УДК 517.968.23 DOI: 10.14529/mmph160404

О КАРТИНЕ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОРОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КРУГОВЫХ ОБЛАСТЯХ

К.М. Расулов, Т.И. Тимофеева
Смоленский государственный университет, г. Смоленск, Российская Федерация
E-mail: kahrimanr@yandex.ru

Рассматривается краевая задача типа задачи Гильберта в классах квазигармонических функций. Разработан метод решения в явном виде однородной задачи Гильберта для квазигармонических функций первого рода в круговых областях. Кроме того, установлено, что картина разрешимости рассматриваемой задачи существенно зависит от того, является ли носителем краевых условий единичная окружность или окружность неединичного радиуса.

Ключевые слова: краевая задача; задача типа Гильберта; квазигармоническая функция; дифференциальное уравнение; круговая область; единичная окружность; неединичная окружность.

1. Постановка задачи. Пусть T^+ – конечная односвязная область на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная простым гладким замкнутым контуром L.

Напомним [1–2], что *квазигармоническими функциями рода n в области T^+* называются регулярные в этой области решения дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \overline{z}} + \frac{n(n+1)}{(1+z\overline{z})^2} W = 0, \tag{1}$$

где $\dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} - i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$, $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$, а n – некоторое фиксированное натуральное число.

Известно [1–3], что всякую квазигармоническую функцию рода n в области T^+ можно представить в виде

$$W(z) = \sum_{k=0}^{n} A_k^n \left(\frac{\overline{z}}{1+z\overline{z}}\right)^{n-k} \frac{d^k \varphi(z)}{dz^k}, \tag{2}$$

где $A_k^n = (-1)^{n-k} \dfrac{(2n-k)!}{k!(n-k)!}$, а $\varphi(z)$ – аналитическая в области T^+ функция, называемая *аналитической компонентой* квазигармонической функции $W(z)$.

Определение 1. Будем говорить, что квазигармоническая функция $W(z)$ рода n ($n \geq 1$) принадлежит классу $\boldsymbol{Q}_n(T^+) \cap H^{(m)}(L)$, если в представлении (2) аналитическая компонента $\varphi(z) \in A(T^+) \cap H^{(m)}(L)$, т.е. аналитическая функция $\varphi(z)$ непрерывно (в смысле Гельдера) продолжается на контур L вместе со своими производными до порядка m включительно (здесь m – некоторое фиксированное неотрицательное целое число).

Рассматривается следующая краевая задача.

Требуется найти все квазигармонические функции $W(z)$ рода n ($n \geq 1$), принадлежащие классу $\boldsymbol{Q}_n(T^+) \cap H^{(n)}(L)$ и удовлетворяющие на L условию

$$\mathrm{Re}\left\{\overline{h(t)} \cdot W(t)\right\} = q(t), \tag{3}$$

где $h(t) = a(t) + ib(t)$ и $q(t)$ – заданные на контуре L функции класса $H(L)$ (т.е. удовлетворяющие на L условию Гельдера).

В дальнейшем сформулированную выше задачу будем называть *задачей Гильберта для квазигармонических функций рода n* или, коротко, *задачей $\boldsymbol{\Gamma}_n$*, а соответствующую *однородную задачу* ($q(t) \equiv 0$) назовем *задачей $\boldsymbol{\Gamma}_n^0$*.

Сразу заметим, что в силу представления (2) краевое условие (3) можно переписать в виде

$$\operatorname{Re}\left(\overline{h(t)}\sum_{k=0}^{n} A_k^n \left(\frac{\overline{t}}{1+t\overline{t}}\right)^{n-k} \frac{d^k\varphi^+(t)}{dt^k}\right) = q(t), \quad t\in L\,, \tag{4}$$

где $\varphi^+(t) = \lim\limits_{z\to t\in L} \varphi(z)$. Но равенство (4) есть краевое условие хорошо известной (см., например, [4, с. 245]) *обобщенной* (*дифференциальной*) *краевой задачи типа Гильберта* относительно аналитической в области T^+ функции $\varphi(z)$.

