УДК 517.9; 519.216.2 DOI: 10.14529/mmph160403

О СТОХАСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ ЛЕОНТЬЕВСКОГО ТИПА С ПЕРЕМЕННЫМИ МАТРИЦАМИ, ЗАДАННЫМИ В ТЕРМИНАХ ТЕКУЩИХ СКОРОСТЕЙ РЕШЕНИЯ

Е.Ю. Машков
Юго-Западный государственный университет, г. Курск, Российская Федерация
E-mail: mashkovevgen@yandex.ru

Стохастические уравнения леонтьевского типа являются частным случаем стохастических систем дифференциально-алгебраического типа. В работе изучается система, заданная в терминах текущих скоростей (симметрических производных в среднем) решения. Отметим, что по физическому смыслу текущая скорость стохастических процессов являются прямым аналогом физической скорости детерминированных процессов. Предполагается, что матрицы изучаемой системы являются прямоугольными зависящими от времени и удовлетворяют требованиям, при выполнении которых система не разрешима относительно симметрической производной. Для исследования данной системы уравнений мы используем подход, основанный на преобразовании квадратной матрицы к канонической форме Жордана и замене метрики пространства. Доказана теорема существования решений для стохастического уравнения леонтьевского типа в текущих скоростях при выполнении некоторых дополнительных условий на ее матрицы коэффициентов и свободные члены.

Ключевые слова: производная в среднем; текущая скорость; винеровский процесс; стохастическое уравнение леонтьевского типа.

Введение

Под стохастическим уравнением леонтьевского типа понимается стохастическая дифференциально-алгебраическая система

$$dL(t)\xi(t) = M(t)\xi(t)dt + f(t)dt + N(t)dw(t),$$

где $L(t)$, $M(t)$, $N(t)$ – достаточно гладкие $k \times n$ матрицы, $f(t)$ – достаточно гладкая k – мерная вектор-функция, $w(t)$ – винеровский процесс. Такие системы возникают в приложениях при математическом описании технических [1], биологических [2], экономических [3] и других систем. Здесь процессом белого шума $\dfrac{dw(t)}{dt}$ описываются помехи в системе. Для изучения данного класса систем в работе [4] была построена модификация подхода, описанного в работах Бояринцева Ю.Е. и Чистякова В.Ф. [5] при исследовании соответствующих дифференциальных уравнений без случайных возмущений. В этой работе мы изучаем процессы, описываемые стохастическим уравнением леонтьевского типа в терминах текущих скоростей решения [6, 7]. Отметим, что текущие скорости (симметрические производные в среднем) введены Э. Нельсоном в 60-х годах 20 века для нужд построенной им стохастической механики (вариант квантовой механики) и они являются естественными аналогами физической скорости детерминированных процессов. Доказана теорема существования решений стохастического уравнения леонтьевского типа в текущих скоростях при выполнении некоторых ограничений на его матрицы коэффициентов и свободные члены.

Производные в среднем

Рассмотрим случайный процесс $\xi(t)$ в R^n (где мы фиксируем σ – алгебру борелевских множеств), $t \in [0,l]$, заданный на некотором вероятностном пространстве (Ω, F, P) и такой, что $\xi(t)$ является L_1 – случайной величиной при всех t.

Определение 1. [8] σ – подалгебра σ – алгебры F, порожденная прообразами борелевских множеств при отображении $\xi(t):\Omega \to R^n$, называется «настоящее» и обозначается N_t^{ξ}.

Всюду далее для удобства мы обозначаем через E_t^{ξ} условное математическое ожидание $E(\cdot \mid N_t^{\xi})$ относительно «настоящего» N_t^{ξ} для $\xi(t)$. Обычное («безусловное») математическое ожидание обозначается символом E.

В общем случае, почти все выборочные траектории процесса $\xi(t)$ не дифференцируемы, поэтому его производные существуют только в смысле обобщенных функций. Чтобы избежать использования обобщенных функций, согласно Э. Нельсону (см., например, [8]) даем следующее определение:

Определение 2. [8] (i) Производная в среднем справа $D\xi(t)$ процесса $\xi(t)$ в момент времени t есть L_1 – случайная величина вида

$$D\xi(t)=\lim_{\Delta t\to +0} E_t^{\xi}\left(\frac{\xi(t+\Delta t)-\xi(t)}{\Delta t}\right),$$

где предел предполагается существующим в $L_1(\Omega,F,P)$ и $\Delta t \to +0$ означает, что Δt стремится к 0 и $\Delta t>0$. (ii) Производная в среднем слева $D_*\xi(t)$ процесса $\xi(t)$ в момент времени t есть L_1 – случайная величина вида

$$D_*\xi(t)=\lim_{\Delta t\to +0} E_t^{\xi}\left(\frac{\xi(t)-\xi(t-\Delta t)}{\Delta t}\right),$$

где условия и обозначения такие же, как в (i).

