УДК 517.968 DOI: 10.14529/mmph160305

ВЫРОЖДЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА ТИПА СВЕРТКИ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

С.С. Орлов
Иркутский государственный университет, г. Иркутск, Российская Федерация
E-mail: orlov_sergey@inbox.ru

Изучен вопрос однозначной разрешимости линейных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра в банаховых пространствах с необратимым оператором в главной части. Операторнозначное ядро имеет специальный вид $K(t, s) = g(t - s)A$, где $g = g(t)$ – числовая функция, A – линейный оператор. Именно в такой форме эти уравнения часто встречаются в приложениях. Для их исследования становится возможным применение структурной теории пучков двух линейных операторов, которая в настоящее время наиболее полно разработана Г.А. Свиридюком и его учениками. Еще одна особенность изучаемых в данной работе задач состоит в наличии у функции $g = g(t)$ кратного нуля в точке $t = 0$. В предположении спектральной ограниченности оператора A относительно вырожденной главной части уравнений построены фундаментальные оператор-функции соответствующих интегральных и интегро-дифференциальных операторов в банаховых пространствах. На этой основе доказаны теоремы существования и единственности решений рассматриваемых задач в классе распределений с ограниченным слева носителем. Установлена зависимость порядка сингулярности обобщенных решений от кратности нуля интегрального ядра в начальной точке. Получены условия, при которых обобщенные решения совпадают с классическими. Теоремы, сформулированные для абстрактных уравнений, применены к исследованию содержательных начально-краевых задач, возникающих в физике плазмы и математической теории упругости.

Ключевые слова: относительная спектральная ограниченность линейного оператора; распределение; фундаментальная оператор-функция.

Введение

Теория интегральных уравнений в абстрактных пространствах представляет интерес примерно с 60-х годов прошлого столетия. Этой тематике посвящена обширная библиография (см. монографии [1–3] и сопутствующие им обзоры литературы); среди отечественных исследований в данной области следует отметить работы И.Ц. Гохберга и М.Г. Крейна [4], М.М. Лаврентьева [5], А.Л. Бухгейма [6], И.В. Сапронова [7], Н.Д. Копачевского [8] и др. Во всех упомянутых работах изучаются классы уравнений Вольтерра с тождественным или непрерывно обратимым линейным оператором при внеинтегральном слагаемом (в главной части). Вырожденные интегральные уравнения в абстрактных пространствах представлены в современной литературе существенно меньшим числом публикаций, примерами таких являются [9–12]. Исследования систем интегральных уравнений с необратимой матрицей коэффициентов в главной части проводились М.В. Булатовым [13], В.Ф. Чистяковым [14] и др. Интегральные уравнения Вольтерра с вырождением в бесконечномерных пространствах впервые рассмотрены в пионерской работе Н.А. Сидорова [15], где изучалась однозначная разрешимость в классе непрерывных функций уравнения

$$Bu(t) - \int_0^t K(t-s)u(s)ds = f(t)$$

с фредгольмовым оператором B и операторнозначным ядром $K(t)$. В [16] к исследованию этой задачи впервые применен аппарат обобщенных функций со значениями в банаховых пространствах, ее однозначная разрешимость в классе распределений с ограниченным слева носителем доказана в [17] с помощью конструкции фундаментальной оператор-функции. В этих работах естественным образом возникала задача о построении обобщенного жорданова набора оператора B

относительно оператор-функции $K(t)$. Как отмечено автором [18, с. 112], применение разработанных методов становится весьма затруднительным, если $K(t)$ имеет в точке $t=0$ нуль кратности ℓ, т. е. $K(0)=K'(0)=\ldots=K^{(\ell-1)}(0)=\mathrm{O}$ и $K^{(\ell)}(0)\neq\mathrm{O}$. Здесь и далее O – нулевой оператор. В этом случае неизвестно как строится жорданов набор оператора B. Подобная проблема возникает при изучении сингулярных линейных интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра в банаховых пространствах с дифференциальной частью высокого порядка, в которой отсутствует хотя бы одно слагаемое наивысшего порядка группы младших производных.

Пусть E_1, E_2 – банаховы пространства, $\mathrm{u}=u(t)$, $\mathrm{f}=f(t)$ – неизвестная и заданная функции неотрицательного действительного аргумента t со значениями в E_1 и E_2 соответственно. Рассмотрим интегральное уравнение

$$Bu(t)-\int_0^t g(t-s)Au(s)ds=f(t)\,, \tag{1}$$

где B, A – линейные операторы, причем $B\in L(E_1,E_2)$, $A\in Cl(E_1,E_2)$ (т. е. A замкнут и $\overline{D(A)}=E_1$), ядро $\mathrm{g}=g(t)$ – числовая функция. В этом случае $K(t)=g(t)A$, и он наиболее типичен для приложений. Будем предполагать, что оператор B является необратимым, а функция $\mathrm{g}=g(t)$ – аналитической в точке $t=0$ и имеет в этой точке нуль кратности ℓ.

В работе [19] исследован вопрос существования и единственности решения уравнения (1) в классе распределений с ограниченным слева носителем в условиях фредгольмовости оператора B и наличия у функции $\mathrm{g}=g(t)$ в точке $t=0$ нуля кратности ℓ. Показано, что в этих предположениях порядок сингулярности обобщенного решения возрастает на кратную ℓ величину. Представляемая статья посвящена изучению однозначной разрешимости уравнения (1) с (B,p)-ограниченным оператором A. Применяется синтез идей теорий полугрупп операторов с ядрами Г.А. Свиридюка [20, 21] и фундаментальных оператор-функций вырожденных интегро-дифференциальных операторов в банаховых пространствах [17]. Подход оказался применимым к исследованию начальной задачи

$$Bu^{(N)}(t)-\int_0^t g(t-s)Au(s)ds=f(t)\,, \tag{2}$$

$$u(0)=u_0\,,\ u'(0)=u_1\,,\ \ldots,\ u^{(N-1)}(0)=u_{N-1}\,, \tag{3}$$

при аналогичных предположениях на операторные коэффициенты и ядро интегральной части.

Разрешимость абстрактных уравнений Вольтерра

В пространстве $K'_+(E_1)$ распределений с ограниченным слева носителем уравнение (1) принимает сверточный вид

$$\mathbf{I_0}(\delta(t))*\widetilde{u}(t)=\widetilde{f}(t)\,, \tag{4}$$

Здесь $\mathbf{I_0}(\delta(t))=B\delta(t)-Ag(t)\theta(t)$, $\widetilde{u}(t)=u(t)\theta(t)$, $\widetilde{f}(t)=f(t)\theta(t)$, $\delta(t)$ – функция Дирака, $\theta(t)$ – функция Хевисайда, $u(t)$ – классическое (сильно непрерывное) решение уравнения (1).

