УДК 511.21; 519.2 DOI: 10.14529/mmph160306

СЕЧЕНИЯ ЧИСЛОВОЙ ПРИЗМЫ, СВЯЗАННЫЕ С ПОЛИНОМАМИ БЕССЕЛЯ

М.С. Токмачев
Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого, Великий Новгород, Российская Федерация
E-mail: mtokm@yandex.ru

Рассматривается числовая призма, полученная ранее автором при изучении моментов вероятностного распределения типа гиперболического косинуса. Определены целочисленные последовательности, являющиеся сечениями числовой призмы, классифицированные как коэффициенты в полиномах Бесселя. Опираясь на теоретические разработки, связанные с полиномами Бесселя, найдены и обоснованы зависимости и соотношения для ряда сечений числовой призмы. Полученные результаты также позволили связать последовательности с гипергеометрической функцией и модифицированной функцией Бесселя.

Ключевые слова: распределение типа гиперболического косинуса; числовая призма; сечения; числовые последовательности; полиномы Бесселя.

Введение

Основой данной работы служит множество чисел, которые структурированы в виде бесконечной числовой призмы. Рассматриваемое множество (числовая призма) – это упорядоченное объединение бесконечного количества непересекающихся числовых треугольников («пачка» треугольников), каждый последующий из которых зависит от предыдущего.

Рассматриваемое множество чисел возникло в задаче нахождения кумулянтов и моментов [1] нового трехпараметрического вероятностного распределения. Само же это авторское распределение, определяемое характеристической функцией

$$f(t)=\left(\operatorname{ch}\frac{\beta}{m}t-i\frac{\mu}{\beta}\operatorname{sh}\frac{\beta}{m}t\right)^{-m},\ \text{при}\ \mu,\beta,m\in\mathrm{R}\,;\ m>0\,,\ \beta\neq 0\,,\ i=\sqrt{-1}\,,$$

введено в научную терминологию как распределение «типа гиперболического косинуса». В указанном виде оно получено при решении задачи характеризации распределений условием постоянства регрессии квадратичной статистики на линейную статистику [2, 3]. Найденное распределение исследовано [4, 5] и является обобщением двухпараметрического вероятностного распределения, известного в литературе [6], как распределение Майкснера ($m=\beta$, $\frac{\mu}{\beta}\equiv\theta$), которое, в свою очередь, при $\mu=0$, $m=1$ также обобщает классическое однопараметрическое распределение гиперболического косинуса (секанса).

В [1] установлено, что кумулянты и моменты распределения типа гиперболического косинуса выражаются через семейство полиномов, коэффициенты которых удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$U(0;0,0)=1\,,\ U(0;k,j)=0\ \text{для любых}\ k,j\neq 0\,,$$

$$U(n+1;k,j)=U(n;k-1,j-1)+(j-1)U(n;k,j-1)+(j+1)U(n;k,j+1) \qquad (1)$$

при $n=0,1,2,...$; $j,k=1,2,...$.

Именно это трехмерное целочисленное множество $\{U(n;k,j)\}$, формируемое согласно (1), и классифицируется как числовая призма. При фиксировании одного из аргументов этой призмы получаем распределения соответствующих чисел в одной плоскости, т.е. сечения призмы. Следуя традиции, полученные множества будем называть числовыми треугольниками. В [7] указано, что при фиксировании аргумента k соответствующие сечения содержат упорядоченные коэффициенты в разложениях степеней тангенса. Ранее для них найдены дифференциальные соотношения полиномов с этими коэффициентами. При фиксировании двух аргументов множества $\{U(n;k,j)\}$ приходим к одномерному случаю размещения (упорядочивания) чисел: получается числовая последовательность.