Следует отметить, что, вообще говоря, $D\xi(t)\neq D_*\xi(t)$, но если, например, $\xi(t)$ почти наверное имеет гладкие выборочные траектории, эти производные очевидно совпадают.

Из свойств условного математического ожидания (см. [9]) вытекает, что $D\xi(t)$ и $D_*\xi(t)$ могут быть представлены как суперпозиции $\xi(t)$ и борелевских векторных полей (регрессий) $Y^0(t,x)$ и $Y_*^0(t,x)$ на R^n, то есть, $D\xi(t)=Y^0(t,\xi(t))$ и $D_*\xi(t)=Y_*^0(t,\xi(t))$.

Определение 3. [8] Производная $D_S=\frac{1}{2}(D+D_*)$ называется симметрической производной в среднем. Производная $D_A=\frac{1}{2}(D-D_*)$ называется антисимметрической производной в среднем.

Введем в рассмотрение векторные поля $v^{\xi}(t,x)=\frac{1}{2}\left(Y^0(t,x)+Y_*^0(t,x)\right)$ и $u^{\xi}(t,x)=\frac{1}{2}\left(Y^0(t,x)-Y_*^0(t,x)\right)$.

Определение 4. [8] $v^{\xi}(t)=v^{\xi}(t,\xi(t))=D_S\xi(t)$ называется текущей скоростью процесса $\xi(t)$; $u^{\xi}(t)=u^{\xi}(t,\xi(t))=D_A\xi(t)$ называется осмотической скоростью процесса $\xi(t)$.

Физический смысл текущей и осмотической скоростей (см., например, [8]) состоит в следующем. Текущая скорость является для случайных процессов прямым аналогом обычной физической скорости детерминированных процессов. Осмотическая скорость измеряет насколько быстро нарастает «случайность» процесса.

Введем, следуя Ю.Е. Гликлиху [6], дифференциальный оператор D_2, который действует на L_1 – случайный процесс $\xi(t)$, $t\in[0,l]$ по правилу

$$D_2\xi(t)=\lim_{\Delta t\to +0} E_t^{\xi}\left(\frac{\left(\xi(t+\Delta t)-\xi(t)\right)\left(\xi(t+\Delta t)-\xi(t)\right)^*}{\Delta t}\right),$$

где $\left(\xi(t+\Delta t)-\xi(t)\right)$ рассматривается как вектор-столбец (вектор в R^n), а $\left(\xi(t+\Delta t)-\xi(t)\right)^*$ – это вектор-строка (сопряженный или транспонированный вектор), а предел предполагается существующим в $L_1(\Omega, F, P)$. Отметим, что матричное произведение столбца слева и строки справа – это матрица, так что $D_2\xi(t)$ есть симметрическая неотрицательно-определенная матричная функция на $[0,l]\times R^n$.

Определение 5. [6] D_2 называется квадратичной производной в среднем.

Замечание 1. Из свойств условного математического ожидания [9] следует, что существует измеримое по Борелю отображение (регрессия) $\alpha(t,x){:}R\times R^n \to \overline{S}_+$, такое, что $D_2\xi(t)=\alpha(t,\xi(t))$, где $\overline{S}_+$ – множество неотрицательно определенных симметрических $n\times n$ матриц.

Рассмотрим диффузионный процесс, являющийся сильным решением следующего стохастического дифференциального уравнения в форме Ито

$$\xi(t)=\xi_0+\int_0^t a(s,\xi(s))ds+\int_0^t A(s,\xi(s))dw(s), \tag{1}$$

где $a(t,x)$ и $A(t,x)$ – гладкие по совокупности переменных отображения из $[0,l]\times R^n$ в R^n и в $L(R^n,R^n)$, соответственно. Тогда имеют место

Теорема 1. [6] Пусть $\xi(t)$ – диффузионный процесс (1). Тогда производная в среднем справа $D\xi(t)$ существует и имеет вид $D\xi(t)=a(t,\xi(t))$.