Таким образом, по сути, задача $\boldsymbol{\Gamma}_n$ равносильна *обобщенной* (*дифференциальной*) задаче типа Гильберта (4) относительно аналитической функции $\varphi(z)$.

Хорошо известно (см., например, [4, 5]), что в общем случае обобщенная краевая задача Гильберта с краевым условием вида (4) решается *методом интегральных уравнений*, и её картина разрешимости не допускает точного описания (обычно в таких случаях говорят, что краевая задача *не решается в замкнутой форме*). Поэтому для краевых задач вида (4) актуальной является проблема, состоящая в установлении частных случаев достаточно общего характера, когда рассматриваемая задача решается эффективно и допускает точное описание картины её разрешимости.

В связи со сказанным выше, примем следующее определение (см. также [1, 6]).

Определение 2. Будем говорить, что краевая задача $\boldsymbol{\Gamma}_n$ допускает *явное решение*, если ее общее решение удается построить, используя только известные формулы для решения обычной скалярной задачи Гильберта для аналитических функций, а также решая конечное число линейных дифференциальных уравнений и (или) систем линейных алгебраических уравнений, для которых матрица системы может быть выписана в явном виде (в квадратурах).

В работе [2] одного из авторов был разработан метод явного решения задачи $\boldsymbol{\Gamma}_n$ в случае, когда T^+ – *единичный круг*. Однако недавно авторы обнаружили, что картина разрешимости рассматриваемой задачи существенно меняется, если вместо единичного круга рассмотреть круг *неединичного радиуса*. Поэтому основной целью настоящей заметки является установление причины различия в картинах разрешимости однородной задачи $\boldsymbol{\Gamma}_n^0$ в круге $T_r^+ = \{z : |z| < r\}$, $r > 0$, в зависимости от того, является ли $r = 1$ или $r \neq 1$. Для удобства при сравнительном анализе результатов исследования задачи $\boldsymbol{\Gamma}_n^0$ в случаях $r = 1$ и $r \neq 1$, ниже мы раздельно излагаем эти результаты, причем ради краткости ограничиваемся решением задачи $\boldsymbol{\Gamma}_n^0$ в классах квазигармонических функций *первого рода*, т.е. при $n = 1$.

2. Метод явного решения задачи $\boldsymbol{\Gamma}_1^0$ и картина её разрешимости в случае единичного круга. Пусть $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ и $L = \{t : |t| = 1\}$. Сразу отметим, что в случае $n = 1$ представление (2) принимает вид:

$$W(z) = \frac{d\varphi(z)}{dz} - \frac{2\overline{z}}{1+z\overline{z}}\varphi(z)\,, \tag{5}$$

где $\varphi(z) \in A(T^+) \cap H^{(1)}(L)$.

Так как в точках единичной окружности L выполняется тождество $\overline{t} = 1/t$, то краевое условие (3) для однородной задачи $\boldsymbol{\Gamma}_1^0$ $(q(t) \equiv 0)$ с учетом (5) можно переписать в виде

$$\operatorname{Re}\left\{t^{-1}\overline{h(t)}\left(t\frac{d\varphi^+(t)}{dt} - \varphi^+(t)\right)\right\} = 0, \quad t \in L\,, \tag{6}$$

где $\varphi^+(t) = \lim\limits_{z\to t\in L} \varphi(z)$.

Далее введем в рассмотрение вспомогательную аналитическую в круге T^+ функцию

$$\Phi(z) = z\frac{d\varphi(z)}{dz} - \varphi(z), \quad z \in T^+, \tag{7}$$

где $\varphi(z)$ – *аналитическая компонента* искомой квазигармонической функции $W(z)$. С учетом (7) и $\overline{t} = 1/t$ краевое условие (6) можно записать так:

$$\mathrm{Re}\left\{\overline{t \cdot h(t)} \cdot \Phi^+(t)\right\} = 0, \quad t \in L, \tag{8}$$

где $\Phi^+(t) = \lim\limits_{z \to t \in L} \Phi(z)$.