Определение 1. *Фундаментальной оператор-функцией интегрального оператора* $\mathbf{I_0}(\delta(t))$ *называется обобщенная оператор-функция* $\boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{0}(t)$ *такая, что для любых* $v(t)\in K'_+(E_1)$ *и* $w(t)\in K'_+(E_2)$ *справедливы равенства* $\boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{0}(t)*\mathbf{I_0}(\delta(t))*v(t)=v(t)$, $\mathbf{I_0}(\delta(t))*\boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{0}(t)*w(t)=w(t)$.

Смысл конструкции в том, что, если известен вид $\boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{0}(t)$, то единственным решением уравнения (1) в $K'_+(E_1)$ (*обобщенным решением* уравнения (1)) является $\widetilde{u}(t)=\boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{0}(t)*\widetilde{f}(t)$, в чем нетрудно убедиться, так же как это сделано, например, в работах [18, 19].

Изложению основных результатов предпошлем некоторые вспомогательные сведения из [20, 21], которые приведем в удобных для нас обозначениях.

Определение 2. *Множество* $\rho^B(A)=\{\mu\in\mathrm{C}:\ (\mu B-A)^{-1}\in L(E_2,E_1)\}$ *называется резольвентным множеством оператора* A *относительно оператора* B *(* B *-резольвентным множе-*

ством оператора A), а оператор-функция $(\mu B-A)^{-1}$ – резольвентой оператора A относительно оператора B (B-резольвентой оператора A).

Определение 3. *Оператор-функции $R_{\mu}^{B}(A)=(\mu B-A)^{-1}B$ и $L_{\mu}^{B}(A)=B(\mu B-A)^{-1}$ называются соответственно правой и левой резольвентами оператора A относительно оператора B (правой и левой B-резольвентами оператора A).*

Определение 4. *Оператор A называется спектрально ограниченным относительно оператора B ((B,σ)-ограниченным), если существует $a>0$ такое, что $\{\mu\in \mathrm{C}:\ |\mu|>a\}\subset\rho^{B}(A)$.*

Замечание 1. Пусть $\Gamma=\{\mu\in \mathrm{C}:\ |\mu|=r>a\}$. Тогда, как показано в [20, 21], если оператор A спектрально ограничен относительно B, то операторы

$$P=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}R_{\mu}^{B}(A)d\mu \text{ и } Q=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}L_{\mu}^{B}(A)d\mu$$

являются проекторами в E_1 и E_2 соответственно, порождают разложения этих пространств в прямые суммы $E_1=E_1^0\oplus E_1^1=N(P)\oplus R(P)$, $E_1=E_2^0\oplus E_2^1=N(Q)\oplus R(Q)$. Действия операторов A и B расщепляются, при этом $A_0:E_1^0\to E_2^0$, $B_1:E_1^1\to E_2^1$ непрерывно обратимы, $A_1:E_1^1\to E_2^1$ ограничен. Имеют место равенства $QB=BP$, $QA=AP$.

Замечание 2. Если существует $p\in\{0\}\cup \mathrm{N}$ такое, что $(A_0B_0^{-1})^{p}\neq \mathrm{O}_1$, но $(A_0B_0^{-1})^{p+1}=\mathrm{O}_1$, то бесконечно удаленная точка является *несущественно особой* точкой (либо *устранимой особой* точкой при $p=0$, либо *полюсом* порядка $p\in \mathrm{N}$) B-резольвенты оператора A. В этом случае, согласно [20, 21], (B,σ)-ограниченный оператор называется *(B,p)-ограниченным*.

Теорема 1. *Пусть $B\in L(E_1,E_2)$, оператор $A\in Cl(E_1,E_2)$ спектрально ограничен относительно B, $g(t)\in C(t\geq 0)$, тогда интегральный оператор $\mathbf{I_0}(\delta(t))=B\delta(t)-Ag(t)\theta(t)$ имеет на классе $K'_{+}(E_2)$ фундаментальную оператор-функцию вида*

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{0}}(t)=B^{-1}\sum_{k=1}^{+\infty}(A_1B_1^{-1})^{k-1}Q(g(t)\theta(t))^{k-1}-\sum_{q=0}^{+\infty}(A_0^{-1}B_0)^{q}A_0^{-1}(\mathrm{I}_2-Q)(\gamma(t))^{q+1},$$

здесь и всюду далее $\gamma(t)$ – обратный к $g(t)\theta(t)$ элемент в сверточной алгебре D'_{+}, т. е. $\gamma(t)*g(t)\theta(t)=\delta(t)$, степень обобщенных функций понимается в смысле операции свертки, причем $(g(t)\theta(t))^{0}=\delta(t)$.

Доказательство. Согласно определению 1, следует показать, что $\mathbf{I_0}(\delta(t))*\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{0}}(t)=\mathrm{I}_2\,\delta(t)$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{0}}(t)*\mathbf{I_0}(\delta(t))=\mathrm{I}_1\,\delta(t)$, где I_1, I_2 – тождественные операторы в E_1 и E_2 соответственно. Справедлива цепочка равенств

$$\mathbf{I_0}(\delta(t))*\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{0}}(t)=(B\delta(t)-Ag(t)\theta(t))*\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{0}}(t)=$$
$$=BB_1^{-1}\sum_{k=1}^{+\infty}(A_1B_1^{-1})^{k}Q(g(t)\theta(t))^{k}+BB_1^{-1}Q\delta(t)-B\sum_{q=0}^{+\infty}(A_0^{-1}B_0)^{q}A_0^{-1}(\mathrm{I}_2-Q)(\gamma(t))^{q+1}-$$
$$-AB_1^{-1}\sum_{k=1}^{+\infty}(A_1B_1^{-1})^{k-1}Q(g(t)\theta(t))^{k}+A\sum_{q=0}^{+\infty}(A_0^{-1}B_0)^{q}A_0^{-1}(\mathrm{I}_2-Q)(\gamma(t))^{q}=$$
$$=\sum_{k=1}^{+\infty}(A_1B_1^{-1})^{k}Q(g(t)\theta(t))^{k}+Q\delta(t)-B_0\sum_{q=0}^{+\infty}(A_0^{-1}B_0)^{q}A_0^{-1}(\mathrm{I}_2-Q)(\gamma(t))^{q+1}-$$
$$-\sum_{k=1}^{+\infty}(A_1B_1^{-1})^{k}Q(g(t)\theta(t))^{k}+B_0\sum_{q=0}^{+\infty}(A_0^{-1}B_0)^{q}A_0^{-1}(\mathrm{I}_2-Q)(\gamma(t))^{q+1}+AA_0^{-1}(\mathrm{I}_2-Q)\delta(t)=$$
$$=Q\delta(t)+(\mathrm{I}_2-Q)\delta(t)=\mathrm{I}_2\,\delta(t).$$

