{p-2}u\varphi_1\,dx = \int_\Omega f\tilde{\varphi}_1\,dx\}, & \text{если } \lambda = -\lambda_1, \end{cases}$$

$$\operatorname{coim} L = \begin{cases} A, & \text{если } \lambda > -\lambda_1; \\ \{u \in A : \langle u, \varphi_1 \rangle = 0\}, & \text{если } \lambda = -\lambda_1. \end{cases}$$

Теорема 3.2. [28] Пусть $p \ge \dfrac{2n}{n+2}$ и выполнено условие (27). Тогда множество B_f – простое банахово C^1-многообразие, моделируемое пространством $\operatorname{coim} L \cap V$.

3.2. Уравнение нелинейной диффузии

В цилиндре $\Omega \times \mathrm{R}_+$ рассмотрим задачу Коши–Дирихле (11) для уравнения

$$(\lambda - \Delta)u_t - \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f, \qquad p \ge 2, \tag{30}$$

которое моделирует процесс нелинейной диффузии [5]. Здесь искомая функция $u = u(x,t)$ отвечает потенциалу концентрации вещества; параметр $\lambda \in \mathrm{R}$ – коэффициент вязкости.

Положим $H = L_2(\Omega)$, $A = \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, $V = \overset{0}{W}{}_p^1(\Omega)$, $A^* = W_2^{-1}(\Omega)$, $V^* = W_p^{-1}(\Omega)$. Определим в H скалярное произведение формулой

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega uv\,dx \quad \forall u, v \in H.$$

При таком опеределении пространств A и V имеют место плотные и непрерывные вложения (25). Операторы L и N определим следующим образом:

$$\langle Lu, v\rangle = \int_\Omega (\lambda \nabla u \nabla v + uv)dx, \quad u, v \in A;$$

$$\langle N(u), v\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v dx, \quad u, v \in V.$$

Лемма 3.2. [28]

(i) При всех $\lambda \ge -\lambda_1$ оператор $L \in \mathrm{L}(A; A^*)$ самосопряжен, фредгольмов и неотрицательно определен, причем ортонормальное семейство $\{\varphi_k\}$ его функций тотально в пространстве A.

(ii) Оператор $M \in C^1(V; V^*)$ s-монотонен и сильно коэрцитивен.

Построим проектор

$$Q = \begin{cases} \mathrm{I}, & \text{если } \lambda \ne -\lambda_1; \\ \mathrm{I} - \langle \cdot, \varphi_1\rangle, & \text{если } \lambda = -\lambda_1. \end{cases}$$

Множества

$$\mathrm{B}_f = \begin{cases} V, & \text{если } \lambda > -\lambda_1; \\ \{u \in V : \langle N(u), \varphi_1\rangle = \langle f, \varphi_1\rangle\}, & \text{если } \lambda = -\lambda_1, \end{cases} \quad coim\, L = \begin{cases} A, & \text{если } \lambda > -\lambda_1; \\ \{u \in A : \langle u, \varphi_1\rangle = 0\}, & \text{если } \lambda = -\lambda_1. \end{cases}$$

Теорема 3.3. [28] Пусть $\lambda \ge -\lambda_1$ и выполнено условие (27). Тогда множество B_f – простое банахово C^1-многообразие, моделируемое пространством $\operatorname{coim} L \cap V$.

4. Особенности фазового пространства

Перейдем к рассмотрению случаев, когда фазовое пространство B не является простым банаховым многообразием, что может повлечь неединственность решения задачи Шоуолтера–Сидорова (2), (6). При помощи исследования морфологии фазового пространства удается изучить данные особенности. Пусть выполнены все условия на пространства и операторы п. 2.

Определение 4.1. Пусть функция $G \in C^\infty(\mathrm{R} \times U; \mathrm{R})$. Уравнение $G(x, v) = 0$ определяет k-сборку Уитни над открытым множеством $V \subset U$, если существуют функции $g_0, g_1, \ldots, g_k \in C^\infty(V; \mathrm{R})$ такие, что это уравнение эквивалентно уравнению

$$0 = g_0(u) + g_1(u)x + \ldots + g_k(u)x^k + x^{k+1} \quad \forall u \in V.$$

Определение 4.2. Пусть вектор $\varphi_0 \in \ker L \setminus \{0\}$, упорядоченное множество векторов $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ называется цепочкой M-присоединенных векторов собственного вектора φ_0, если

$$L\varphi_{k+1} = M\varphi_k, \quad k = 0, 1, \ldots, \quad \varphi_l \notin \ker L \setminus \{0\}, \quad l = 1, 2, \ldots$$

Порядковый номер вектора в цепочке будем называть его высотой, а порядковый номер последнего вектора в конечной цепочке – длиной этой цепочки.

Теорема 4.1. [52] Пусть оператор L фредгольмов. Тогда следующие утверждения эквивалентны

(i) оператор M (L, p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathrm{N}$;

(ii) длина любой цепочки M-присоединенных векторов оператора L ограничена числом $p \in \{0\} \cup \mathrm{N}$.

Рассмотрим случай, когда оператор L фредгольмов и не имеет M-присоединенных векторов, но имеет $(M + N'_{u_0})$ -присоединенные векторы и $\dim\ker L = 1$.