Из числовой призмы числовые последовательности можно получить различным образом. В частности, в [1, 7] представлены некоторые как ранее известные (тангенциальные числа $\{U(2n;1,0)\}$, обобщенные тангенциальные числа $\{U(n;1,n-4)\}$, секансные числа $\left\{\sum_{k=1}^{n} U(2n;k,0)\right\}$ и др.), так и новые последовательности. Например, (см. [7], *теорема* 1) сечение числовой призмы $\{U(n;k,n)\}$ является числовым треугольником Стирлинга, представляющим совокупность известных целочисленных последовательностей чисел Стирлинга первого рода

$$\{U(n;k,n)\} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}, \text{ где } n,k = 0,1,2,...,$$

а сечение вида $\{U(2n+1;k,3)\}$ в подавляющем большинстве состоит из неизвестных ранее последовательностей.

Одним из сечений числовой призмы является и числовой треугольник Бесселя. К функциям и полиномам Бесселя, давно ставших математической классикой, не иссякает интерес как к объекту изучения до настоящего времени (см., например, [8]). Изучение полиномов Бесселя, как правило, базируется на дифференциальных и интегральных соотношениях или свойствах и интерпретациях коэффициентов. Отличительной характеристикой данной работы является рассмотрение множества коэффициентов полиномов Бесселя в связи со структурой и соотношениями в числовой призме. Эта связь коэффициентов полиномов и элементов призмы позволяет по-новому, с других позиций изучать как свойства полиномов, так и свойства числовой призмы.

Основная часть

Рассмотрим группу последовательностей: коэффициенты при разложении функций вида $P_m(x)/\sqrt{(1-2x)^{2s+1}}$, где $P_m(x)$ – полиномы, показатели степени m,s – целые, неотрицательные. Некоторые из такого рода последовательностей приведены в электронной Энциклопедии целочисленных последовательностей (*OEIS*) [9]. Представим разложения для этих функций и их место в структуре числовой призмы, см. табл. 1.

Данные разложения замечательны тем, что они представляют коэффициенты в полиномах Бесселя. Согласно заданным в числовой призме последовательностям легко построить известный числовой треугольник Бесселя. Указанные в табл. 1 последовательности располагаются в треугольнике Бесселя по столбцам и являются 1-м, 2-м, 3-м и т.д. коэффициентами в полиномах Бесселя. Коэффициенты полинома Бесселя n-го порядка размещаются в соответствующей n-й строке числового треугольника. Сам треугольник Бесселя входит в рассматриваемую числовую призму как сечение $\{U(2n-j;n,j)\}$, где $n=0,1,2,...$, $j=0,1,2,...,n$. Начальные значения треугольника коэффициентов и их место в структуре числовой призмы см. в табл. 2.

Исходя из места коэффициентов в числовой призме, можно выписать полиномы Бесселя в общем виде, опираясь на эту структуру.

Отметим, что полиномами Бесселя называют [10] полиномы $y_n(x)$, удовлетворяющие дифференциальному уравнению

$$x^2 y'' + (2x+2)y' - n(n+1)y = 0,\ n = 0,1,2,...,$$

а также родственные им полиномы [11] $p_n(x) = x^n \cdot y_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)$, определяемые при $n \ge 1$ и удовлетворяющие рекуррентному дифференциальному соотношению

$$p_n''(x) - 2p_n'(x) + 2n\, p_{n-1}(x) = 0,\ n = 2,3,4,... .$$

В явном виде соответствующие формулы для $y_n(x)$ и $p_n(x)$ такие:

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+k)!}{2^k\, k!(n-k)!} x^k = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{\frac{1}{x}} K_{-n-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x}\right), \tag{2}$$

где $K_n(x)$ – модифицированная функция Бесселя второго рода;

$$p_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(2n-k-1)!}{2^{n-k}(n-k)!(k-1)!} x^k = (2n-3)!!x\ {}_1F_1(1-n; 2-2n; 2x), \tag{3}$$

где ${}_1F_1(a;b;z)$ – гипергеометрическая функция первого рода, $n = 2, 3, 4, \ldots$.