Далее, учитывая $QB=BP$, $QA=AP$, получим

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{0}}(t)*\mathbf{I_0}(\delta(t))=\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{0}}(t)*(B\delta(t)-Ag(t)\theta(t))=$$

$$= B_1^{-1}\sum_{k=1}^{+\infty}(A_1B_1^{-1})^k BP(g(t)\theta(t))^k + B_1^{-1}BP\delta(t) - \sum_{q=0}^{+\infty}(A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}B(\mathrm{I}_1 - P)(\gamma(t))^{q+1} -$$

$$- B_1^{-1}\sum_{k=1}^{+\infty}(A_1B_1^{-1})^{k-1} AP(g(t)\theta(t))^k + \sum_{q=0}^{+\infty}(A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}A(\mathrm{I}_1 - P)(\gamma(t))^q =$$

$$= B_1^{-1}\sum_{k=1}^{+\infty}(A_1B_1^{-1})^{k-1} A_1P(g(t)\theta(t))^k + P\delta(t) - \sum_{q=0}^{+\infty}(A_0^{-1}B_0)^{q+1}(\mathrm{I}_1 - P)(\gamma(t))^{q+1} -$$

$$- B_1^{-1}\sum_{k=1}^{+\infty}(A_1B_1^{-1})^{k-1} A_1P(g(t)\theta(t))^k + \sum_{q=0}^{+\infty}(A_0^{-1}B_0)^{q+1} A_0^{-1}A(\mathrm{I}_1 - P)(\gamma(t))^{q+1} + A_0^{-1}A(\mathrm{I}_1 - P)\delta(t) =$$

$$= P\delta(t) + (\mathrm{I}_1 - P)\delta(t) = \mathrm{I}_1\,\delta(t),$$

что доказывает второе сверточное равенство и завершает доказательство всей теоремы. Теорема доказана.

Замечание 3. Если в теореме 1 дополнительно положить, что ∞ – несущественно особая точка B-резольвенты оператора A, то

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{0}(t) = B^{-1}\sum_{k=1}^{+\infty}(A_1B_1^{-1})^{k-1} Q(g(t)\theta(t))^{k-1} - \sum_{q=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(\mathrm{I}_2 - Q)(\gamma(t))^{q+1},$$

$p \in \{0\} \cup \mathrm{N}$ (см. замечание 2).

Следующая теорема, доставляющая способ построения $\gamma(t)$, доказана в работе [19].

Теорема 2. *Пусть $g(t) \in C^{\ell+1}(t > 0)$ является аналитической функцией в точке $t = 0$ и в этой точке имеет нуль кратности ℓ, т. е. $g(0) = g'(0) = \ldots = g^{(\ell-1)}(0) = 0$ и $g^{(\ell)}(0) \neq 0$, тогда обратным элементом $\gamma(t)$ к $g(t)\theta(t)$ в сверточной алгебре D'_+ является обобщенная функция*

$$\gamma(t) = \frac{\delta^{(\ell+1)}(t)}{g^{(\ell)}(0)} * (\delta(t) + r(t)\theta(t)),$$

где $r(t)$ – резольвента ядра $-\dfrac{g^{(\ell+1)}(t)}{g^{(\ell)}(0)}$.

Замечание 4. В условиях этой теоремы и (B, p)-ограниченности оператора A

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{0}(t) = B^{-1}\delta(t) * (\mathrm{I}_2\,\delta(t) + R_0(t)\theta(t))Q - \sum_{q=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(\mathrm{I}_2 - Q)\frac{\delta^{((q+1)(\ell+1))}(t)}{(g^{(\ell)}(0))^{q+1}} * (\delta(t) + r(t)\theta(t))^{q+1}.$$

Здесь $R_0(t)$ – резольвента ядра $A_1B_1^{-1}g(t)$, в терминах которой представлена первая группа слагаемых формулы в замечании 3. Рассмотрим последовательность из $K'_+(E_2)$ вида

$$f_k(t)\theta(t) = \frac{1}{(g^{(\ell)}(0))^k}(\delta(t) + r(t)\theta(t))^k * f(t)\theta(t), \ k \in \mathrm{N},$$

где $r(t)$ из теоремы 2. Имеют место рекуррентные соотношения

$$g(t)\theta(t) * f_k(t)\theta(t) = \frac{t^\ell}{\ell!}\theta(t) * f_{k-1}(t)\theta(t), \ \int_0^t g(t-s)f_k(s)ds = \int_0^t \frac{(t-s)^\ell}{\ell!} f_{k-1}(s)ds, \ k \in \mathrm{N}.$$

Поскольку известен вид $\boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{0}(t)$, справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теорем 1 и 2, оператор $A \in Cl(E_1, E_2)$ является (B, p)-ограниченным, тогда уравнение (1) имеет единственное обобщенное решение, и, если*

$$g(t) \in C^{(p+2)(\ell+1)}(t \geq 0), \ f(t) \in \mathrm{C}^{(p+1)(\ell+1)}(t \geq 0; E_2),$$

то оно имеет вид

$$\tilde{u}(t) = \left[B_1^{-1}Qf(t) + B_1^{-1}\int_0^t R_0(t-s)Qf(s)ds - \sum_{q=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(\mathrm{I}_2 - Q)f_{q+1}^{((q+1)(\ell+1))}(t)\right]\theta(t) -$$

$$-\sum_{j=1}^{\ell+1}\sum_{q=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^q w_{j-1[q]}\delta^{((q+1)(\ell+1)-j)}(t),$$

где используются обозначения замечаний 1, 2 и 4, а также

$$w_{j-1[q]}=\sum_{k=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^k A_0^{-1}(\mathrm{I}_2-Q)f_{k+q+1}^{(k(\ell+1)+j-1)}(0),\ q=0,\ldots,p,\ j=1,\ldots,\ell+1.$$

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы 3, тогда, если*

$$w_{j-1[q]}=0,\ q=0,\ldots,p,\ j=1,\ldots,\ell+1,$$

то уравнение (1) имеет единственное классическое решение

$$u(t)=B_1^{-1}Qf(t)+B_1^{-1}\int_0^t R_0(t-s)Qf(s)ds-\sum_{q=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(\mathrm{I}_2-Q)f_{q+1}^{((q+1)(\ell+1))}(t).$$

Начальная задача (2), (3) в пространстве $K'_+(E_1)$ принимает вид сверточного уравнения

$$\mathbf{I_N}(\delta(t))*\tilde{u}(t)=\tilde{h}(t), \tag{5}$$

в котором $\mathbf{I_N}(\delta(t))=B\delta^{(N)}(t)-Ag(t)\theta(t)$, $\tilde{u}(t)=u(t)\theta(t)$, а правая часть

$$\tilde{h}(t)=\mathbf{I_N}(\delta(t))*p(t)\theta(t)+h_0(t)\theta(t)$$

включает не только свободную функцию уравнения (2), но и начальные условия (3). Здесь

$$h_0(t)=f(t)+\int_0^t g(t-s)Ap(s)ds,\ p(t)=\sum_{j=1}^{N}u_{j-1}\frac{t^{j-1}}{(j-1)!}.$$

Единственным решением уравнения (5) в $K'_+(E_1)$ (*обобщенным решением* задачи Коши (2), (3)) является распределение $\tilde{u}(t)=\boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{N}(t)*\tilde{h}(t)$, где $\boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{N}(t)$ – фундаментальная оператор-функция интегро-дифференциального оператора $\mathbf{I_N}(\delta(t))$.