Теорема 4.2. [36] Пусть оператор L фредгольмов и $\dim\ker L = 1$. Пусть оператор L не имеет M-присоединенных векторов, но имеет в некоторой точке $u_0 \in U$ $(M + N'_{u_0})$ -присоединенные векторы высоты не больше $p \in \mathrm{N}$. Тогда в некоторой окрестности $O_{u_0} \subset U$ точки u_0 уравнение (2) может быть приведено к виду

$$\begin{gathered}\dot{\xi}_q = \xi_{q-1} + g_{q-1}(u), q = 1, 2, ..., p, \\ 0 = \xi_p + g_p(u), \\ \dot{u}^1 = Su^1 + F(u), \quad F = L_1^{-1}QN \in C^\infty(U; U^1).\end{gathered} \tag{31}$$

4.1. Уравнение Хоффа

Пусть $\Omega \subset \mathrm{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. В цилиндре $\Omega \times \mathrm{R}$ рассмотрим обобщенное уравнение Хоффа [49]

$$(\lambda + \Delta)u_t = \alpha_1 u + \alpha_2 u^3 + ... + \alpha_k u^{2k-1}, \tag{32}$$

моделирующее выпучивание двутавровой балки, находящейся под постоянной нагрузкой. Здесь искомая функция $u = u(x,t)$, $(x,t) \in \Omega \times \mathrm{R}$ имеет физический смысл отклонения балки от вертикали, параметры $\alpha_i \in \mathrm{R} \setminus \{0\}$, $i = 1, ..., k$, характеризуют свойства материала балки, параметр $\lambda \in \mathrm{R}_+$ характеризует нагрузку на балку. Рассмотрим задачу Коши–Дирихле (11) для уравнения (31).

Пусть $U = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $F = W_2^{-1}(\Omega)$, зададим операторы

$$\langle Lu, v\rangle = \int_\Omega (\lambda uv - \nabla u \nabla v)dx, \quad \forall u, v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega),$$

$$\langle Mu, v\rangle = \alpha_1 \int_\Omega uvdx, \quad \forall u, v \in L_{2k}(\Omega),$$

$$\langle N(u), v\rangle = \int_\Omega (\alpha_2 u^3 + ... + \alpha_{k-1}u^{2k-3} + \alpha_k u^{2k-1})vdx \quad \forall u, v \in L_{2k}(\Omega).$$

В силу теорем вложения Соболева вложение $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \subset L_{2k}(\Omega)$ плотно и непрерывно, следовательно, операторы $L, M \in \mathrm{L}(U; F)$, причем оператор L фредгольмов.

Лемма 4.1. [32]

(i) При всех $\alpha_1 \in \mathrm{R} \setminus \{0\}$, тогда оператор M $(L, 0)$-ограничен.

(ii) Оператор $N \in C^\infty(U; F)$, если $k = 1, 2$ при $n = 4$ или $k = 1, 2, 3$ при $n = 3$ или $k \in \mathrm{N}$ при $n = 1, 2$.

Обозначим через $\{\varphi_l\}$ собственные функции однородной задачи Дирихле для оператора Δ, а через $\{\lambda_l\}$ – соответствующие им собственные значения, занумерованные по неубыванию. Построим множество

$$\mathrm{B} = \left\{ u \in U : \int_\Omega (\alpha_1 + \alpha_2 u^2 + ... + \alpha_k u^{2k-2}) u\varphi_l dx = 0, \quad \lambda = -\lambda_l \right\}.$$

Замечание 4.1. Поскольку оператор M (L, 0)-ограничен, то все решения уравнения (32) являются квазистационарными траекториями.

Теорема 4.3. [32] Пусть $k = 1, 2$ при $n = 4$ или $k = 1, 2, 3$ при $n = 3$ или $k \in \mathrm{N}$ при $n = 1, 2$. Тогда

(i) если $\ker L = \{0\}$, то фазовым пространством уравнения (32) служит все пространство U;

(ii) если $\ker L \neq \{0\}$, все коэффициенты $\alpha_i \in \mathrm{R} \setminus \{0\}$, $I = 1, ..., k$ одного знака, то фазовым пространством уравнения (32) служит простое многообразие B, моделируемое подпространством $U^1 = \{u \in U : \langle u, \varphi_l \rangle = 0, \quad \lambda = -\lambda_l\}$.

Рассмотрим задачу Коши–Дирихле для уравнения Хоффа (11), (32) в случае $k = 2$ и $\dim\ker L = 1$. Построим проектор $\mathrm{I} - Q = <\cdot, \psi>$, где $\psi \in \ker L$, $\|\psi\|_{L_2(\Omega)} = 1$, и множество

$$\Xi = \{u \in U : < Mu + N(u), \psi >= 0\}.$$

Построим подпространство $U^1 = \{u \in U : < u, \psi >= 0\}$ и представим вектор $u = s\psi + v$, тогда множество Ξ C^∞-диффеоморфно множеству

$$\Xi_s = \left\{ (s,v) \in \mathrm{R} \times U : s^3 \|\psi\|_U^4 + 3s^2 \int_\Omega \psi^3 v dx + s\left(\int_\Omega \psi^2 v^2 dx + \alpha_1 \alpha_2^{-1} \right) + \int_\Omega \psi v^3 dx = 0 \right\}.$$

Выделим во множестве Ξ подмножество

$$\Xi' = \{u \in U :< M\psi + N'_u \psi, \psi >= 0\} \cap \Xi.$$

Множество Ξ' C^∞-диффеоморфно множеству

$$\Xi'_s = \left\{ (s,v) \in \mathrm{R} \times U^1 : 3s^2 \|\psi\|_U^4 + 6s \int_\Omega \psi^3 v dx + 3 \int_\Omega \psi^2 v^2 dx + \alpha_1 \alpha_2^{-1} = 0 \right\} \cap \Xi'.$$

Теорема 4.4. [36] Пусть $1 \le n \le 4$, $\alpha_1 \alpha_2 < 0$, $\lambda = \lambda_1$. Тогда

(i) любой вектор $\xi \in \ker L \setminus \{0\}$ не имеет $(M + N'_u)$-присоединенных векторов, если $u \in \Xi \setminus \Xi'$;

(ii) любой вектор $\xi \in \ker L \setminus \{0\}$ имеет точно один $(M + N'_u)$-присоединенный вектор, если $u \in \Xi' \setminus U^1$.