Таблица 1

Разложения функций вида $P_m(x)/\sqrt{(1-2x)^{2s+1}}$

Функция, $f(x)$	Коэффициенты, $f^{(k)}(0)$ № в *OEIS*	Последовательность в призме
$\frac{1}{\sqrt{(1-2x)}}$	1,1,3,15,105,945,10395, … [*OEIS*: *A*001147]	*U*(2*n*; *n*, 0), *n* = 0,1,2,…; *U*(2*n*–1; *n*, 1), *n* = 1,2,3,…
$\frac{1+x}{\sqrt{(1-2x)^5}}$	1,6,45,420,4725,62370,945945, … [*OEIS*: *A*001879]	*U*(2*n*–2; *n*, 2), *n* = 2,3,4,…
$\frac{1+3x}{\sqrt{(1-2x)^7}}$	1,10,105,1260,17325,270270,4729725, … [*OEIS*: *A*000457]	*U*(2*n*–3; *n*, 3), *n* = 3,4,5,…
$\frac{1+6x+\frac{3}{2}x^2}{\sqrt{(1-2x)^9}}$	1,15,210,3150,51975,945945, … [*OEIS*: *A*001880]	*U*(2*n*–4; *n*, 4), *n* = 4,5,6,…
$\frac{1+10x+\frac{15}{2}x^2}{\sqrt{(1-2x)^{11}}}$	1,21,378,6930,135135,2837835, … [*OEIS*: *A*001881]	*U*(2*n*–5; *n*, 5), *n* = 5,6,7,…
$\frac{1+15x+\frac{45}{2}x^2+\frac{5}{2}x^3}{\sqrt{(1-2x)^{13}}}$	1,28,630,13860,315315,7567560, … [*OEIS*: *A*038121]	*U*(2*n*–6; *n*, 6), *n* = 6,7,8,…
$\frac{1+21x+\frac{105}{2}x^2+\frac{33}{2}x^3}{\sqrt{(1-2x)^{15}}}$	1,36,990,25740,675675,18378360, … [*OEIS*: *A*130563]	*U*(2*n*–7; *n*, 7), *n* = 7,8,9,…
$\frac{1+28x+105x^2+70x^3+\frac{35}{8}x^4}{\sqrt{(1-2x)^{17}}}$	1,45,1485,45045,1351350,41351310, … [отсутствует в *OEIS*]	*U*(2*n*–8; *n*, 8), *n* = 8,9,10,…
$\frac{1+36x+189x^2+210x^3+\frac{315}{8}x^4}{\sqrt{(1-2x)^{19}}}$	1,55,2145,75075,2552550,87297210, … [отсутствует в *OEIS*]	*U*(2*n*–9; *n*, 9), *n* = 9,10,11,…
$\frac{1+45x+315x^2+525x^3+\frac{1575}{8}x^4+\frac{63}{8}x^5}{\sqrt{(1-2x)^{21}}}$	1,66,3003,120120,4594590,174594420,… [отсутствует в *OEIS*]	*U*(2*n*–10; *n*, 10), *n* = 10,11,12,…
…	…	…

Таблица 2

Сечение числовой призмы $\{U(2n-j;\,n,\,j)\}$ (числовой треугольник Бесселя)