Теорема 5. *Пусть* $B\in L(E_1,E_2)$, *оператор* $A\in Cl(E_1,E_2)$ *является* (B,p)*-ограниченным, а функция* $g(t)\in C^{\ell+1}(t>0)$ *– аналитической в точке* $t=0$ *и в этой точке имеет нуль кратности* ℓ, *тогда интегро-дифференциальный оператор* $\mathbf{I_N}(\delta(t))=B\delta^{(N)}(t)-Ag(t)\theta(t)$ *имеет на классе* $K'_+(E_2)$ *фундаментальную оператор-функцию вида*

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{N}(t)=B^{-1}\frac{t^{N-1}}{(N-1)!}\theta(t)*(\mathrm{I}_2\,\delta(t)+R_N(t)\theta(t))Q-$$

$$-\sum_{q=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(\mathrm{I}_2-Q)\frac{\delta^{(q(N+\ell+1)+\ell+1)}(t)}{(g^{(\ell)}(0))^{q+1}}*(\delta(t)+r(t)\theta(t))^{q+1},$$

где $R_N(t)$ – резольвента ядра $A_1B_1^{-1}\int_0^t\frac{(t-s)^{N-1}}{(N-1)!}g(s)ds$.

Техника доказательства этой теоремы аналогична применяемой выше для интегрального оператора $\mathbf{I_0}(\delta(t))$. Всюду далее используются обозначения

$$h_k(t)\theta(t)=\frac{1}{(g^{(\ell)}(0))^k}(\delta(t)+r(t)\theta(t))^k*h_0(t)\theta(t),\ k\in\mathrm{N},$$

где $r(t)$ – резольвента ядра $-\dfrac{g^{(\ell+1)}(t)}{g^{(\ell)}(0)}$ (см. теорему 2).

Теорема 6. *Пусть выполнены условия теоремы 5, тогда задача Коши (2), (3) имеет единственное обобщенное решение, и, если*

$$g(t)\in C^{pN+(p+2)(\ell+1)}(t\geq 0),\ f(t)\in \mathrm{C}^{pN+(p+1)(\ell+1)}(t\geq 0;E_2),$$

то оно имеет вид

Bulletin of the South Ural State University
Ser. Mathematics. Mechanics. Physics, 2016, vol. 8, no. 3, pp. 52–63

$$\widetilde{u}(t)=\left[p(t)+B_1^{-1}\int_0^t\frac{(t-s)^{N-1}}{(N-1)!}Qh_0(s)ds+B_1^{-1}\int_0^t\int_0^{t-s}\frac{(t-s-\tau)^{N-1}}{(N-1)!}R_N(\tau)Qh_0(s)d\tau ds-\right.$$

$$\left.-\sum_{q=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(\mathrm{I}_2-Q)h_{q+1}^{(q(N+\ell+1)+\ell+1)}(t)\right]\theta(t)-\sum_{j=1}^{\ell+1}w_{j-1[0]}\delta^{(\ell+1-j)}(t)-$$

$$-\sum_{j=1}^{N+\ell+1}\sum_{q=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^{q+1}w_{j-1[q+1]}\delta^{((q+1)(N+\ell+1)+\ell+1-j)}(t),$$

где используются введенные выше обозначения, а также

$$w_{j-1[q]}=\sum_{k=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^k A_0^{-1}(\mathrm{I}_2-Q)h_{k+q+1}^{(k(N+\ell+1)+j-1)}(0),\ q=0,\dots,p,\ j=1,\dots,N+\ell+1.$$

Замечание 5. Построенное в $K'_+(E_1)$ решение начальной задачи (2), (3) представляет собой сумму $\widetilde{u}(t)=u(t)\theta(t)+\omega(t)$, где функция $u=u(t)$ удовлетворяет уравнению (2) и начальным условиям $u^{(j-1)}(0)=u_{j-1}-w_{j+\ell[0]}$, $j=1,\dots,N$, а $\omega=\omega(t)$ является линейной комбинацией функции Дирака и ее производных. Оно совпадает с классическим (N раз сильно непрерывно дифференцируемым) решением этой задачи, если порядки гладкости $g=g(t)$ и $f=f(t)$ увеличить еще на N и положить все $w_{j-1[q]}=0$.

Теорема 7. *Пусть выполнены условия теоремы 5 и*

$$g(t)\in C^{(p+1)N+(p+2)(\ell+1)}(t\ge 0),\ f(t)\in \mathrm{C}^{(p+1)(N+\ell+1)}(t\ge 0;E_2),$$

тогда, если $w_{j-1[q]}=0$, $q=0,\dots,p$, $j=1,\dots,N+\ell+1$, *то задача Коши (2), (3) имеет единственное классическое решение*

$$u(t)=p(t)+B_1^{-1}\int_0^t\frac{(t-s)^{N-1}}{(N-1)!}Qh_0(s)ds+B_1^{-1}\int_0^t\int_0^{t-s}\frac{(t-s-\tau)^{N-1}}{(N-1)!}R_N(\tau)Qh_0(s)d\tau ds-$$

$$-\sum_{q=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(\mathrm{I}_2-Q)h_{q+1}^{q(N+\ell+1)+\ell+1}(t).$$

Замечание 6. *Порядки сингулярности* (см. определение в работе [19]) обобщенных решений уравнения (1) и начальной задачи (2), (3) определяются порядками старших производных дельта-функции, входящих в эти решения, и равны $(p+1)(\ell+1)$ и $pN+(p+1)(\ell+1)$ соответственно. Таким образом, наличие у функции $g=g(t)$ нуля кратности ℓ в точке $t=0$ приводит к увеличению порядков сингулярности обобщенных решений рассматриваемых задач на величину, кратную ℓ.