Теорема 2. [6] Для диффузионного процесса (1) квадратичная производная $D_2\xi(t)$ существует и имеет вид $D_2\xi(t)=\alpha(t,\xi(t))$, $\alpha(t,x)=A(t,x)A^*(t,x)$ – коэффициент диффузии.

Основной результат

Рассмотрим вещественные C^∞-гладкие $k\times n$ матрицы $L(t)$, $M(t)$ и k – мерную вектор-функцию $f(t)$. Пусть псевдообратная матрица $M^+(t)$ к $M(t)$ тоже C^∞-гладкая и

$$P_{L^*(t)}M(t)\neq 0, P_{M^*(t)}L(t)=0, P_{M^*(t)}f(t)=0, \tag{2}$$

где $P_{L^*(t)}:R^k\to N(L^*(t))$ – ортогональный проектор. Как и в работе [10] предположим, что матрица $M^+(t)L(t)$ постоянного ранга $\operatorname{rank} M^+(t)L(t)|=\delta$, $n-\delta:=\omega$ и не имеет среди собственных чисел нулей геометрической кратности, отличной от алгебраической. При этом неособенным преобразованием подобия матрица $M^+(t)L(t)=S(t)J(t)S^{-1}(t)$ ($\det S(t)\neq 0$) приводится к жордановой форме

$$J(t)=\begin{pmatrix} J_\delta(t) & 0 \\ 0 & O_\omega \end{pmatrix}, J_\delta(t)\in R^{\delta\times\delta}, \det J_\delta(t)\neq 0, O_\omega\in R^{\omega\times\omega}.$$

Рассмотрим некоторую гладкую симметрическую положительно определенную матрицу $\Xi(t)$ в R^δ. Для матрицы $\Xi(t)$ существует (см. [6]) гладкая невырожденная матрица $C(t)$ в R^δ, такая, что $\Xi(t)=C(t)C^*(t)$, где матрица $C^*(t)$ является сопряженной к $C(t)$. Введем в R^n матрицы $\Theta(t)=\begin{pmatrix} \Xi(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $\overline{\Theta}=S(t)\Theta(t)S^*(t)$. Тогда мы будем иметь дело с системой

$$\begin{cases} L(t)D_S\xi(t)=M(t)\xi(t)+f(t), \\ D_2\xi(t)=\overline{\Theta}, \end{cases} \tag{3}$$

которую, как и в работе [7], будем называть стохастическим уравнением леонтьевского типа в текущих скоростях.

Корректные начальные условия для решений уравнения (3) мы опишем ниже. При выполнении условий (2) систему (3) можно представить в виде

$$\begin{cases} M^{+}(t)L(t)D_S\xi(t)=\xi(t)+M^{+}f(t), \\ D_2\xi(t)=\bar{\Theta}. \end{cases}$$

С применением неособенного преобразованиия подобия, описываемого матрицей $S(t)$, эта система преобразуется к следующему каноническому виду

$$\begin{cases} J(t)D_S\eta(t)=\left(I_n-J(t)S^{-1}(t)\dfrac{dS}{dt}\right)\eta(t)+S^{-1}(t)M^{+}(t)f(t), \\ D_2\eta(t)=\Theta, \end{cases} \quad (4)$$

где $\eta(t)=S^{-1}(t)\xi(t):=\mathrm{col}\left(\eta^{(1)}(t),\eta^{(2)}(t)\right)$, $\eta^{(1)}(t)\in R^{\delta}$, $\eta^{(2)}(t)\in R^{\omega}$. Заметим, что первое уравнение системы (4) не разрешимо относительно симметрической производной, поскольку $P_{J^*(t)}\left(I_n-J(t)S^{-1}(t)\dfrac{dS}{dt}\right)=P_{J^*(t)}\neq 0,$ где ортогональный проектор определяется по формуле

$$P_{J^*(t)}=\begin{pmatrix} O_{\delta} & 0 \\ 0 & I_{\omega} \end{pmatrix}, P_{J^*(t)}:R^n\to N\left(J^*(t)\right).$$

Введем обозначение

$$S^{-1}(t)\frac{dS}{dt}=\begin{pmatrix} G_{\delta\delta}(t) & G_{\delta\omega}(t) \\ G_{\omega\delta}(t) & G_{\omega\omega}(t) \end{pmatrix}, G_{\delta\delta}(t)\in R^{\delta\times\delta}, G_{\omega\omega}(t)\in R^{\omega\times\omega}.$$

Также обозначим $S^{-1}(t)M^{+}(t)f(t)=\mathrm{col}\left(\phi(t),\psi(t)\right)$, где $\phi(t)=(I_{\delta},O)S^{-1}(t)M^{+}(t)f(t)\in R^{\delta}$, $\psi(t)=(O,I_{n-\delta})S^{-1}(t)M^{+}(t)f(t)\in R^{\omega}$.