n \ j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	$U(2n;n,0)$	$U(2n–1;n,1)$	$U(2n–2;n,2)$	$U(2n–3\ n,3)$	$U(2n–4;n,4)$	$U(2n–5;n,5)$	$U(2n–6;n,6)$	$U(2n–7;n,7)$	$U(2n–8;n,8)$	$U(2n–9;n,9)$
0	$U(0;0,0)=$ 1									
1	$U(2;1,0)=$ 1	$U(1;1,1)=$ 1								
2	$U(4;2,0)=$ 3	$U(3;2,1)=$ 3	$U(2;2,2)=$ 1							
3	$U(6;3,0)=$ 15	$U(5;3,1)=$ 15	$U(4;3,2)=$ 6	$U(3;3,3)=$ 1						
4	$U(8;4,0)=$ 105	$U(7;4,1)=$ 105	$U(6;4,2)=$ 45	$U(5;4,3)=$ 10	$U(4;4,4)=$ 1					
5	$U(10;5,0)=$ 945	$U(9;5,1)=$ 945	$U(8;5,2)=$ 420	$U(7;5,3)=$ 105	$U(6;5,4)=$ 15	$U(5;5,5)=$ 1				
6	$U(12;6,0)=$ 10395	$U(11;6,1)=$ 10395	$U(10;6,2)=$ 4725	$U(9;6,3)=$ 1260	$U(8;6,4)=$ 210	$U(7;6,5)=$ 21	$U(6;6,6)=$ 1			
7	$U(14;7,0)=$ 135135	$U(13;7,1)=$ 135135	$U(12;7,2)=$ 6237	$U(11;7,3)=$ 17325	$U(10;7,4)=$ 3150	$U(9;7,5)=$ 378	$U(8;7,6)=$ 28	$U(7;7,7)=$ 1		
8	$U(16;8,0)=$ 2027025	$U(15;8,1)=$ 2027025	$U(14;8,2)=$ 945945	$U(13;8,3)=$ 270270	$U(12;8,4)=$ 51975	$U(11;8,5)=$ 6930	$U(10;8,6)=$ 630	$U(9;8,7)=$ 36	$U(8;8,8)=$ 1	
9	$U(18;9,0)=$ 34459425	$U(17;9,1)=$ 34459425	$U(16;9,2)=$ 16216200	$U(15;9,3)=$ 4729725	$U(14;9,4)=$ 945945	$U(13;9,5)=$ 135135	$U(12;9,6)=$ 13860	$U(11;9,7)=$ 990	$U(10;9,8)=$ 45	$U(9;9,9)=$ 1

В частности, известную [*OEIS*: *A*001498] модифицированную сферическую функцию Бесселя второго рода $k_n(x)$, где $k_n(x)\equiv\sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}K_{n+1/2}(x)$, можно представить в виде

$$k_n(x)=\frac{e^{-x}}{x^{n+2}}\,p_{n+1}(x).$$

При этом,

$$y_0(x)=1,\qquad p_1(x)=x,$$
$$y_1(x)=x+1,\qquad p_2(x)=x+x^2,$$
$$y_2(x)=3x^2+3x+1,\qquad p_3(x)=3x+3x^2+x^3,$$
$$y_3(x)=15x^3+15x^2+6x+1,\qquad p_4(x)=15x+15x^2+6x^3+x^4,$$
$$y_4(x)=105x^4+105x^3+45x^2+10x+1,\qquad p_5(x)=105x+105x^2+45x^3+10x^4+x^5,$$
$$\ldots\qquad\qquad \ldots$$

Оформим найденные соотношения связи полиномов Бесселя с числовой призмой в виде утверждений.

Теорема 1. Полиномы вида

$$p_n(x)=\sum_{j=0}^{n-1}U(2n-2-j;n-1,j)x^{j+1}\ \text{ при }\ n\ge1;\quad y_n(x)=\sum_{j=0}^{n}U(2n-j;n,j)x^{n-j}\ \text{ при }\ n\ge0,$$

где $U(n;k,j)$ – элементы числовой призмы, определяемые (1), являются соответствующими полиномами Бесселя $p_n(x)$ и $y_n(x)$.

При этом, согласно (3), (2), оказывается, что

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n-1} U(2n-2-j; n-1, j) x^{j+1} = (2n-3)!!x \, {}_1F_1(1-n; 2-2n; 2x), \; n = 2, 3, 4, ... \quad (4)$$

$$y_n(x) = \sum_{j=0}^{n} U(2n-j; n, j) x^{n-j} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{\frac{1}{x}} K_{-n-1/2}\left(\frac{1}{x}\right). \quad (5)$$

В соотношении (4) полагая x равными конкретным значениям (в частности, $x = 1$, $x = -1$, $x = 2$), приходим к равенствам для сумм элементов числовой призмы с использованием значений гипергеометрической функции первого рода ${}_1F_1(a; b; z)$.