Замечание 4.2. Множество Ξ_s образует 2-сборку Уитни.

4.2. Уравнение Корпусова–Плетнера–Свешникова

Пусть $\Omega = (a,b) \subset \mathrm{R}$. В цилиндре $\Omega \times \mathrm{R}_+$ рассмотрим уравнение Корпусова–Плетнера–Свешникова

$$(\lambda - \Delta) u_t = \alpha \Delta u - \beta \operatorname{div}(u \operatorname{grad} u), \tag{33}$$

моделирующее метастабильные процессы в жидком двухкомпонентном полупроводнике. Параметры $\alpha, \beta, \lambda \in \mathrm{R}$ характеризуют свойства полупроводника. В случае отрицательности коэффициента λ возможен пробой полупроводника. Впервые уравнение (33) было получено в работе [13] и была установлена однозначная разрешимость начально-краевой задачи для уравнения (33) в случае положительности параметра λ.

Положим $U = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $F = W_2^{-1}(\Omega)$. Пространство F сопряжено к U относительно скалярного произведения $< \cdot, \cdot >$ из $L_2(\Omega)$. Операторы L, M и N определим следующим образом:

$$< Lu, v >= \int_a^b (\lambda uv + u_x v_x) dx, \quad < Mu, v >= -\int_a^b \alpha u_x v_x dx, \quad u, v \in U,$$

$$< N(u), v >= -\int_a^b \beta u u_x v_x dx, \quad u, v \in U.$$

По построению операторы $L, M \in \mathrm{L}(U;F)$ и фредгольмовы. Обозначим через $\{\lambda_k\}$ занумерованное по невозрастанию множество собственных значений однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа Δ на (a, b), а через $\{\varphi_k\}$ – ортонормированное в смысле $L_2(\Omega)$ множество соответствующих собственных функций. Построим множество

$$\Xi = \{u \in \mathsf{U} : \langle (Mu + N(u)), \varphi_l \rangle = 0, \lambda = \lambda_l\}$$

и пространства

$$U^0 = \ker L = \operatorname{span}\{\varphi_l : \lambda = \lambda_l\}, \quad U^1 = \{u \in U : \langle u, \varphi_l \rangle = 0, \lambda = \lambda_l\}.$$

Возьмем произвольную точку $u \in U$, тогда $u = a\varphi_l + v$, где $v = Pu \in U^1$, $a \in R$. Точка $u \in \Xi$ точно тогда, когда выполнено

$$\frac{a^2}{2}\|\varphi_l\|^3_{L_3(\Omega)} + a\left(\int_a^b v\varphi_l^2 dx + \frac{\alpha}{\beta}\right) + \frac{1}{2}\int_a^b v^2 \varphi_l dx = 0. \tag{34}$$

Введем в рассмотрение функционал $\delta : U^1 \to \mathrm{R}$:

$$\delta(v) = (\int_a^b v\varphi_l^2 dx + \frac{\alpha}{\beta})^2 - \|\varphi_l\|^3_{L_3(\Omega)} \int_a^b v^2 \varphi_l dx$$

и построим множества

$$U^1_+ = \{v \in U^1 : \delta(v) > 0\}, \quad U^1_- = \{v \in U^1 : \delta(v) < 0\}.$$

Возьмем точку $v \in U^1_+$, тогда уравнение (34) имеет два решения

$$a_- = \|\varphi_l\|^{-3}_{L_3(\Omega)}\left(-\frac{\alpha}{\beta} - \int_a^b v\varphi_l^2 dx - \sqrt{\delta(v)}\right), \quad a_+ = \|\varphi_l\|^{-3}_{L_3(\Omega)}\left(-\frac{\alpha}{\beta} - \int_a^b v\varphi_l^2 dx + \sqrt{\delta(v)}\right).$$

Построим множества

$$\Xi_{+(-)} = \{u \in U : u = a_{+(-)}(v)\varphi_l + v, \ v \in U^1_+\}.$$

Теорема 4.5. [35] Пусть $\alpha, \beta \in R \setminus \{0\}$ и

(i) $\lambda \notin \{\lambda_k\}$. Тогда фазовым пространством уравнения (33) является все пространство *U*.

(ii) $\lambda \in \{\lambda_k\}$. Тогда фазовым пространством уравнения (33) является множество $\Xi_+ \cup \Xi_-$, каждая компонента которого Ξ_+ и Ξ_- биективно проектируется на множество U^1_+.

Перейдем к рассмотрению задачи Шоуолтера–Сидорова–Дирихле

$$(\lambda - \Delta)(u(x,0) - u_0(x)) = 0, \ x \in (a,b); \quad u(a,t) = u(b,t) = 0, \ t \in \mathrm{R}. \tag{35}$$

Теорема 4.6. [35] При любых $\alpha, \beta \in \mathrm{R} \setminus \{0\}$ и

(i) $\lambda \in \mathrm{R} \setminus \{-\lambda_k\}$ существует точно одно решение задачи (33), (35) при любых $u_0 \in U$.

(ii) $\lambda \in \{-\lambda_k\}$ существует два различных решения задачи (33), (35) при любых $u_0 \in U$ таких, что $Pu_0 \in U^1_+$.

(iii) $\lambda \in \{-\lambda_k\}$ не существует ни одного решения задачи (33), (35) при любых $u_0 \in U$ таких, что $Pu_0 \in U^1_-$.

Замечание 4.3. В работе [4] была исследована неединственность решения задачи Шоуолтера–Сидорова для модели Плотникова.