Отметим, что поскольку по построению матрицы $\bar{\Theta}$ и $\Theta(t)$ симметричны и неотрицательно определены, уравнения (3) и (4) корректны.

Таким образом, R^n разлагается в прямую сумму двух подпространств R^{δ} и R^{ω} так, что уравнение (4) разлагается на два уравнения в этих подпространствах:

$$\begin{cases} D_S\eta^{(1)}(t)=\left(J_{\delta}^{-1}(t)-G_{\delta\delta}(t)\right)\eta^{(1)}(t)-G_{\delta\omega}(t)\eta^{(2)}(t)+\phi(t), \\ D_2\eta^{(1)}(t)=\Xi(t) \end{cases}$$

в подпространстве R^{δ} и

$$\begin{cases} \eta^{(2)}(t)+\psi(t)=0, \\ D_2\eta^{(2)}(t)=O \end{cases} \quad (5)$$

в подпространстве R^{ω}.

Из второго равенства (5) вытекает, что решение уравнения (5) не является стохастическим, тогда из первого равенства вытекает, что решение уравнения (5) имеет вид $\eta^{(2)}(t)=-\psi(t)$. Очевидно, что начальные условия в этом случае предполагаются вида $\eta^{(2)}(0)=-\psi(0)$.

С учетом сказанного выше, уравнение в подпространстве R^{δ} примет вид

$$\begin{cases} D_S\eta^{(1)}(t)=\left(J_{\delta}^{-1}(t)-G_{\delta\delta}(t)\right)\eta^{(1)}(t)+G_{\delta\omega}(t)\psi(t)+\phi(t), \\ D_2\eta^{(1)}(t)=\Xi(t). \end{cases} \quad (6)$$

Заметим, что если решение (6) существует, то оно должно представляться в виде (1).

Для исследования (6) введем в R^{δ} новое скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$, которое для произвольных векторов X и Y из R^{δ} имеет вид $\langle X,Y\rangle=\left(\Xi^{-1}(t)X,Y\right)$. Введем начальное вероятностное распределение ρ_0 в R^δ такое, что оно нигде не равно нулю, через $\eta_0^{(1)}$ обозначим случайную величину в R^δ с плотностью ρ_0. Рассмотрим векторное поле $v(t,x)=\left(J_\delta^{-1}(t)-G_{\delta\delta}(t)\right)x+G_{\delta\omega}(t)\psi(t)+\phi(t)$ и обозначим через g_t его поток. Тогда из Теоремы 8.50 из [6] следует, что плотность $\rho(t)$ решения (6) с начальной плотностью ρ_0 имеет вид $\rho(t)=e^{p(t)}$, где $p(t,x)=p_0\left(g_{-t}(x)\right)-\int_0^t(\mathrm{Div}\,v)(s,g_s(g_{-t}(x))ds$, $p_0=\ln\rho_0$ и Div обозначает дивергенцию в R^δ со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Отсюда, для заданной матрицы $\Xi(t)$ и начальной плотности ρ_0 построенная плотность $\rho(t)$ находится во взаимно-однозначном соответствии с гладким векторным полем $v(t,x)$. Тогда после нахождения плотности $\rho(t)$ для решения уравнения (6) мы можем вычислить также осмотическую скорость $u(t,x)$ по формуле $u=\frac{1}{2}\mathrm{Grad}\,p$, где Grad – градиент относительно нового скалярного произведения [6]. Заметим, что u однозначно определяется плотностью ρ и матрицей Ξ и, стало быть, производная в среднем справа для решения также однозначно вычисляется по формуле $a(t,x)=v(t,x)+\frac{1}{2}\mathrm{Grad}\,p$. Следовательно, по теории уравнений с производными в среднем справа (см. Теоремы 1 и 2, а также [6]) $\eta^{(1)}(t)$ должно удовлетворять стохастическому дифференциальному уравнению $\eta^{(1)}(t)=\eta_0^{(1)}+\int_0^t a\left(s,\eta^{(1)}(s)\right)ds+\int_0^t C(s)dw(s)$, которое имеет сильное и сильно единственное решение $\eta^{(1)}(t)$ с начальной плотностью ρ_0, корректно определенное для $t\in[0,l]$ (см. [11]). А это и есть решение уравнения (6) в виде (1), которое мы ищем.