Приложения

Пример 1. Пусть $\mathrm{Q}=[0;\,h]\times[0;\,h]\times[0;\,h]$, $h>0$. Рассмотрим граничную задачу

$$(\Delta-\alpha)u(t,x,y,z)+\beta\int_0^t(t-\tau)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(\tau,x,y,z)d\tau=f(t,x,y,z),\ t>0,\ (x,y,z)\in\mathrm{Q};\qquad(6)$$

$$u(t,x,y,z)\big|_{(x,y,z)\in\partial\mathrm{Q}}=0,\qquad(7)$$

которая описывает низкочастотные электронные (ионные) магнитозвуковые колебания во внешнем магнитном поле [22]. Здесь $\alpha\ne 0$, $\beta>0$ – параметры, $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Выбирая

$$E_1=\dot{H}^{L+2}(\mathrm{Q})=\left\{u(x,y,z)\in W_2^{L+2}(\mathrm{Q}):u(x,y,z)\big|_{(x,y,z)\in\partial\mathrm{Q}}=0\right\},\ E_2=H^L(\mathrm{Q}),\ L\in\{0\}\cup\mathrm{N}$$

($H^0(\mathrm{Q}) \equiv L_2(\mathrm{Q})$ – пространство функций с квадратом, интегрируемым по Лебегу на Q), а также полагая $B = \Delta - \alpha$, $A = -\beta \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$, $g(t) = t$, сведем эту задачу к уравнению (1). Рассмотрим далее однородную задачу Дирихле

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \lambda \varphi = 0, \quad \varphi(x, y, z)\big|_{(x,y,z)\in \mathrm{Q}} = 0 .$$

Ее спектр $\sigma(\Delta)$ состоит из $\lambda_{k,m,n} = -\dfrac{\pi^2}{h^2}(k^2 + m^2 + n^2)$, $k, m, n \in \mathrm{N}$, т. е. за необходимостью всякое собственное число имеет вид $\lambda_{k,m,n} = -\dfrac{\pi^2}{h^2} s$, $s \in \mathrm{N}$. Кратность $d(\lambda_{k,m,n})$ собственного числа $\lambda_{k,m,n}$ равна количеству различных решений $(k, m, n) \in \mathrm{N}^3$ уравнения $k^2 + m^2 + n^2 = s$ при заданном $s \in \mathrm{N}$. Учитывая известную теоретико-числовую теорему о представлении натурального числа суммой квадратов целых чисел [23, с. 344; p. 279], можно получить точную формулу

$$d(\lambda_{k,m,n}) = \sum_{\substack{k\in \mathrm{N} \\ k^2 < s}} \Big(\sum_{\substack{d \in \mathrm{N} \\ s-k^2 | d}} \chi_4(d) - \sum_{i\in \mathrm{N}} \delta_{s-k^2\, i^2} \Big),$$

где $\chi_4(d)$ – характер Дирихле по модулю 4 числа $d \in \mathrm{N}$, $\delta_{i\,j}$ – символ Кронекера. Система собственных функций рассматриваемой однородной граничной задачи, ортонормированная в смысле скалярного произведения пространства $H^L(\mathrm{Q})$, имеет вид

$$\varphi_{k,m,n}(x, y, z) = C_{k,m,n} \sin\frac{\pi k}{h} x \sin\frac{\pi m}{h} y \sin\frac{\pi n}{h} z, \quad k, m, n \in \mathrm{N} .$$

Здесь $C_{k,m,n} = \dfrac{2}{h}\sqrt{\dfrac{2}{h\mu_{k,m,n}}}$, $\mu_{k,m,n} = \displaystyle\sum_{0\le|\alpha|\le L} \left(\frac{\pi}{h}\right)^{2|\alpha|} k^{2\alpha_1} m^{2\alpha_2} n^{2\alpha_3}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$. Пусть $\alpha \in \sigma(\Delta)$, тогда $B = \Delta - \alpha$ – фредгольмов оператор. Более того, нетрудно показать, что его нули $\varphi_{k,m,n}(x, y, z)$, $k^2 + m^2 + n^2 = s$, не имеют A-присоединенных элементов. Тем самым, за достаточностью A является $(B,0)$-ограниченным [20, 21]. Функция $g(t) = t$ в точке $t = 0$ имеет нуль кратности $\ell = 1$. Из теоремы 3 вытекает

Следствие 1. *Пусть* $\alpha = -\dfrac{\pi^2}{h^2} s \in \sigma(\Delta)$, $s \in \mathrm{N}$, *тогда краевая задача (6), (7) имеет единственное обобщенное решение, и, если* $f(t, x, y, z) \in \mathrm{C}^2(t \ge 0; H^L(\mathrm{Q}))$, *то оно имеет вид*

$$\tilde{u}(t, x, y, z) = \sum_{k^2+m^2+n^2<s} \frac{1}{\lambda_{k,m,n} - \alpha}\Bigg[(f, \varphi_{k,m,n})_{H^L(\mathrm{Q})} +$$

$$+ \frac{\pi n\sqrt{\beta}}{h\sqrt{\lambda_{k,m,n} - \alpha}} \int_0^t \mathrm{sh} \frac{\pi n\sqrt{\beta}}{h\sqrt{\lambda_{k,m,n} - \alpha}} (t - \tau)(f, \varphi_{k,m,n})_{H^L(\mathrm{Q})} d\tau \Bigg] \varphi_{k,m,n}(x, y, z)\, \theta(t) +$$

$$+ \sum_{k^2+m^2+n^2>s} \frac{1}{\lambda_{k,m,n} - \alpha}\Bigg[(f, \varphi_{k,m,n})_{H^L(\mathrm{Q})} -$$

$$- \frac{\pi n\sqrt{\beta}}{h\sqrt{\alpha - \lambda_{k,m,n}}} \int_0^t \sin \frac{\pi n\sqrt{\beta}}{h\sqrt{\alpha - \lambda_{k,m,n}}} (t - \tau)(f, \varphi_{k,m,n})_{H^L(\mathrm{Q})} d\tau \Bigg] \varphi_{k,m,n}(x, y, z)\, \theta(t) +$$

$$- \frac{1}{\beta} \sum_{k^2+m^2+n^2=s} \frac{h^2}{\pi^2 n^2} \Big[(f_{tt}, \varphi_{k,m,n})_{H^L(\mathrm{Q})} \theta(t) + (f_t|_{t=0}, \varphi_{k,m,n})_{H^L(\mathrm{Q})} \delta(t) +$$

$$+(f\big|_{t=0},\varphi_{k,m,n})_{H^L(\mathrm{Q})}\delta'(t)\Bigg]\varphi_{k,m,n}(x,y,z)\,.$$

Замечание 7. Если в условиях этой теоремы $(f\big|_{t=0},\varphi_{k,m,n})_{H^L(\mathrm{Q})}=(f_t\big|_{t=0},\varphi_{k,m,n})_{H^L(\mathrm{Q})}=0$, $k^2+m^2+n^2=s$, то $\widetilde{u}(t,x,y,z)=u(t,x,y,z)\theta(t)$, где функция $\mathrm{u}=u(t,x,y,z)$ является решением граничной задачи (6), (7) в классе $\mathrm{C}(t\ge 0;\dot{H}^{L+2}(\mathrm{Q}))$.