4.3. Уравнение Бенжамина–Бона–Махони на графе

Пусть $\mathrm{G} = \mathrm{G}(V; E)$ – конечный связный ориентированный граф, где $V = \{V_i\}_{i=1}^M$ – множество вершин, а $E = \{E_j\}_{j=1}^N$ – множество дуг. На графе G рассмотрим уравнения

$$(\lambda - \lambda_0)u_{jt} + u_{jtxx} = u_j u_{jx} - \nu u_{jxx} + \varepsilon u_j, \tag{36}$$

каждое их которых служит одномерным аналогом системы уравнений Осколкова и является гибридом уравнений Бенджамина–Бони–Махони и Бюргерса и моделирует длинные волны в диссипативных и дисперсных средах. Для уравнений (36) в каждой вершине графа зададим условия

$$u_j(0,t) = u_k(0,t) = u_m(l_m,t) = u_p(l_p,t), \tag{37}$$

$$\sum_j d_j u_{jx}(0,t) - \sum_m d_m u_{mx}(l_m,t) = 0, \tag{38}$$

где $E_j, E_k \in E^{\alpha}(V_i)$, $E_m, E_p \in E^{\omega}(V_i)$, $t \in \mathbb{R}$. Здесь через $E^{\alpha(\omega)}(V_i)$ обозначено множество дуг с началом (концом) в вершине V_i.

Для редукции задачи (36)–(38) к уравнению (2) введем в рассмотрение гильбертово пространство $L_2(\mathrm{G}) = \{g = (g_1, g_2, ..., g_j, ...) : g_j \in L_2(0, l_j)\}$ со скалярным произведением

$$< g, h >= \sum_{E_j \in E} d_j \int_0^{l_j} g_j(x) h_j(x) dx.$$

Положим $U = \{u = (u_1, u_2, ..., u_j, ...) : u_j \in W_2^1(0, l_j)$ и выполнено условие (37)$\}$, а через F обозначим сопряженное пространство к U относительно скалярного произведения $<\cdot,\cdot>$. Формулой

$$< Au, v >= \sum_{E_j \in E} d_j \int_0^{l_j} (u_{jx}(x) v_{jx}(x) + \lambda_0 u_j(x) v_j(x)) dx, \quad \lambda_0 > 0, \quad u, v \in U,$$

зададим оператор, определенный на пространстве U. Спектр оператора A вещественен, дискретен, конечнократен и сгущается только к $+\infty$, а его собственные функции образуют базис в пространстве $L_2(\mathrm{G})$ [1]. Обозначим через φ_0 первую собственную функцию, отвечающую первому собственному значению λ_0, а через $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ обозначим семейство остальных собственных значений оператора A, занумерованное по неубыванию с учетом их кратности; через $\{\varphi_k\}$ обозначим соответствующие ортонормированные в смысле $L_2(\mathrm{G})$ собственные функции. Формулами $L = A - \lambda$, $M = \nu(\lambda_0 - A) + \varepsilon$ зададим операторы $L, M : U \to F$. Далее формулой

$$\langle N(u), v \rangle = -\sum_{E_j \in E} d_j \int_0^{l_j} u_j u_{jx} v_j dx$$

зададим оператор $N : U \to F$.

Лемма 4.2. [37]

(i) При всех $\varepsilon, \lambda, \lambda_0, \nu \in \mathbb{R}$ операторы L, M принадлежат $\mathrm{L}(U;F)$, причем, если $|\varepsilon| + |\lambda_0| > 0$, то оператор M является (L, 0)-ограниченным.

(ii) Оператор N принадлежит $C^{\infty}(U;F)$.

Построим подпространство $U^1 = \{u \in U :< u, \varphi_0 >= 0\}$ и множества

$$\Xi_{+(-)} = \{u \in U^1 : \sum_{E_j \in E} d_j \int_0^{l_j} (u_{jx} - \varepsilon) dx > 0\}.$$

Теорема 4.7. [37] При любых $\nu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \lambda_0 \in \mathbb{R}_+$ фазовым пространством задачи (36) – (38) является

(i) пространство U, если $\lambda \in (0, \lambda_1) \setminus \{\lambda_0\}$;

(ii) C^{∞}-банахово многообразие $\Xi = \Xi_+ \cup \Xi_-$, моделируемое подпространством U^1, любой атлас которого эквивалентен атласу из двух непересекающихся карт, если $\lambda = \lambda_0$.

Замечание 4.4. В теореме 4.7 показано, что фазовым многообразием задачи (36)–(38) является C^{∞}-банахово многообразие, однако многообразие не является простым и состоит из двух непересекающихся компонент.

Литература

1. Баязитова, А.А. Задача Штурма–Лиувилля на геометрическом графе / А.А. Баязитова // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2010. – вып. 5. – № 16 (192). – С. 4–10.

2. Богатырева, Е.А. Численное моделирование процесса неравновесной противоточной капиллярной пропитки / Е.А. Богатырева, Н.А. Манакова // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2016. – Т. 56, № 1. – С. 125–132.

3. Бокарева, Т.А. Сборки Уитни фазовых пространств некоторых полулинейных уравнений типа Соболева / Т.А. Бокарева, Г.А. Свиридюк // Математические заметки. – 1994. – Т. 55, № 3. – С. 3–10.

4. Гильмутдинова, А.Ф. О неединственности решений задачи Шоуолтера–Сидорова для одной модели Плотникова / А.Ф. Гильмутдинова // Вестник СамГУ. – 2007. – № 9/1. – С. 85–90.

5. Дзекцер, Е.С. Обобщение уравнения движения грунтовых вод / Е.С. Дзекцер // ДАН СССР. – 1972. – № 5. – С. 1031–1033.

6. Загребина, С.А. Устойчивые и неусточивые многообразия решений полулинейных уравнений соболевского типа / С.А. Загребина, М.А. Сагадеева. – Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2016. – 121 с.

7. Загребина, С.А. Начально-конечные задачи для неклассических моделей математической физики / С.А. Загребина // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2013. – Т. 6, № 2. – С. 5–24.