В дальнейшем равенство (8) будем использовать в следующей комплексной форме:

$$\Phi^+(t) = G(t)\overline{\Phi^+(t)}, \quad t \in L, \tag{9}$$

где

$$G(t) = -t^2 \frac{h(t)}{\overline{h(t)}}.$$

Поскольку решения задачи Гильберта $\boldsymbol{\Gamma}_1^0$ ищутся в классе $\boldsymbol{Q}_1(T^+) \cap H^{(1)}(L)$, то равенство (9) (или, что то же самое, (8)) есть краевое условие *обычной однородной* краевой задачи Гильберта относительно функции $\Phi(z)$, аналитической в круге $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ (см., например, [1, с. 80] или [4, с. 283]).

В дальнейшем *индекс задачи Гильберта* (9), т.е. число $\chi = \mathrm{Ind}G(t) = 2(m+1)$, где $m = \mathrm{Ind}h(t)$, будем также называть *индексом исходной задачи* $\boldsymbol{\Gamma}_1^0$.

Как известно (см., например, [1, с. 91] или [4, с. 283]), если индекс $\chi \ge 0$, то однородная задача Гильберта (9) безусловно разрешима и ее общее решение можно задавать формулой

$$\Phi(z) = z^{m+1} X_0^+(z) \left\{\alpha_0 + \sum_{k=1}^{m+1} (\lambda_k z^k + \overline{\lambda}_k z^{-k})\right\}, \quad z \in T^+, \tag{10}$$

где

$$X_0(z) = \exp\{\gamma_0(z)\}, \ \gamma_0(z) = \frac{1}{4\pi \mathrm{i}} \int_L \frac{\ln[\tau^{-\chi} G(\tau)]}{\tau} \frac{\tau + z}{\tau - z} d\tau; \tag{11}$$

α_0 – произвольная действительная постоянная, а $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ $(k = 1, 2, ..., n)$ – произвольные комплексные постоянные. Если же индекс $\chi < 0$, то однородная задача Гильберта (9) не имеет (нетривиальных) решений.

Предположим, что $\chi \ge 0$. Тогда в силу (7) получаем

$$z\frac{d\varphi(z)}{dt} - \varphi(z) = \Phi(z), \ z \in T^+, \tag{12}$$

где $\Phi(z)$ – общее решение задачи Гильберта (9), задаваемое формулой (10). Таким образом, в случае $\chi \ge 0$ аналитическая компонента $\varphi(z)$ искомой квазигармонической функции $W(z)$ должна удовлетворять линейному неоднородному дифференциальному уравнению 1-го порядка вида (12).

Для построения общего решения неоднородного дифференциального уравнения (12) сначала найдем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$z\frac{d\varphi(z)}{dt} - \varphi(z) = 0, \ z \in T^+. \tag{13}$$

Равенство (13) есть линейное однородное дифференциальное уравнение Эйлера 1-го порядка (см., например, [7], с. 136). Легко проверить, что все аналитические в круге $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ решения уравнения Эйлера (13) можно задавать формулой

$$\varphi_0(z) = C_1 z, \tag{14}$$

где C_1 – произвольная комплексная постоянная.

Далее, частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (12) будем искать методом вариации произвольных постоянных, т.е. в виде

$$\varphi_1(z) = C_1(z) \cdot z\,, \tag{15}$$

где $C_1(z)$ – мероморфная в круге T^+ функция комплексной переменной z, для которой выражение $C_1(z)\cdot z$ есть аналитическое решение дифференциального уравнения (12) в этом круге, непрерывно (в смысле Гельдера) продолжающееся на единичную окружность L вместе со своей производной 1-го порядка, т.е. $\varphi_1(z) \in \boldsymbol{A}(T^+) \cap H^{(1)}(L)$. Для нахождения функции $C_1(z)$, поставляя функцию (15) в левую часть неоднородного уравнения (12), получаем следующее уравнение Лагранжа:

$$C_1^{'}(z) = z^{-2}\Phi(z)\,. \tag{16}$$

Из формулы (16) видно, что для того чтобы функция $C_1(z)$ была мероморфной в единичном круге T^+, необходимо и достаточно выполнение следующего условия:

$$\Phi'(0) = 0\,. \tag{17}$$

При выполнении условия (17), с помощью интегрирования из (16) получаем

$$C_1(z) = \int z^{-2}\Phi(z)dz\,, \tag{18}$$

где $\int z^{-2}\Phi(z)dz$ – фиксированная первообразная функции $z^{-2}\Phi(z)$ в единичном круге T^+.

Итак, в силу (15) и (18), частное решение неоднородного дифференциального уравнения (12) при $\chi \ge 0$ можно задавать в виде

$$\varphi_1(z) = z\int z^{-2}\Phi(z)dz\,. \tag{19}$$

Поскольку решения задачи Гильберта $\boldsymbol{\Gamma}_1^0$ ищутся в классе $\boldsymbol{Q}_1(T^+) \cap H^{(1)}(L)$, то функция (19) должна принадлежать классу $\boldsymbol{A}(T^+) \cap H^{(1)}(L)$, т.е. быть непрерывно (в смысле Гельдера) продолжающейся на контур L вместе со своей производной 1-го порядка. В силу известной теоремы Харди и Литтльвуда (см., например, [8, с. 397]), для этого необходимо и достаточно, чтобы в круге T^+ выполнялись неравенства:

$$\left|\frac{d^k\varphi_1(z)}{dz^k}\right| \le \frac{M_k}{(1-\rho)^{1-\delta_k}}\,,\quad k = 1, 2\,, \tag{20}$$

где $\rho = |z|$; M_k, δ_k $(k = 1,\,2)$ – некоторые положительные постоянные, причем $0 < \delta_k \le 1$.

Замечание 1. Важно отметить, что при $\chi \ge 0$ некоторые из условий вида (17) и (20) можно удовлетворять за счет определенного выбора значений произвольных постоянных α_0 и $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ $(k = 1, 2, ..., m+1)$, входящих в выражение функции $\Phi(z)$, задаваемой формулой (см. ниже *пример* 1).

Предположим, что условия (17) и (20) выполняются. Тогда при $\chi \ge 0$ общее решение линейного дифференциального уравнения (12), принадлежащее классу $\boldsymbol{A}(T^+) \cap H^{(1)}(L)$, можно задавать так:

$$\varphi(z) = C_1 z + z\int z^{-2}\Phi(z)dz\,, \tag{21}$$

где C_1 – произвольная комплексная постоянная. Тогда (в силу представления (5)) общее решение искомой однородной задачи $\boldsymbol{\Gamma}_1^0$ при $\chi \ge 0$ можно задавать формулой:

$$W(z) = C_1 + z^{-1}\Phi(z) + \int z^{-2}\Phi(z)dz - \frac{2\overline{z}}{1+z\overline{z}}\left(C_1 z + z\int z^{-2}\Phi(z)dz\right). \tag{22}$$

Рассмотрим теперь случай, когда $\chi < 0$. В этом случае (см., например, [1, с. 91] или [4, с. 283]) однородная задача Гильберта (8) имеет лишь *тривиальное* (нулевое) решение, т.е. $\Phi(z) \equiv 0$. Следовательно, аналитическая компонента $\varphi(z)$ искомой квазигармонической функции $W(z)$ в данном случае должна удовлетворять линейному *однородному* дифференциальному уравнению

Эйлера 1-го порядка вида (13). Но как показано выше, общее решение однородного уравнения (13) задается формулой (14). Значит, при $\chi<0$ общее решение однородной задачи $\boldsymbol{\Gamma}_n^0$ также можно задавать формулой (22), где нужно положить $\Phi(z)\equiv 0$.