Теорема 2. Для последовательностей числовой призмы $\{U(n; k, j)\}$ при $n \ge 2$ справедливы соотношения

$$\sum_{j=0}^{n-1} U(2n-2-j; n-1, j) = (2n-3)!! \, {}_1F_1(1-n; 2-2n; 2);$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j U(2n-2-j; n-1, j) = (2n-3)!! \, {}_1F_1(1-n; 2-2n; -2);$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} U(2n-2-j; n-1, j) 2^j = (2n-3)!! \, {}_1F_1(1-n; 2-2n; 4).$$

При $x = 1$, $x = 2$, $x = 0{,}5$ из соотношения (5) также следует связь элементов числовой призмы со значениями модифицированной функции Бесселя второго рода $K_n(x)$.

Теорема 3. Для последовательностей числовой призмы $\{U(n; k, j)\}$ при $n \ge 0$ справедливы соотношения

$$\sum_{j=0}^{n} U(2n-j; n, j) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e K_{-n-1/2}(1);$$

$$\sum_{j=0}^{n} U(2n-j; n, j) 2^{n-j} = \sqrt{\frac{e}{\pi}} K_{-n-1/2}\left(\frac{1}{2}\right);$$

$$\sum_{j=0}^{n} U(2n-j; n, j) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-j} = \sqrt{\frac{4}{\pi}} e^2 K_{-n-1/2}(2).$$

Приравнивая полиномы Бесселя $p_n(x)$ и $y_n(x)$, представленные в общеизвестном виде (3), (2) и в смысле теоремы 1, приходим к равенству коэффициентов полиномов при одинаковых степенях переменной.

Теорема 4. Для элементов числовой призмы $\{U(n; k, j)\}$ справедливы соотношения

$$U(2n-2-j; n-1, j) = \frac{(2n-2-j)!}{2^{n-j-1} j!(n-j-1)!} \text{ при } n \ge 1, \; 0 \le j \le n-1;$$

$$U(n+j; n, n-j) = \frac{(n+j)!}{2^j j!(n-j)!} \text{ при } n \ge 0, \; 0 \le j \le n.$$

Следовательно, элементы числовой призмы в рассматриваемых последовательностях можно выразить через отношение факториалов и степеней, связанных с индексными переменными.

Заключение

Множество $\{U(n; k, j)\}$, структурированное как числовая призма, заданное соотношениями (1), представляет большое разнообразие упорядоченных подмножеств с различными свойствами. Кроме ряда широко известных целочисленных последовательностей, частично представленных в [1, 7], в данной работе выделены последовательности, связанные с полиномами Бесселя, указаны их свойства именно, как объектов числовой призмы, представлены некоторые соотношения.

Отметим, что множество $\{U(n;k,j)\}$, обладая элементарностью построения своих элементов, содержит объекты более сложной структуры, связанные с функциональными преобразованиями, дифференцированием и интегрированием функций. Изучение этого множества позволяет выявить неизвестные ранее свойства и связи как уже известных математических объектов (конкретных последовательностей, полиномов, функций и др.), так и находить новые с последующими приложениями. В частности, в [7] указываются взаимно-обратные соотношения между секансными числами $\left\{E_j\right\}=\{1,1,5,61,1385,50521,2702765,...\}$ и тангенциальными числами $\left\{T_j\right\}=\{1,2,16,272,7936,353792,...\}$, $j=1,2,...$; также в последовательности чередующихся секансных и тангенциальных чисел (1, 1, 1, 2, 5, 16, 61, 272, 1385, 7936, …) найдены формулы связи, выражающие элементы последовательности через свои предыдущие. В [12] представлено множество нетривиальных интегралов от комбинаций некоторых функций (показательной, степенной, гиперболических косинуса или синуса и определенного вида полиномов-сомножителей), вычисляемых с помощью свойств $\{U(n;k,j)\}$. Указан ряд конкретных соотношений.