8. Замышляева, А.А. Линейные уравнения соболевского типа высокого порядка / А.А. Замышляева. – Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2012. – 107 с.

9. Замышляева, А.А. Оптимальное управление решениями начально-конечной задачи для уравнений Буссинеска–Лява / А.А. Замышляева, О.Н. Цыпленкова // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2012. – Вып. 11. – № 5 (264). – С. 13–24.

10. Замышляева, А.А. Фазовое пространство модифицированного уравнения Буссинеска / А.А Замышляева., Е.В. Бычков // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2012. – Вып. 12. – № 18 (277). – С. 13–19.

11. Замышляева, А.А. Вычислительный эксперимент для одной математической модели ионно-звуковых волн / А.А. Замышляева, А.С. Муравьев // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2015. – Т. 8, № 2. – С. 127–132.

12. Келлер, А.В. Алгоритм решения задачи Шоуолтера–Сидорова для моделей леонтьевского типа / А.В. Келлер // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2011. – вып. 7. – № 4 (221). – С. 40–46.

13. Корпусов, М.О. О квазистационарных процессах в проводящих средах без дисперсии / М.О. Корпусов, Ю.Д. Плетнер, А.Г. Свешников // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2000. – Т. 4, № 8. – С. 1237–1249.

14. Кузнецов, Г.А. Фазовое пространство задачи термоконвекции вязкоупругой несжимаемой жидкости / Г.А. Кузнецов, М.М. Якупов // Вестник Челябинского государственного университета. – 2002. – Т. 3, № 1. – С. 92–103.

15. Ладыженская, О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О.А. Ладыженская. – М.: Физматгиз, 1961. – 204 с.

16. Ленг, С. Введение в теорию дифференцируемых многообразий / С. Ленг. – М.: Мир, 1967. – 203 с.

17. Осколков, А.П. Начально-краевые задачи для уравнений движения нелинейных вязкоупругих жидкостей / А.П. Осколков // Записки научных семинаров ЛОМИ. – 1985. – Т. 147. – С. 110–119.

18. Осколков, А.П. Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина–Фойгта и жидкостей Олдройта / А.П. Осколков // Труда Матем. ин-та АН СССР. – 1988. – Т. 179. – С. 126–164.

19. Осколков, А.П. Нелокальные задачи для одного класса нелинейных операторных уравнений, возникающих в теории уравнений типа С.Л. Соболева / А.П. Осколков // Записки научных семинаров ЛОМИ. – 1991. – Т. 198. – С. 31–48.

20. Осколков, А.П. К теории устойчивости решений полулинейных диссипативных уравнений типа С.Л. Соболева / А.П. Осколков // Записки научных семинаров ПОМИ. – 1992. – Т. 200. – С. 139–148.

21. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов, Ю.Д. Плетнер. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 736 с.

22. Свиридюк, Г.А. Многообразие решений одного сингулярного псевдопараболического уравнения / Г.А. Свиридюк // ДАН СССР. – 1986. – Т. 289, № 6. – С. 1315–1318.

23. Свиридюк, Г.А. О многообразии решений одной задачи динамики вязкоупругой несжимаемой жидкости // Дифференциальные уравнения. – 1988. – Т. 24, № 10. – С. 1846–1848.

24. Свиридюк, Г.А. Задача Коши для одного класса полулинейных уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк, Т.Г. Сукачева // Сибирский математический журнал. – 1990. – Т. 31, № 5. – С. 109–119.

25. Свиридюк, Г.А. Фазовые пространства полулинейных уравнений типа Соболева с относительно сильно секториальным оператором / Г.А. Свиридюк // Алгебра и анализ. – 1994. – Т. 6, № 2. – С. 252–272.

26. Свиридюк, Г.А. К общей теории полугрупп операторов / Г.А. Свиридюк // Успехи математических наук. – 1994. – Т. 49, № 4. – С. 47–74.

27. Свиридюк, Г.А. Об одной модели слабосжимаемой вязкоупругой жидкости / Г.А. Свиридюк // Известия ВУЗ. Математика. – 1994. – № 1. – С. 62–70.

28. Свиридюк, Г.А. Фазовые пространства уравнений типа Соболева с s-монотонными и сильно коэрцитивными операторами / Г.А. Свиридюк, М.В. Климентьев // Известия ВУЗ. Математика. – 1994. – № 11. – С. 75–82.

29. Свиридюк, Г.А. Фазовое пространство начально-краевой задачи для системы Осколкова / Г.А. Свиридюк, М.М. Якупов // Дифференциальные уравнения. – 1996. – Т. 32, № 11. – С. 1538–1543.

30. Свиридюк, Г.А. Об относительно сильной p-секториальности линейных операторов / Г.А. Свиридюк, Г.А. Кузнецов // Доклады Академии наук. – 1999. – Т. 365, № 6. – С. 736.

31. Свиридюк, Г.А. Задача Веригина для линейных уравнений соболевского типа с относительно p-секториальными операторами / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Дифференциальные уравнения. – 2002. – Т. 38, № 12. – С. 1646–1652.

32. Свиридюк, Г.А. Фазовое пространство начально-краевой задачи для уравнения Хоффа / Г.А. Свиридюк, В.О. Казак // Математические заметки. – 2002. – Т. 71, № 2. – С. 292–297.

33. Свиридюк, Г.А. Фазовое пространство задачи Коши–Дирихле для уравнения Осколкова нелинейной фильтрации / Г.А. Свиридюк, Н.А. Манакова // Известия вузов. Математика. – 2003.– № 9. – С. 36–41.

34. Свиридюк, Г.А. Фазовое пространство одной обобщенной модели Осколкова / Г.А. Свиридюк, В.О. Казак // Сибирский математический журнал. – 2003. – Т. 44, № 5. – С. 1124–1131.