Тем самым установлена справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. *Если индекс* $\chi\geq 0$ *и* $T^+=\{z:|z|<1\}$, *то для разрешимости однородной задачи* $\boldsymbol{\Gamma}_1^0$ *в классе квазигармонических функций первого рода, необходимо и достаточно, чтобы функция* $h(t)$ *удовлетворяла условиям (17) и (20), причем при выполнении указанных условий, общее решение задачи* $\boldsymbol{\Gamma}_1^0$ *можно задавать формулой (22). Если же индекс* $\chi<0$, *то однородная задача* $\boldsymbol{\Gamma}_1^0$ *в единичном круге* $T^+=\{z:|z|<1\}$ *безусловно разрешима и её общее решение задается формулой (22), где нужно положить* $\Phi(z)\equiv 0$.

Далее, пользуясь теоремой 1, опишем картину разрешимости однородной задачи $\boldsymbol{\Gamma}_n^0$ в единичном круге $T^+=\{z:|z|<1\}$, т.е. установим число l линейно независимых (над полем действительных чисел $\boldsymbol{R}$) решений этой задачи.

Пусть $\chi<0$. Тогда, как видно из формулы (22), где $\Phi(z)\equiv 0$, общее решение однородной задачи $\boldsymbol{\Gamma}_1^0$ в единичном круге $T^+=\{z:|z|<1\}$ линейно зависит лишь от одной произвольной комплексной постоянной $C_1=p_1+iq_1$, т.е. от двух произвольных действительных постоянных p_1, q_1. Значит, если $\chi<0$, то $l=2$.

Предположим теперь, что $\chi=2(m+1)\geq 0$ и $T^+=\{z:|z|<1\}$. В этом случае общее решение однородной задачи Гильберта (8) (т.е. аналитическая функция $\Phi(z)$) линейно зависит от $2m+3$ произвольных действительных постоянных (см. формулу (10)). Но некоторые из указанных постоянных могут исчезнуть в результате удовлетворения условий разрешимости вида (17) и (20) (см. замечание 1 и ниже *пример* 1). Следовательно, в данном случае общее решение задачи $\boldsymbol{\Gamma}_1^0$, задаваемое формулой (22), линейно зависит не более чем от $2m+5$ произвольных действительных постоянных, т.е. если $\chi\geq 0$, то $l\leq 2m+5$, где $m=\mathrm{Ind}h(t)$.

Пример. *Требуется найти все квазигармонические функции* $W(z)$ *первого рода в круге* $T^+=\{z:|z|<1\}$, *принадлежащие классу* $\boldsymbol{Q}_1(T^+)\cap H^{(1)}(L)$ *и удовлетворяющие на* $L=\{t:|t|=1\}$ *условию*

$$\mathrm{Re}\{W(t)\}=0. \tag{23}$$

Решение. В данном примере $n=1$, $h(t)=1$ и $m=\mathrm{Ind}h(t)=0$. Следовательно, индекс данной задачи $\chi=2(m+1)=2$. Значит, согласно формуле (10), в данном случае имеем:

$$\Phi(z)=iz\left\{\alpha_0+(\lambda_1 z-\overline{\lambda}_1 z^{-1})\right\},\quad z\in T^+, \tag{24}$$

где α_0 – произвольная действительная постоянная, а $\lambda_1=\alpha_1+i\beta_1$ – произвольная комплексная постоянная. Заметим, что дифференциальное уравнение (13) в данном случае имеет вид:

$$z\frac{d\varphi(z)}{dz}-\varphi(z)=iz\left\{\alpha_0+(\lambda_1 z+\overline{\lambda}_1 z^{-1})\right\},\quad z\in T^+. \tag{25}$$

Теперь нетрудно проверить, что для того чтобы выполнялось условие вида (17), достаточно положить правой части (24) $\alpha_0=0$. Тогда из (25) получаем

$$z\frac{d\varphi(z)}{dz}-\varphi(z)=i\lambda_1 z^2+i\overline{\lambda},\ z\in T^+. \tag{26}$$

Согласно формуле (19), частное решение дифференциального уравнения (26) можно задавать так:

$$\varphi_1(z)=i\lambda_1 z^2-i\overline{\lambda_1}, \tag{27}$$

где λ_1 – произвольная комплексная постоянная. Очевидно, что для функции вида (27) выполняются условия вида (20). Следовательно, общее решение дифференциального уравнения (25), принадлежащее классу $\boldsymbol{A}(T^+)\cap H^{(1)}(L)$, имеет вид:

$$\varphi(z)=i\lambda_1 z^2+C_1 z-i\overline{\lambda_1}, \tag{28}$$

где C_1, λ_1 – произвольные комплексные постоянные.