Аналогичные задачи физики плазмы рассматривались ранее. Например, модель ионно-звуковых волн изучалась А.А. Замышляевой, в том числе с применением вычислительных методов [24], в виде начально-краевой задачи для дифференциального уравнения соболевского типа высокого порядка относительно обобщенного потенциала электрического поля [22, с. 37].

Пример 2. Реализацией начальной задачи (2), (3) является задача Коши–Дирихле вида

$$\alpha_1 u_{tt}-u_{ttxx}+a(\alpha_2 u_t-u_{txx})+b(\alpha_3 u-u_{xx})=f(t,x)\,,\ t>0\,,\ x\in[0;\,h]; \tag{8}$$

$$u(t,x)\big|_{t=0}=u_0(x)\,,\ u_t(t,x)\big|_{t=0}=u_1(x)\,,\ x\in[0;\,h];\ u(t,0)=u(t,h)=0\,,\ t\ge 0\,, \tag{9}$$

которая при $\alpha_2=\alpha_1$ заменой $v(t,x)=u_t(t,x)+au(t,x)$ сводится к начально-краевой задаче

$$\alpha_1 v_t-v_{txx}+b\int_0^t \mathrm{e}^{-a(t-\tau)}(\alpha_3 v(\tau,x)-v_{xx}(\tau,x))d\tau=f(t,x)-b(\alpha_3 u_0(x)-u_0''(x))\mathrm{e}^{-at}\,,\ t>0\,,\ x\in[0;\,h]; \tag{10}$$

$$v(t,x)\big|_{t=0}=u_1(x)+au_0(x)\,,\ x\in[0;\,h];\ v(t,0)=v(t,h)=0\,,\ t\ge 0\,. \tag{11}$$

Здесь $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,a,b\in\mathrm{R}$ – ненулевые параметры. Уравнение (8) описывает продольные колебания упругого стержня с учетом инерции и массовой нагрузки. В современной научной литературе это уравнение и его многомерные аналоги именуют *уравнениями Буссинеска–Лява* [25].

Задача Коши–Дирихле (10), (11) является частным случаем начальной задачи (2), (3) при

$$N=1\,,\ B=\alpha_1-\frac{d^2}{dx^2}\,,\ A=-b\Big(\alpha_3-\frac{d^2}{dx^2}\Big)\,,\ g(t)=\mathrm{e}^{-at}\,,$$

если пространствами E_1 и E_2 выбрать, например, $\dot{H}^{L+2}_{[0;h]}$ и $H^L_{[0;h]}$, $L\in\{0\}\cup\mathrm{N}$. Введем в рассмотрение собственные числа $\lambda_n=-\dfrac{\pi^2 n^2}{h^2}$, $n\in\mathrm{N}$, краевой задачи $\varphi''(x)=\lambda\varphi(x)$, $\varphi(0)=\varphi(h)=0$, и систему соответствующих им собственных функций

$$\varphi_n(x)=C_n\sin\frac{\pi n}{h}x\,,\ C_n=\sqrt{\frac{2}{h\upsilon_n}}\,,\ \upsilon_n=\sum_{k=0}^{L}\left(\frac{\pi n}{h}\right)^{2k}\,,$$

ортонормированную в $H^L_{[0;h]}$. Пусть $\alpha_1=\lambda_s$, $s\in\mathrm{N}$, тогда оператор B – фредгольмов, причем его нуль $\varphi_s(x)\in N(B)$ не имеет A-присоединенных элементов. Значит, оператор A спектрально ограничен относительно B и ∞ является устранимой особой точкой относительной резольвенты $(\mu B-A)^{-1}$. Функция $g(t)=\mathrm{e}^{-at}$ при $t=0$ не обращается в нуль, т. е. $\ell=0$. Сформулированное далее утверждение является следствием теоремы 6.

Следствие 2. *Пусть* $\alpha_1=-\dfrac{\pi^2 s^2}{h^2}$, $s\in\mathrm{N}$, *тогда начально-краевая задача (10), (11) имеет единственное обобщенное решение, и, если* $f(t,x)\in\mathrm{C}^1(t\ge 0;H^L_{[0;h]})$, *то оно имеет вид:*

$$\widetilde{v}(t,x)=u_1(x)+au_0(x)+\sum_{n\ne s}\frac{1}{\alpha_1-\lambda_n}\left[w_n(t)+\int_0^t r_n(t-\tau)w_n(\tau)d\tau\right]\varphi_n(x)\,\theta(t)+$$

$$+\frac{1}{b(\alpha_3-\alpha_1)}\Big[\big(f_t+af-b(\alpha_3-\alpha_1)(u_1+au_0),\varphi_s\big)_{H^L_{[0;h]}}\theta(t)+\big(f\big|_{t=0}-b(\alpha_3-\alpha_1)u_0,\varphi_s\big)_{H^L_{[0;h]}}\delta(t)\Big]\varphi_s(x)\,,$$

где $w_n(t) = \left(\int_0^t f(\tau,x)d\tau - \frac{b}{a}(\alpha_3-\lambda_n)\left(t(u_1+au_0)+\frac{1}{a}(e^{-at}-1)u_1\right),\varphi_n\right)_{H^L_{[0;h]}}$, $r_n(t)$ *– резольвента ядра* $\frac{b\gamma_n}{a}(e^{-at}-1)$, $\gamma_n = \frac{\alpha_3-\lambda_n}{\alpha_1-\lambda_n}$, *которая определяется формулами*

$$r_n(t) = -\frac{2b\gamma_n}{\sqrt{4b\gamma_n-a^2}}e^{-\frac{a}{2}t}\sin\frac{\sqrt{4b\gamma_n-a^2}}{2}t \text{ при всех } n\in\mathrm{N} \text{ таких, что } 4b\gamma_n-a^2>0;$$

$$r_n(t) = -\frac{2b\gamma_n}{\sqrt{a^2-4b\gamma_n}}e^{-\frac{a}{2}t}\,\mathrm{sh}\frac{\sqrt{a^2-4b\gamma_n}}{2}t \text{ при всех } n\in\mathrm{N} \text{ таких, что } 4b\gamma_n-a^2<0;$$

$$r_n(t) = -\frac{a^2}{4}e^{-\frac{a}{2}t} \text{ при всех } n\in\mathrm{N} \text{ таких, что } 4b\gamma_n-a^2=0.$$

Замечание 8. Если $f(t,x)\in C^2(t\ge 0;H^L_{[0;h]})$ и

$$\left(f\big|_{t=0}-b(\alpha_1-\alpha_3)u_0,\varphi_s\right)_{H^L_{[0;h]}} = \left(f'\big|_{t=0}-b(\alpha_1-\alpha_3)u_1,\varphi_s\right)_{H^L_{[0;h]}} = 0,$$

то $\widetilde{v}(t,x)=v(t,x)\theta(t)$, где функция $v=v(t,x)$ представляет собой решение начально-краевой задачи (10), (11) в классе $C^1(t\ge 0;\dot{H}^{L+2}_{[0;h]})$.