35. Свиридюк, Г.А. О складке фазового пространства одного неклассического уравнения / Г.А. Свиридюк, А.Ф. Карамова // Дифференциальные уравнения. – 2005. – Т. 41, № 10. – С. 1476–1581.

36. Свиридюк, Г.А. Сборка Уитни в фазовом пространстве уравнения Хоффа / Г.А. Свиридюк, И.К. Тринеева // Известия вузов. Математика. – 2005. – № 10. – С. 54–60.

37. Свиридюк, Г.А. Уравнения Хоффа на графах / Г.А. Свиридюк, В.В. Шеметова // Дифференциальные уравнения. – 2006. – Т. 42, № 1. – С. 126–131.

38. Свиридюк, Г.А. Задача Шоуолтера–Сидорова как феномен уравнений соболевского типа / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2010. – Т. 3, № 1. – С. 51–72.

39. Свиридюк, Г.А. О сходимости численного решения задач оптимального управления для систем уравнений леонтьевского типа / Г.А. Свиридюк, А.В. Келлер // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2011. – № 2 (23). – С. 24–33.

40. Свиридюк, Г.А. Динамические модели соболевского типа с условием Шоуолтера–Сидорова и аддитивными шумами / Г.А. Свиридюк, Н.А. Манакова // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2014. – Т. 7, № 1. – С. 90–103.

41. Сукачева, Т.Г. Об одной модели движения несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина–Фойгта ненулевого порядка / Т.Г. Сукачева // Дифференциальные уравнения. – 1997. – Т. 33, № 4. – С. 552–557.

42. Покорный, Ю.В. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин, В.Л. Прядиев и др. – М.: Физматлит, 2004. – 272 с.

43. Темам, Р. Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ / Р. Темам. – М.: Мир, 1981.

44. Шестаков, А.Л. Численное решение задачи оптимального измерения / А.Л. Шестаков, А.В. Келлер, Е.И. Назарова // Автоматика и телемеханика. – 2012. – № 1. – С. 107–115.

45. Al'shin, A.B. Blow-up in nonlinear Sobolev type equations / A.B. Al'shin, M.O. Korpusov, A.G. Sveshnikov. – Walter de Gruyter & Co., Berlin De Greyter Berlin Walter de Gruyter & Co., Berlin De Greyter Berlin, 2011. – 648 p.

46. Demidenko, G.V. Partial differential equations and systems not solved with respect to the highest order derivative // G.V. Demidenko, S.V. Uspenskii. – N.Y.; Basel; Hong Kong: Marcel Dekker, Inc., 2003. – 239 p.

47. Favini, A. Degenerate differential equations in Banach spaces / A. Favini, A. Yagi. – N.Y.: Marcel Dekker, Inc. 1999. – 236 p.

48. Favini, A. Linear Sobolev type equations with relatively p-sectorial operators in space of «noises» // A. Favini, G.A. Sviridyuk, N.A. Manakova // Abstract and Applied Analysis. – 2015. – V. 2015. – Article ID 697410. – p. 8

49. Hoff, N.J. Creep Buckling / N.J. Hoff // Journal of Aeronautical Sciences. – 1956. – №. 7. – P. 1–20.

50. Pyatkov, S.G. Operator theory. Nonclassical problems / S.G. Pyatkov. – Utrecht; Boston; Koln; Tokyo: VSP, 2002. – 346 p.

51. Showalter, R.E. The Sobolev equation / R.E. Showalter // Applicable Analysis. – 1975. – V. 5, № 1. – P. 5–22; V. 5, № 2. – P. 81–89.

52. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Köln: VSP, 2003. – 216 p.

53. Sukacheva, T.G. On a class of Sobolev-type equations / T.G. Sukacheva, A.O. Kondyukov // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2014. – Т. 7, № 4. – С. 5–21.

54. Zagrebina, S.A. A Multipoint initial-final value problem for a linear model of plane-parallel thermal convection in viscoelastic incompressible fluid / S.A. Zagrebina // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2014. – Т. 7, № 3. – С. 5–22.

Поступила в редакцию 15 июня 2016 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series “Mathematics. Mechanics. Physics”
2016, vol. 8, no. 3, pp. 31–51

DOI: 10.14529/mmph160304

NONCLASSICAL EQUATIONS OF MATHEMATICAL PHYSICS. PHASE SPACE OF SEMILINEAR SOBOLEV TYPE EQUATIONS

N.A. Manakova, G.A. Sviridyuk
South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E-mail: manakovana@susu.ru

The article surveys the results concerning the morphology of phase spaces for semilinear Sobolev type equations. The first three paragraphs present specific boundary value problems for Sobolev type partial differential equations whose phase spaces are simple smooth Banach manifolds. The last section contains the mathematical models whose phase spaces lie on a smooth Banach manifolds with singularities. The purpose of this article is the formation of a basis for future studies of the morphology of phase spaces for semilinear Sobolev type equations. In addition, the article provides an explanation of the phenomenon of nonexistence of solutions to the Cauchy problem and the phenomenon of nonuniqueness of solutions to the Showalter–Sidorov problem for the semilinear Sobolev type equations.

Keywords: Sobolev type equations; phase space; the morphology of the phase space; Banach manifold; quasistationary trajectory; Showalter–Sidorov problem; Cauchy problem; k-assembly Whitney.

References

1. Bayazitova A.A. The Sturm–Liouville problem on geometric graph. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2010, no. 16 (192), Issue 5, pp. 4–10. (in Russ.).