Наконец, подставив значение функции (28) в правую часть формулы (5), получим общее решение исходной задачи (23) в виде

$$W(z)=C_1+2i\lambda_1 z-\frac{2\overline{z}}{1+z\overline{z}}(i\lambda_1 z^2+C_1 z-i\overline{\lambda_1}),$$

где C_1, λ_1 – произвольные комплексные постоянные.

3. О решении задачи $\boldsymbol{\Gamma}_1^0$ и картине её разрешимости в случае $\boldsymbol{T_r^+=\{z:|z|<r\}}$ и $\boldsymbol{L_r=\{t:|t|=r\}}$, где $\boldsymbol{r\neq 1}$. Будем искать решение задачи $\boldsymbol{\Gamma}_1^0$ в виде

$$W(z)=\frac{d\varphi(z)}{dz}-\frac{2\overline{z}}{1+z\overline{z}}\varphi(z), \tag{29}$$

где $\varphi(z)\in A(T_r^+)\cap H^{(1)}(L_r)$.

Так как в точках окружности $L_r=\{t:|t|=r\}$ выполняется тождество $\overline{t}=r^2/t$, то с учетом (29) краевое условие (3) при $n=1$ и $q(t)\equiv 0$ можно переписать так:

$$\operatorname{Re}\left\{t^{-1}\overline{h(t)}\left(t\frac{d\varphi^+(t)}{dt}-\frac{r^2}{1+r^2}\varphi^+(t)\right)\right\}=0,\quad t\in L_r, \tag{30}$$

где $\varphi^+(t)=\lim\limits_{z\to t\in L_r}\varphi(z)$.

Введем теперь в рассмотрение вспомогательную аналитическую в круге $T_r^+=\{z:|z|<r\}$ функцию

$$\Psi(z)=z\frac{d\varphi(z)}{dt}-\frac{2r^2}{1+r^2}\varphi(z),\ z\in T_r^+, \tag{31}$$

где $\varphi(z)$ – *аналитическая компонента* искомой квазигармонической функции $W(z)$. С учетом (31) краевое условие (28) примет вид:

$$\operatorname{Re}\left\{t^{-1}\overline{h(t)}\Psi^+(t)\right\}=0,\quad t\in L_r, \tag{32}$$

где $\Psi^+(t)=\lim\limits_{z\to t\in L_r}\Psi(z)$. Ясно, что равенство (32) есть краевое условие однородной задачи Гильберта относительно аналитической в круге $T_r^+=\{z:|z|<r\}$ функции $\Psi(z)$.

Пусть $\chi=2(m+1)$, где $m=\operatorname{Ind}h(t)$, есть индекс задачи Гильберта (32). Тогда при $\chi\geq 0$ однородная задача Гильберта (32) безусловно разрешима и ее общее решение линейно зависит ровно от $\chi+1$ произвольных действительных постоянных (см. формулу (10)). Если же $\chi<0$, то однородная задача Гильберта (32) не имеет нетривиальных решений.

Далее предположим, что $\chi=2(m+1)\geq 0$ и $\Psi(z)$ – общее решение однородной задачи Гильберта (32). Тогда в силу (31) получаем

$$z\frac{d\varphi(z)}{dt}-\frac{2r^2}{1+r^2}\varphi(z)=\Psi(z),\ z\in T_r^+. \tag{33}$$

Таким образом, аналитическая компонента $\varphi(z)$ искомой квазигармонической функции $W(z)$ должна удовлетворять линейному дифференциальному уравнению 1-го порядка вида (33).