Таким образом, мы доказали

Теорема 3. Пусть у нас имеются C^∞-гладкие $k\times n$ матрицы $L(t)$, $M(t)$ и k-мерная вектор-функция $f(t)$, такие что $P_{L^*(t)}M(t)\neq 0$, $P_{M^*(t)}L(t)=0$, $P_{M^*(t)}f(t)=0$, где $P_{L^*(t)}:R^k\to N\left(L^*(t)\right)$; пусть псевдообратная матрица $M^+(t)$ к $M(t)$ тоже C^∞-гладкая; пусть матрица $M^+(t)L(t)$ постоянного ранга $\mathrm{rank}\,M^+(t)L(t)=\delta$, $n-\delta:=\omega$, и не имеет среди собственных чисел нулей геометрической кратности, отличной от алгебраической; пусть $S(t)$ – неособенная $n\times n$ – матрица, преобразующая матрицу $M^+(t)L(t)$ к канонической форме Жордана, $M^+(t)L(t)=S(t)J(t)S^{-1}(t)$; пусть $\Xi(t)$ – гладкая симметрическая положительно определенная матрица в R^δ, $\Theta(t)=\begin{pmatrix}\Xi(t) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $\bar\Theta=S(t)\Theta(t)S^*(t)$ и $t\in[0,l]$. Тогда уравнение

$$\begin{cases}L(t)D_S\xi(t)=M(t)\xi(t)+f(t),\\ D_2\xi(t)=\bar\Theta\end{cases}$$

преобразованное к

$$\begin{cases}J(t)D_S\eta(t)=\left(I_n-J(t)S^{-1}(t)\dfrac{dS}{dt}\right)\eta(t)+S^{-1}(t)M^+(t)f(t),\\ D_2\eta(t)=\Theta,\end{cases}$$

где $\eta(t)=S^{-1}(t)\xi(t)$, с начальными условиями $\eta^{(2)}(0)=-\psi(0)$ в R^ω, где $\psi(t)=(O,I_{n-\delta})S^{-1}(t)M^+(t)f(t)$, и случайной величиной с плотностью ρ_0 нигде не равной нулю в R^δ, имеет решение.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-01-00620).

Литература

1. Шестаков, А.Л. Новый подход к измерению динамически искаженных сигналов / А.Л. Шестаков, Г.А. Свиридюк // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2010. – № 16(192). – С. 116–120.

2. Келлер, А.В. О вырожденной дискретной балансовой динамической модели клеточного цикла / А.В. Келлер, С.И. Эбель // Южно-Уральская молодежная школа по математическому моделированию: сб. тр. всероссийской научно-практической конференции. – Челябинск, 2014. – С. 74–79.

3. Келлер, А.В. Методика построения статической и динамической балансовых моделей на уровне предприятия / А.В. Келлер, Т.А. Шишкина // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Экономика и менеджмент. – 2013. – Т. 7. – № 3. – С. 6–11.

4. Mashkov, E.Yu. On the stochastic systems of differential-algebraic type / E.Yu. Mashkov // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2014. – Vol. 1, no. 1. – P. 34–45.

5. Бояринцев, Ю.Е. Алгебро-дифференциальные системы. Методы решения и исследования / Ю.Е. Бояринцев, В.Ф. Чистяков. – Новосибирск: Наука, 1998. – 224 с.

6. Gliklikh, Yu.E. Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics / Yu.E. Gliklikh. – London: Springer-Verlag, 2011. – 460 p.

7. Gliklikh, Yu.E. Stochastic Leontieff type equations in terms of current velocities of the solution / Yu.E. Gliklikh, E.Yu. Mashkov // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2014. – Vol. 1, no. 2. – P. 45–51.

8. Nelson, E. Derivation of the Schrodinger equation from Newtonian mechanics / E. Nelson // Phys. Reviews. – 1966. – Vol. 150, no. 4. – P. 1079–1085.

9. Партасарати, К.Р. Введение в теорию вероятностей и теорию меры / К.Р. Партасарати. – М.: Мир, 1988. – 343 с.