Безусловно, дальнейшее изучение структуры и свойств представленного числового множества $\{U(n;k,j)\}$ является перспективным в теоретическом и прикладном аспектах.

Работа выполнена при финансовой поддержке проектной части государственного задания в сфере научной активности Министерства образования и науки Российской Федерации, проект № 1.949.2014/К.

Литература

1. Токмачев, М.С. Вычисление кумулянтов и моментов распределения Майкснера / М.С. Токмачев // Вестник НовГУ. – 2013. – № 75, Т. 2. – С. 47–51.

2. Токмачев, М.С. Характеризация распределения типа гиперболического косинуса свойством постоянства регрессии / М.С. Токмачев // Деп. в ВИНИТИ 21.06.94. – № 1542 – В94. – 11 с.

3. Токмачев, М.С. Постоянство регрессии квадратичной статистики на линейную статистику / М.С. Токмачев // Вестник НовГУ. – 1995. – № 1. – С. 139–141.

4. Токмачев, М.С. Распределение типа гиперболического косинуса / М.С. Токмачев, А.М. Токмачев // Вестник НовГУ. – 2001. – № 17. – С. 85–88.

5. Токмачев, М.С. Прикладной аспект обобщенного распределения гиперболического косинуса / М.С. Токмачев // Вестник НовГУ. – 2005. – № 34. – С. 96–99.

6. Lai, C.D. Meixner classes and Meixner hypergeometric distributions / C.D. Lai // Aust. J. Stat. – 1982. – Vol. 24. – P. 221–233.

7. Токмачев, М.С. О числовых множествах и последовательностях в связи с распределением типа гиперболического косинуса / М.С. Токмачев // Вестник НовГУ. Сер.: Физико-математические науки. – 2015. – № 3(86), часть 2. – С. 35–39.

8. Kim, T. Identities involving Bessel polynomials arising from linear differential equations / T. Kim, D.S. Kim // arXiv:1602.04106 [math.NT], 2016.

9. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. (OEIS). http://www.research.att.com/~njas/sequences/ (дата обращения: 25.02.2016).

10. Krall, H.L. A New Class of Orthogonal Polynomials: The Bessel Polynomials / H.L. Krall, O. Fink // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – Vol. 65. – P. 100–115.

11. Carlitz, L. A Note on the Bessel Polynomials / L. Carlitz // Duke Math. J. – 1957. – Vol. 24. – P. 151–162.

12. Токмачев, М.С. Вычисление интегралов от функций некоторого класса с вероятностной интерпретацией / М.С. Токмачев // Вестник НовГУ. Сер.: Физико-математические науки. – 2014. – № 80. – С. 42–46.

Поступила в редакцию 18 марта 2016 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2016, vol. 8, no. 3, pp. 64–71

DOI: 10.14529/mmph160306

SECTIONS OF NUMERICAL PRISM AND BESSEL POLYNOMIALS

M.S. Tokmachev
Yaroslav-the-Wise Novgorod State University, Veliky Novgorod, Russian Federation
E-mail: mtokm@yandex.ru

The integer set previously obtained by the author in the study of moments and cumulants of three-parameter probability distribution of the hyperbolic cosine type is considered. This distribution is a generalization of Meixner two-parameter distribution. Moments of distribution at specific parameters vary as a certain class of polynomials with the corresponding coefficients. On the basis of the differential ratio of polynomials, recurrence formulas for their coefficients are received. The set of polynomial coefficients $\{U(n; k, j)\}$ that depends on three indices, and which is formed by these formulas, is the object of study.