Легко проверить, что однородное дифференциальное, соответствующее неоднородному уравнению (33), т.е. уравнение

$$z\frac{d\varphi(z)}{dt}-\frac{2r^2}{1+r^2}\varphi(z)=0, \quad z\in T_r^+, \tag{34}$$

не имеет в круге $T_r^+=\{z:|z|<r\}$, $r\neq 1$, нетривиальных (ненулевых) решений, принадлежащих классу $A(T_r^+)\cap H^{(1)}(L_r)$. Следовательно, в случае разрешимости, решение неоднородного дифференциального уравнения (33) может содержат не более чем $\chi+1$ произвольных действительных постоянных.

Предположим, что дифференциальное уравнение (33) в классе функций $A(T_r^+)\cap H^{(1)}(L_r)$ разрешимо, и уже найдено его решение $\tilde{\varphi}(z)$. Тогда в силу (29) решение искомой задачи Гильберта $\boldsymbol{\Gamma}_1^0$ в круге $T_r^+=\{z:|z|<r\}$, $r\neq 1$, можно задавать формулой:

$$W(z)=\frac{d\tilde{\varphi}^+(z)}{dz}-\frac{2\bar{z}}{1+z\bar{z}}\tilde{\varphi}^+(z), \tag{35}$$

где $\tilde{\varphi}(z)$ – решение линейного дифференциального уравнения (33), принадлежащее классу $A(T_r^+)\cap H^{(1)}(L_r)$.

Итак, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Если индекс $\chi\geq 0$, то для разрешимости неоднородной задачи Гильберта $\boldsymbol{\Gamma}_1^0$ в классе квазигармонических функций первого рода в круге $T_r^+=\{z:|z|<r\}$, $r\neq 1$, необходимо и достаточно, чтобы линейное дифференциальное уравнение (33) было разрешимо в классе функций $A(T_r^+)\cap H^{(1)}(L_r)$, и при этом общее решение однородной задачи $\boldsymbol{\Gamma}_1^0$, задаваемое формулой (33), линейно зависит не более чем от $\chi+1$ произвольных действительных постоянных. Если же индекс $\chi<0$, то однородная задача $\boldsymbol{\Gamma}_1^0$ в круге $T_r^+=\{z:|z|<r\}$, $r\neq 1$, не имеет (нетривиальных) решений.*

Замечание 2. Сравнивая изложенные выше решения однородной задачи $\boldsymbol{\Gamma}_1^0$ в единичном круге $T^+=\{z:|z|<1\}$ и в круге $T_r^+=\{z:|z|<r\}$, $r\neq 1$, замечаем, что существенное различие в картинах разрешимости этой задачи в указанных двух случаях возникает из-за того, что однородное дифференциальное уравнение вида (34) в круге $T_r^+=\{z:|z|<r\}$, $r\neq 1$, *не имеет* (*нетривиальных*) *решений*, принадлежащих классу $A(T_r^+)\cap H^{(1)}(L_r)$, а в *единичном круге*, т.е. при $r=1$, имеет ненулевые решения вида (14).

Литература

1. Расулов, К.М. Метод сопряжения аналитических функций и некоторые его приложения / К.М. Расулов. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2013. – 188 с.

2. Расулов, К.М. Краевая задача Гильберта в классах квазигармонических функций в круге / К.М. Расулов // Известия СмолГУ. – 2014. – № 4(28). – С. 331–338.

3. Bauer, K.W. Uber eine der Differentialgleichung $(1+z\bar{z})^2W_{z\bar{z}}\pm n(n+1)W=0$ zugeordnete Funktionentheorie / K.W. Bauer // Bonner Math. – 1965. – Schrften 23.

4. Гахов, Ф.Д. Краевые задачи / Ф.Д. Гахов. – М: Наука, 1977. – 640 с.

5. Мусхелишвили, Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / Н.И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1968. – 511 с.