10. Чуйко, С.М. Линейные нетеровы краевые задачи для дифференциально-алгебраических систем / С.М. Чуйко // Компьютерные исследования и моделирование. – 2013. – Т. 5, № 5. – С. 769–783.

11. Gihman, I.I. Theory of stochastic processes. Vol. 3. / I.I. Gihman, A.V. Scorohod. – New York: Springer-Verlag, 1979. – 388 p.

Поступила в редакцию 4 августа 2016 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2016, vol. 8, no. 4, pp. 26–32

DOI: 10.14529/mmph160403

ON THE STOCHASTIC LEONTIEF TYPE EQUATIONS WITH VARIABLE MATRICES GIVEN IN TERMS OF CURRENT VELOCITIES OF THE SOLUTION

E.Yu. Mashkov
Southwest State University, Kursk, Russian Federation
E-mail: mashkovevgen@yandex.ru

The stochastic Leontief type equations are a particular case of stochastic systems of differential-algebraic type. The paper deals with the study of the system given in terms of current velocities (symmetric derivatives at an average value) of the solution. It should be noted that in a physical meaning the current velocity of stochastic processes is a direct analog of the physical velocity of deterministic process. The authors assume that the matrices of the system under consideration are rectangular time dependants and satisfy the conditions, under which the system is not solvable with respect to the symmetric derivative. In order to investigate the system of equations the authors use an approach based on the transformation of a square matrix to the canonical Jordan form and changing the metric in the space. The theorem on solution existence for stochastic Leontief type equation with current velocities under some additional conditions on its matrices of coefficients and free terms is proved.

Keywords: derivative at an average value; current velocity; Wiener process; stochastic Leontief type equation.

References

1. Shestakov A.L., Sviridyk G.A. A New Approach to Measurement of Dynamically Perturbed Signals. *Bulletin of the South Ural State University, Series of "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software"*, 2010, no. 16(192), Issue 5, pp. 116–120. (in Russ.).

2. Keller A.V., Ebel' S.I. O vyrozhdennoy diskretnoy balansovoy dinamicheskoy modeli kletochnogo tsikla (On degenerate discrete balance dynamic model of cellular cycle). *Yuzhno-Ural'skaya molodezhnaya shkola po matematicheskomu modelirovaniyu: sbornik trudov vserossiyskoy nauchno-prakticheskoy konferentsii* (South Ural Youth School on mathematical modeling: Proc. of All-Russian scientific-practical conference). Chelyabinsk, 2014, pp. 74–79. (in Russ.).

3. Keller A.V., Shishkina T.A. Metodika postroeniya staticheskoy i dinamicheskoy balansovykh modeley na urovne predpriyatiya (The method of constructing dynamic and static balance models at the company level). *Bulletin of SUSU. Series "Economics and Management"*, 2013, Vol. 7, no. 3, pp. 6–11. (in Russ.).

4. Mashkov E.Yu. On the stochastic systems of differential-algebraic type. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2014, Vol. 1, no. 1, pp. 34–45.

5. Boyarintsev Yu.E., Chistyakov V.F. *Algebro-differentsial'nye sistemy. Metody resheniya i issledovaniya* (Algebraic-differential systems. Solution methods and investigations). Novosibirsk, Nauka Publ., 1998, 224 p. (in Russ.).

6. Gliklikh Yu.E. *Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics*. London, Springer-Verlag, 2011, 460 p. DOI: 10.1007/978-0-85729-163-9

7. Gliklikh Yu.E., Mashkov E.Yu. Stochastic Leontieff type equations in terms of current velocities of the solution. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2014, Vol. 1, no. 2, pp. 45–51.

8. Nelson E. Derivation of the Schrodinger equation from Newtonian mechanics. *Phys. Reviews*, 1966, Vol. 150, no. 4, pp. 1079–1085. DOI: 10.1103/PhysRev.150.1079

9. Parthasarathy K.R. *Introduction to probability and measure*. Springer-Verlag, New York, Macmillan India, 1978, 312 p.

10. Chuiko S.M. Linear Noether boundary value problem for linear differential-algebraic system. *Computer Research and Modeling*, 2013, Vol. 5, no. 5, pp. 769–783. (in Russ.).

11. Gihman I.I., Scorohod A.V. *Theory of stochastic processes. Vol. 3.* New York, Springer-Verlag, 1979, 388 p. DOI: 10.1007/978-1-4615-8065-2

Received August 4, 2016