2. Bogatyreva E.A., Manakova N.A. Numerical simulation of the process of nonequilibrium counterflow capillary imbibition. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2016, Vol. 56, no. 1, pp. 132–139. DOI: 10.1134/S0965542516010085

3. Bokarieva T.A., Sviridyuk G.A. Whitney folds in phase spaces of some semilinear Sobolev-type equations. *Mathematical Notes*, 1994, Vol. 55, no. 3, pp. 237–242. DOI: 10.1007/BF02110776

4. Gil'mutdinova A.F. [On the non-uniqueness of solutions of Showalter–Sidorov problem for one Plotnikov model]. *Vestnik of Samara State University*, 2007, no. 9/1, pp. 85–90.

5. Dzektser E.S. Obobshchenie uravneniya dvizheniya gruntovykh vod [The generalization of the equations of motion of groundwater]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1972, no. 5, pp. 1031–1033. (in Russ.).

6. Zagrebina S.A., Sagadeeva M.A. *Stable and unstable manifolds of solutions of nonlinear Sobolev type equations*. Chelyabinsk, Publ. Center of the South Ural State University, 2016, 121 p. (in Russ.).

7. Zagrebina S.A. The initial-finite problems for nonclassical models of mathematical physics. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2013, Vol. 6, no. 2, pp. 5–24. (in Russ.).

8. Zamyshlyaeva A.A. *Linear Sobolev type equations of higher-order.* Chelyabinsk, Publ. Center of the South Ural State University, 2012, 107 p. (in Russ.)

9. Zamyshlyaeva A.A., Tsyplenkova O.N. The optimal control over solution of the initial-finish value problem for the Boussinesque–Love equation. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2012, Issue 11, no. 5 (264), pp. 13–24. (in Russ.).

10. Zamyshlyaeva A.A., Bychkov E.V. The phase space of the modified Boussinesq equation. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2012, Issue 12, no. 18 (277), pp. 13–19. (in Russ.).

11. Zamyshlyaeva A.A., Muravyev A.S. Computational experiment for one mathematical model of ion-acoustic waves. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2015, Vol. 8, no. 2, pp. 127–132. DOI: 10.14529/mmp150211

12. Keller A.V. The algorithm for solution of the Showalter–Sidorov problem for Leontief type models. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2011, issue 7, no. 4(221), pp. 40–46. (in Russ.).

13. Korpusov M.O., Pletner Yu.D., Sveshnikov A.G. On quasi-steady processes in conducting nondispersive media. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2000, Vol. 40, no. 8, pp. 1188–1199.

14. Kuznetsov G.A., Yakupov M.M. The phase space of the problem of convection of viscoelastic incompressible fluid. *Bulletin of the Chelyabinsk State University*, 2002, Vol. 3, no. 1, pp. 92–103. (in Russ.).

15. Ladyzhenskaya O.A. *The mathematical theory of viscous incompressible flow*. N.Y., London, Paris, Gordon and Breach, 1969, 234 p.

16. Leng S. *Introduction to Differentiable Manifolds*. N.Y., Springer, 2002, 263 p.

17. Oskolkov A.P. [Initial-boundary value problems for equations of motion nonlinear viscoelastic fluids]. *Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)*, 1985, Vol. 147, pp. 110–119. (in Russ.).

18. Oskolkov A.P. Initial-boundary value problems for equations of motion of Kelvin–Voight fluids and Oldroyd fluids. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 1989, Vol. 179, pp. 137–182.

19. Oskolkov A.P. Nonlocal problems for one class of nonlinear operator equations that arise in the theory of Sobolev type equations. *Journal of Mathematical Sciences*, 1993, Vol. 64, issue 1, pp. 724–736. DOI: 10.1007/BF02988478

20. Oskolkov A.P. On stability theory for solutions of semilinear dissipative equations of the Sobolev type. *Journal of Mathematical Sciences*, 1995, Vol. 77, no. 3, pp. 3225–3231. DOI: 10.1007/BF02364715

21. Sveshnikov A.G., Al'shin A.B., Korpusov M.O., Pletner Yu.D. *Lineynye i nelineynye uravneniya sobolevskogo tipa* [Linear and nonlinear the Sobolev type equations]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2007, 736 p. (in Russ.).

22. Sviridyuk G.A. Mnogoobrazie resheniy odnogo singulyarnogo psevdoparabolicheskogo uravneniya [The manifold of solutions of an operator singular pseudoparabolic equation]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1986, Vol. 289, no. 6, pp. 1315–1318. (in Russ.).

23. Sviridyuk G.A. O mnogoobrazii resheniy odnoy zadachi dinamiki vyazkouprugoy neszhimaemoy zhidkosti [On the manifold of solutions of a problem on the dynamics of a incompressible viscoelastic fluid]. *Differential Equations*, 1988, Vol. 24, no. 10, pp. 1846–1848. (in Russ.).

24. Sviridyuk G.A., Sukacheva T.G. The Cauchy problem for a class of semilinear equations of Sobolev type. *Siberian Mathematical Journal*, 1991, Vol. 31, no. 5, pp. 794–802. DOI: 10.1007/BF00974493

25. Sviridyuk G.A. Phase portraits of Sobolev-type semilinear equations with a relatively strongly sectorial operator. *St. Petersburg Mathematical Journal*, 1995, Vol. 6, no. 5, pp. 1109–1126.

26. Sviridyuk G.A. On the general theory of operator semigroups. *Russian Mathematical Surveys*, 1994, Vol. 49, no. 4, pp. 45–74. DOI: 10.1070/RM1994v049n04ABEH002390

27. Sviridyuk G.A. A model of dynamics of incompressible viskoelastic liquid. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 1994, Vol. 38, no. 1, pp. 59–68.

28. Sviridyuk G.A., Kliment'ev M.V. Phase spaces of Sobolev-type equations with *s*-monotone or strongly coercive operators. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 1994, Vol. 38, no. 11, pp. 72–79.