6. Адуков, В.М. О явном и точном решениях задачи Маркушевича на окружности / В.М. Адуков, А.А. Патрушев // Известия Саратовского ун-та. Новая серия. Серия «Математика. Механика. Информатика». − 2011. – Т. 11, Вып. 2. – С. 9–20.

7. Коддингтон, Э.А. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений / Э.А. Коддингтон, Н. Левинсон. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1958. – 474 с.

8. Голузин, Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного / Г.М. Голузин. – М.: Наука, 1966. – 628 с.

Поступила в редакцию 10 июня 2016 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2016, vol. 8, no. 4, pp. 33–40

DOI: 10.14529/mmph160404

ON SOLVABILITY OF THE HILBERT HOMOGENEOUS BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR QUASIHARMONIC FUNCTIONS IN CIRCULAR DOMAINS

K.M. Rasulov, T.I. Timofeeva
Smolensk State University, Smolensk, Russian Federation
E-mail: kahrimanr@yandex.ru

A Hilbert-type boundary value problem in the classes of quasi-harmonic functions is considered. Quasi-harmonic functions are regular solutions of an elliptic differential equation form $\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \overline{z}} + \frac{n(n+1)}{(1+z\overline{z})^2} W = 0$, where $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$, $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$, and n is a given positive integer. Using the fact that a circle is an analytic curve, we have developed an explicit method for finding solutions of the Hilbert homogeneous boundary value problem for quasi-harmonic functions in circular domains. The principal logic of this method consists of two stages. At stage one we are using a representation of quasi-harmonic function via analytic function and its derivatives to reduce the problem to the classical Hilbert problem for some auxiliary analytic function in the circular domain. A solution $\Phi(z)$ for this problem will be used at stage two, when we solve the linear differential Euler equation of order n with the right-hand side $\Phi(z)$. General solution for the problem can be explicitly expressed in terms of the solution of the Euler equation. Moreover, we have established that the solvability for the considered boundary-value problem depends essentially on whether a unit circumference is the carrier of boundary conditions or a non-unit circle.

Keywords: boundary value problem; Hilbert-type boundary value problem; quasiharmonic function; differential equation; cyclic domain; unit circumference; non-unit circumference.

References

1. Rasulov K.M. *Metod sopryazheniya analiticheskikh funktsiy i nekotorye ego prilozheniya* (Conjugation method of analytic functions and some of its applications). Smolensk, SmolGU Publ., 2013, 188 p. (in Russ.).

2. Rasulov K.M. The Boundary Value Problem of Hilbertin Classes of Quasiharmonic Functions in a Circle. *Izvestia of Smolensk State University*, 2014, no. 4(28), pp. 331–338. (in Russ.).

3. Bauer K.W. Über eine der Differentialgleichung $(1+z\overline{z})^2 W_{z\overline{z}} \pm n(n+1)W = 0$ zugeordnete Funktionentheorie. *Bonner Math.*, Schrften Nr. 23, Bonn: Math. Inst. Univ., 1965.

4. Gakhov F.D. *Kraevye zadachi* (Boundary Value problems). Moscow, Nauka Publ., 1977, 640 p. (in Russ.).

5. Muskhelishvili N.I. Singulyarnye integral'nye uravneniya (Singular integral equations). Moscow, Nauka Publ., 1968, 511 p. (in Russ.).

6. Adukov V.M., Patrushev A.A. On explicit and exact solutions of the Markushevich boundary problem for circle. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2011, Vol. 11, no. 2, pp. 9–20. (in Russ.).

7. Coddington E.A., Levinson N. *Teoriya obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy* (Theory of ordinary differential equations). Moscow, Izd-vo inostrannoy literatury Publ., 1958, 474 p. (in Russ.). [Coddington E.A., Levinson N. Theory of Ordinary Differential Equations. Tata McGraw-Hill, 1955, 429 p.]

8. Goluzin G.M. *Geometricheskaya teoriya funktsiy kompleksnogo peremennogo* (Geometric theory of functions of a complex variable). Moscow, Nauka Publ., 1966, 628 p. (in Russ.).

Received June 10, 2016