The set is structured in the form of a numeric prism. When fixing one or two indices or functional connection between the indices, different sections of numerical prisms are obtained: number triangles or number sequences. Among the sections of the numerical prism are both known (Stirling triangle, tangential numbers, secant numbers, etc.) and new integer sets. Classic Bessel triangle enters into the considered numerical prism as a section $\{U(2n–j; n, j)\}$, where $n = 0, 1, 2, \ldots, j = 0, 1, 2, \ldots n$. In this section the sequences classified as coefficients in the Bessel polynomials are determined. Based on the theoretical developments related to the Bessel polynomials, dependences and relations for a number of elements of numerical prism are found and justified. The obtained results also allow putting sequences through the values of hypergeometric functions and modified Bessel functions of the second kind. Considered set differs in the ease of construction, and its study has revealed previously unknown properties and relations of various mathematical objects (sequences, polynomials, functions, etc.), particularly related to the Bessel polynomials.

Keywords: hyperbolic cosine type distribution; numerical prism; sections; numerical sequences; Bessel polynomials.

References

1. Tokmachev M. S. Vychislenie kumulyantov i momentov raspredeleniya Mayksnera [Calculation of cumulants and moments of the distribution of Meixner]. *Bulletin of the Novgorod state University*, 2013, no. 75, Vol. 2. p. 47–51. (in Russ.).

2. Tokmachev M.S. Kharakterizatsiya raspredeleniya tipa giperbolicheskogo kosinusa svoystvom postoyanstva regressii [The characterization of the distribution type hyperbolic cosine property of the constancy of the regression]. *Dep. in VINITI* 21.06.94, no. 1542, B94, 11 p. (in Russ.).

3. Tokmachev M.S. Postoyanstvo regressii kvadratichnoy statistiki na lineynuyu statistiku [Constancy of regression of quadratic statistics with linear statistics]. *Bulletin of the Novgorod state University,* 1995, no. 1. pp. 139–141. (in Russ.).

4. Tokmachev M.S., Tokmachev A.M. Raspredelenie tipa giperbolicheskogo kosinusa [Distribution type hyperbolic cosine]. *Bulletin of the Novgorod state University*, 2001, no. 17, p. 85–88. (in Russ.).

5. Tokmachev M.S. Prikladnoy aspekt obobshchennogo raspredeleniya giperbolicheskogo kosinusa [Applied aspect of the generalized hyperbolic cosine distribution]. *Bulletin of the Novgorod state University*, 2005, no. 34, p. 96–99. (in Russ.).

6. Lai C.D. Meixner classes and Meixner hypergeometric distributions. *Aust. J. Stat.*, 1982, Vol. 24, pp. 221–233. DOI: 10.1111/j.1467-842X.1982.tb00828.x

7. Tokmachev M.S. O chislovykh mnozhestvakh i posledovatel'nostyakh v svyazi s raspredeleniem tipa giperbolicheskogo kosinusa [On numerical sets and sequences in connection with the distribution

type hyperbolic cosine]. *Bulletin of the Novgorod state University. Ser.: Physical and mathematical Sciences*, 2015, no. 3(86), part 2, pp. 35–39. (in Russ.).

8. Kim T., Kim D.S. Identities involving Bessel polynomials arising from linear differential equations, *arXiv:1602.04106 [math.NT]*, 2016.

9. *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS)*. http://www.research.att.com/~njas/sequences/ (accessed: 25.02.2016).

10. Krall H. L., Fink O.A New Class of Orthogonal Polynomials: The Bessel Polynomials. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1949, Vol. 65, pp. 100–115. DOI: 10.2307/1990516

11. Carlitz L. A Note on the Bessel Polynomials. *Duke Math. J.*, 1957, Vol. 24, pp. 151–162. DOI: 10.1215/S0012-7094-57-02421-3

12. Tokmachev M.S. Vychislenie integralov ot funktsiy nekotorogo klassa s veroyatnostnoy interpretatsiey [Calculation of integrals of functions of some class with the probabilistic interpretation]. *Bulletin of the Novgorod state University. Ser.: Physical and mathematical Sciences*, 2014, no. 80, pp. 42–46. (in Russ.).

Received March 18, 2016