29. Sviridyuk G.A., Yakupov M.M. The phase space of the initial-boundary value problem for the Oskolkov system. *Differential equations*, 1996, Vol. 32, no. 11, pp. 1535–1540.

30. Sviridyuk G.A., Kuznetsov G.A. Relatively strongly p-sectorial linear operators. *Doklady Mathematics*, 1999, Vol. 59, no. 2, pp. 298–300.

31. Sviridyuk G.A., Zagrebina S.A. Verigin's problem for linear equations of the Sobolev type with relatively *p*-sectorial operators. *Differential Equations*, 2002, Vol. 38, no. 12, pp. 1745–1752.

32. Sviridyuk G.A., Kazak V.O. The phase space of an initial-boundary value problem for the Hoff equation. *Mathematical Notes*, 2002, Vol. 71, no. 1–2, pp. 262–266. DOI: 10.1023/A:1013919500605

33. Sviridyuk G.A., Manakova N.A. Phase space of the Cauchy–Dirichlet problem for the Oskolkov equation of nonlinear filtration. *Russian Mathematics*, 2003, Vol. 47, no. 9, pp. 33–38.

34. Sviridyuk G.A., Kazak V.O. The phase space of one generalized model of Oskolkov. *Siberian Math. J.*, 2003, Vol. 44, no. 5, pp. 1124–1131. (in Russ.).

35. Sviridyuk G.A., Karamova A.F. On the crease phase space of one non-classical equations. *Differential equations*, 2005, Vol. 41, no. 10, pp. 1476–1581. (in Russ.). DOI: 10.1007/s10625-005-0300-5

36. Sviridyuk G.A., Trineeva I.K. A Whitney fold in the phase space of the Hoff equation. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 2005, Vol. 49, no. 10, pp. 49–55.

37. Sviridyuk G.A., Shemetova V.V. Hoff equations on graphs. *Differential Equations*, 2006, Vol. 42, no. 1, pp. 139–145. DOI: 10.1134/S0012266106010125

38. Sviridyuk G.A., Zagrebina S.A. The Showalter–Sidorov problem as a phenomena of the Sobolev type equations. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series: Mathematics*, 2010, Vol. 3, no. 1, pp. 104–125. (in Russ.).

39. Sviridyuk G.A., Keller A.V. On the convergence of the numerical solution of optimal control problems for systems of Leontief type equations. *Journal of Samara State Technical University. Series Physical and Mathematical Sciences*, 2011, no. 2 (23), pp. 24–33. (In Russ.)

40. Sviridyuk G.A., Manakova N.A. The dynamical models of Sobolev type with Showalter–Sidorov condition and additive “noise”. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathemati-*

cal Modelling, Programming and Computer Software, 2014, Vol. 7, no. 1, pp. 90–103. DOI: 10.14529/mmp140108

41. Sukacheva T.G. A model for the motion of incompressible viscoelastic fluid Kelvin–Voigt nonzero order. *Differential Equations*, 1997, Vol. 33, no. 4, pp. 552–557. (in Russ.).

42. Pokornyy Yu.V., Penkin O.M., Borovskikh A.V., Pryadiev V.L., Lazarev K.P., Shabrov S.A. *Differentsial'nye uravneniya na geometricheskikh grafakh* [Differential equations on geometrical graphs]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2004, 272 p. (In Russ.)

43. Temam R. *Navier–Stokes equations. Theory and numerical analysis*. Stud. Math. Appl., 2. Amsterdam, N.Y., North-Holland, 1979, 519 p.

44. Shestakov A.L., Keller A.V., Nazarova E.I. Numerical solution of the optimal measurement problem. *Automation and Remote Control*, 2012, Vol. 73, no. 1, pp. 97–104. DOI: 10.1134/S0005117912010079

45. Al'shin A.B., Korpusov M.O., Sveshnikov A.G. *Blow-up in nonlinear Sobolev type equations.* Series in Nonlinear Analisys and Applications. Walter de Gruyter & Co., Berlin De Greyter Berlin Walter de Gruyter & Co., Berlin De Greyter Berlin, 2011, 648 p.

46. Demidenko G.V., Uspenskii S.V. *Partial differential equations and systems not solved with respect to the highest order derivative*. N.Y., Basel, Hong Kong, Marcel Dekker, Inc., 2003, 239 p.

47. Favini A., Yagi A. *Degenerate differential equations in Banach spaces*. N.Y., Marcel Dekker, Inc., 1999, 236 p.

48. Favini A., Sviridyuk G.A., Manakova N.A. Linear Sobolev type equations with relatively. *p*-sectorial operators in space of “noises”, *Abstract and Applied Analysis*, 2015, p. 8, Article ID 697410. DOI:10.1155/2015/697410

49. Hoff N.J. Creep buckling. *Journal of Aeronautical Sciences*, 1956, no. 7, pp. 1–20.

50. Pyatkov S.G. *Operator theory. Nonclassical problems*. Utrecht, Boston, Koln, Tokyo, VSP, 2002, 346 p.

51. Showalter R.E. The Sobolev equation. *Applicable Analysis*, 1975, Vol. 5, no. 1, pp. 5–22; Vol. 5, no. 2, pp. 81–89. DOI: 10.1080/00036817508839103

52. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. *Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators*. Utrecht, Boston, Koln, Tokyo, VSP, 2003, 216 p. (in Russ.).

53. Sukacheva T.G., Kondyukov A.O. On a class of Sobolev-type equations. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2014, Vol. 7, no. 4, pp. 5–21. DOI: 10.14529/mmp140401

54. Zagrebina S.A. A Multipoint initial-final value problem for a linear model of plane-parallel thermal convection in viscoelastic incompressible fluid. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2014, Vol. 7, no. 3, pp. 5–22. (in Russ.). DOI: 10.14529/mmp140301

Received June 15, 2016