Вопросы однозначной разрешимости различных начально-краевых задач для уравнения (8) и его многомерных аналогов при $\alpha_2=\alpha_1$, $\alpha_1\in\sigma(\Delta)$ изучены в цикле работ А.А. Замышляевой и ее учеников. Случай $\alpha_2\ne\alpha_1$, $\alpha_1\in\sigma(\Delta)$, рассмотрен в [18]. Представленные в данной работе результаты исследования задачи Коши–Дирихле (8), (9) в интегро-дифференциальной форме (10), (11) согласуются с полученными ранее.

Работа проводилась при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта № 16-31-00291 мол_а.

Литература

1. Corduneanu, C. Integral Equations and Applications / C. Corduneanu. – Cambridge: Cambridge University Press, 2008. – 380 p.

2. Prüss, J. Evolutionary Integral Equations and Applications / J. Prüss. – Basel; Heidelberg; New York; Dordrecht; London: Springer, 2012. – 366 p.

3. Kostić, M. Abstract Volterra Integro-Differential Equations / M. Kostić. – Florida: CRC Press, 2015. – 484 p.

4. Гохберг, И.Ц. Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения / И.Ц. Гохберг, М.Г. Крейн. – М.: Наука, 1967. – 508 с.

5. Lavrentiev, M.M. Operator Volterra Equations and Integral Geometry Problems / M.M. Lavrentiev // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. – 1998. – Vol. 6, № 4. – P. 353–359.

6. Бухгейм, А.Л. Уравнения Вольтерра и обратные задачи / А.Л. Бухгейм. – Новосибирск: Наука, 1983. – 208 с.

7. Сапронов, И.В. Уравнение Вольтерра с особенностью в банаховом пространстве / И.В. Сапронов // Известия вузов. Математика. – 2007. – № 11. – С. 45–55.

8. Kopachevsky, N.D. Linear Volterra Integro-Differential Second-Order Equations Unresolved with Respect to the Highest Derivative / N.D. Kopachevsky, E.V. Syomkina // Eurasian Mathematical Journal. – 2013. – Vol. 4, № 4. – P. 64–87.

9. Favini, A. Degenerate Volterra equations in Banach spaces / A. Favini, H. Tanabe // Differential and Integral Equations. – 2001. – Vol. 14, № 5. – P. 613–640.

10. Lizama, C. Maximal Regularity for Degenerate Differential Equations with Infinite Delay in Periodic Vector-Valued Function Spaces / C. Lizama, R. Ponce // Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society. – 2013. – Vol. 56, № 3. – P. 853–871.

11. Bu, S.Q. Solutions of Second Order Degenerate Integro-Differential Equations in Vector-Valued Function Spaces / S.Q. Bu, G. Cai // Science China Mathematics. – 2013. – Vol. 56, № 5. – P. 1059–1072.

12. Федоров, В.Е. О разрешимости эволюционных уравнений с памятью / В.Е. Федоров, О.А. Стахеева // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. – 2014. – Вып. 36. – № 19(190). – С. 111–125.

13. Булатов, М.В. Регуляризация вырожденных систем интегральных уравнений Вольтерра / М.В. Булатов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2002. – Т. 42, № 3. – С. 330–335.

14. Чистяков, В.Ф. О некоторых свойствах систем интегральных уравнений Вольтерра IV рода с ядром типа свертки / В.Ф. Чистяков // Математические заметки. – 2006. – Т. 80, № 1. – С. 113–118.

15. Сидоров, Н.А. Об одном классе уравнений Вольтерра с вырождением в банаховых пространствах / Н.А. Сидоров // Сибирский математический журнал. – 1983. – Т. 21, № 2. – С. 202–203.

16. Сидоров, Н.А. Обобщенные решения вырожденных дифференциальных и интегральных уравнений в банаховых пространствах / Н.А. Сидоров, М.В. Фалалеев // Метод функций Ляпунова в анализе динамики систем. – Новосибирск: Наука, 1988. – С. 308–318.

17. Фалалеев, М.В. Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов в банаховых пространствах / М.В. Фалалеев // Сибирский математический журнал. – 2000. – Т. 41, № 5. – С. 1167–1182.

18. Орлов, С.С. Обобщенные решения интегро-дифференциальных уравнений высоких порядков в банаховых пространствах / С.С. Орлов. – Иркутск: Изд-во ИГУ, 2014. – 149 с.

19. Орлов, С.С. О порядке сингулярности обобщенного решения интегрального уравнения Вольтерра типа свертки в банаховых пространствах / С.С. Орлов // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2014. – Т. 10. – С. 76–92.

20. Свиридюк, Г.А. К общей теории полугрупп операторов / Г.А. Свиридюк // Успехи математических наук. – 1994. – Т. 49, № 4. – С. 47–74.

21. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2003. – 216 p.

22. Свешников, А.Г. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов, Ю.Д. Плетнер. – М.: Физматлит, 2007. – 736 с.

23. Айерлэнд, К. Классическое введение в современную теорию чисел / К. Айерлэнд, М. Роузен. – М.: Мир, 1987. – 416 с.

24. Zamyshlyaeva, A.A.Computational Experiment for One Mathematical Model of Ion-Acoustic Waves / A.A. Zamyshlyaeva, A.S. Muravyev // Bulletin of the South Ural State University. Series Mathematical Modelling, Programming & Computer Software. – 2015. – Vol. 8, № 2. – P. 127–132.

25. Zamyshlyaeva, A.A. Mathematical models based on Boussinesq–Love equation / A.A. Zamyshlyaeva, E.V. Bychkov, O.N. Tsyplenkova // Applied Mathematical Sciences. – 2014. – Vol. 8, № 110. – P. 5477–5483.

Поступила в редакцию 11 февраля 2016 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2016, vol. 8, no. 3, pp. 52–63

DOI: 10.14529/mmph160305

DEGENERATE VOLTERRA EQUATIONS OF CONVOLUTION TYPE IN BANACH SPACES AND THEIR APPLICATIONS

S.S. Orlov
Irkutsk State University, Irkutsk, Russian Federation
E-mail: orlov_sergey@inbox.ru

The article is devoted to the problem of unique solvability of linear integral and integral-differential Volterra equations in Banach spaces with irreversible operator in the main part. Operator-valued kernel has a special form, $K(t, s) = g(t - s)A$, where $g = g(t)$ is a numeric function, and A is a linear operator. Abstract equations of this kind are very typical for applications. For the study of such equations it is possible to use structural stack theory of two linear operators, which has been developed by Professor G.A. Sviridyuk and his students. Another peculiarity of the studied problems is multiple zero of function $g = g(t)$ at the point $t = 0$. Fundamental operator-functions of considered integral and integral-differential operators in Banach spaces are constructed under the assumption of relative spectrally boundness of operator A with respect to degenerated main part of equations. On this basis, theorems of unique existence of solutions in the class of distributions with left-bounded support are proved. The dependence between the order of singularity of generalized solutions and multiplicity of zero of integral kernel at the initial point is ascertained. Also we have obtained conditions under which generalized solutions are equal to the classical solutions. Theorems formulated for abstract equations are applied to the study of significant initial boundary value problems arising in plasma physics and mathematical theory of elasticity.

Keywords: relative spectral boundedness of linear operator; distribution; fundamental operator-function.

References

1. Corduneanu C. *Integral Equations and Applications*. Cambridge, Cambridge University Press, 1991. 366 p. DOI: 10.1017/CBO9780511569395

2. Prüss J. *Evolutionary Integral Equations and Applications*. Basel, Heidelberg, New York, Dordrecht, London, Springer, 2012, 366 p. DOI: 10.1007/978-3-0348-0499-8

3. Kostić M. *Abstract Volterra Integro-Differential Equations*. Florida, CRC Press, 2015, 484 p. DOI: 10.1201/b18463

4. Gohberg I.C., Kreĭn M.G. *Theory and applications of Volterra operators in Hilbert space*. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 24. Providence, R.I., American Mathematical Society, 1970, 430 p.

5. Lavrentiev M.M. Operator Volterra Equations and Integral Geometry Problems. *J. of Inverse and Ill-Posed Problems*, 1998, Vol. 6, no. 4, pp. 353–359. DOI: 10.1515/jiip.1998.6.4.353

6. Bukhgeim A.L. *Volterra Equations and Inverse Problems*. Utrecht, Tokyo, VSP, 1999, 204 p.

7. Sapronov I.V. The Volterra Equation with a Singularity in a Banach Space. *Rus. Math.* 2007, Vol. 51, Issue 11, pp. 44–54. DOI: 10.3103/S1066369X07110072

8. Kopachevsky N.D., Syomkina E.V. Linear Volterra Integro-Differential Second-Order Equations Unresolved with Respect to the Highest Derivative. *Eurasian Math. J.*, 2013, Vol. 4, no. 4, pp. 64–87.

9. Favini A., Tanabe H. Degenerate Volterra equations in Banach spaces. *Diff. Int. Eqs*, 2001, Vol. 14, no. 5, pp. 613–640.

10. Lizama C., Ponce R. Maximal Regularity for Degenerate Differential Equations with Infinite Delay in Periodic Vector-Valued Function Spaces. *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, 2013, Vol. 56, no. 3, pp. 853–871.

11. Bu S.Q., Cai G. Solutions of Second Order Degenerate Integro-Differential Equations in Vector-Valued Function Spaces. *Sci. China Math*, 2013, Vol. 56, no. 5, pp. 1059–1072. DOI: 10.1007/s11425-012-4491-y

12. Fedorov V.E., Stakheeva O.A. *Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika. Fizika*, 2014, Issue 36, no. 19(190), pp. 111–125. (in Russ.).

13. Bulatov M.V. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki*, 2002, Vol. 42, no. 3, pp. 330–335. (in Russ.).

14. Chistyakov V.F. On Some Properties of Systems of Volterra Integral Equations of the Fourth Kind with Kernel of Convolution Type. *Math. Notes*, 2006, Vol. 80, Issue 1, pp. 109–113. DOI: 10.1007/s11006-006-0114-7

15. Sidorov N.A. *Sibirskiy matematicheskiy jurnal*, 1983, Vol. 21, no. 2, pp. 202–203. (in Russ.).

16. Sidorov N.A., Falaleev M.V. Obobshchennye resheniya vyrozhdennykh differentsial'nykh i integral'nykh uravneniy v banakhovykh prostranstvakh (Generalized Solutions of Degenerated Differential and Integral Equations in Banach Spaces). *Metod Funkciy Lyapunova v analize dinamiki sistem*, Novosibirsk, Nauka, 1988, pp. 308–318. (in Russ.).

17. Falaleev M.V. Fundamental Operator-Functions of Singular Differential Operators in Banach Spaces. *Sib. Math. J.*, 2000, Vol. 41, Issue 5, pp. 960–973. DOI: 10.1007/BF02674751

18. Orlov S. S. *Obobshchennye resheniya integro-differentsial'nykh uravneniy vysokikh poryadkov v banakhovykh prostranstvakh* [Generalized Solutions of Degenerate Differential and Integral Equations in Banach Spaces]. Irkutsk, ISU Publ., 2014, 149 p. (in Russ.).

19. Orlov S.S. *Izvestiya irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika*, 2014, Vol. 10, pp. 76–92. (in Russ.).

20. Sviridyuk G.A. On the General Theory of Operator Semigroups. *Russian Mathematical Surveys*, 1994, Vol. 49, no. 4, pp. 45–74. DOI: 10.1070/RM1994v049n04ABEH002390

21. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of operators*. Utrecht, Boston, Köln, Tokyo, VSP, 2003, 216 p. DOI: 10.1515/9783110915501

22. Sveshnikov A.G., Al'shin A.B., Korpusov M.O., Pletner Yu.D. *Lineynye i nelineynye uravneniya sobolevskogo tipa* [Linear and Nonlinear Sobolev Type Equations]. Moscow, FizMatLit Publ., 2007, 736 p. (in Russ.).

23. Ireland K., Rosen M. *A Classical Introduction to Modern Number Theory*. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 84. New York, Springer, 1982, 356 p. DOI: 10.1007/978-1-4757-1779-2

24. Zamyshlyaeva A.A., Muravyev A.S. Computational Experiment for One Mathematical Model of Ion-Acoustic Waves. *Bulletin of the South Ural State University. Series Mathematical Modelling, Programming & Computer Software*, 2015, Vol. 8, no. 2, pp. 127–132. DOI: 10.14529/mmp150211

25. Zamyshlyaeva A.A., Bychkov E.V., Tsyplenkova O.N. Mathematical models based on Boussinesq–Love equation. *Appl. Math. Sci.*, 2014, Vol. 8, no. 110, pp. 5477–5483. DOI: 10.12988/ams.2014.47546

Received February 11, 2016