

## ФОРМАЛИЗАЦИИ ЗАДАЧ ПОГРУЗКИ И ДОСТАВКИ

**Е.М. Бронштейн<sup>1</sup>, Э.В. Гиндуллина<sup>1</sup>, Р.В. Гиндуллин<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Уфимский государственный авиационный технический университет, г. Уфа, Российская Федерация

<sup>2</sup> Башкирский государственный университет, г. Уфа, Российская Федерация  
E-mail: bro-efim@yandex.ru

Задачи маршрутизации типа «one-to-one» или Traveling Salesman Problem with Pickup and Delivery (TSPPD) заключаются в формировании цикла минимальной длины, обеспечивающего доставку грузов от производителей потребителям при условии доставки груза от каждого производителя конкретному потребителю. Такая задача, в частности, возникает при доставке пассажиров (например, таксопарком). Установлены некоторые свойства поставленной задачи. Построен ряд квадратичных, линейных целочисленных и частично целочисленных формализаций таких задач, в которых число ограничений растет полиномиально с ростом числа пунктов. В частности, в качестве переменных используются булевы элементы матрицы перестановки, двухиндексные и трехиндексные переменные, описывающие отношение предшествования и некоторые другие. При таких формализациях возможно непосредственное использование оптимизационных пакетов. В частности, был проведен вычислительный эксперимент с использованием пакета CPLEX 12.6. Рекордной по производительности на случайно сгенерированных данных оказалась линейная смешанная трехиндексная модель. Установлено, что добавление некоторых дополнительных ограничений существенно повышает эффективность решения, в то время, как использование некоторых других ограничений эффективность снижают. В ряде случаев фактором, препятствующим решению задачи большей размерности, явилась ограниченность оперативной памяти.

При некоторых дополнительных ограничениях задача решалась для множеств пунктов, предлагаемых библиотекой, предложенной в университете г. Гейдельберга (Германия). В этом случае при использовании линейной смешанной трехиндексной модели получены решения задач весьма большой размерности (до 391 пары пунктов). Перспективы применения моделей, предложенных в статье, заключаются в расширении оперативной памяти компьютеров и совершенствовании оптимизационного пакета CPLEX. Некоторые исследователи отмечают, что CPLEX 11 (2007) работает почти в 30 000 раз быстрее, чем CPLEX 1 (1991).

*Ключевые слова:* маршрутизация; оптимизация; задача погрузки и доставки.

### Введение

Впервые задача маршрутизации транспортных средств (VRP – Vehicle Routing Problem) была поставлена в [1]. За истекшие десятилетия рассматривалось множество модификаций VRP. Информация по этой тематике аккумулируется на сайте [2]. Один из подходов к классификации подобных задач приведен в [3].

Предполагается, что граф, вершинами которого являются пункты производства и потребления, а дугами – соответствующие пути, является полным. При формализации этой задачи в качестве неизвестных используются булевы величины – элементы матрицы перестановки или индикаторы непосредственных переходов между пунктами. В первом случае целевая функция оказывается квадратичной, но при этом не может возникнуть подциклов. Во втором задача априори является линейной. Исследовались в основном формализации второго типа, причем число ограничений часто принималось экспоненциально зависящим от числа пунктов, непосредственное применение оптимизационных пакетов при этом затруднительно. Задача успешно решалась методами ветвей и границ или ветвей и отсечений (генерации столбцов). В недавней работе [4] развивается аналогичный подход для задачи с временными окнами и несколькими транспортными

средствами, приводится оригинальная модификация второго подхода. Модели с полиномиально растущим числом ограничений там названы компактными.

В статье приводятся формализации, основанные как на первом, так и втором подходах, с числом ограничений, полиномиально зависящим от числа пунктов. В частности, применяются различные методы линеаризации задачи, которые являются адаптацией описанных в обзорах [5, 6] приемов, применявшихся к квадратичной задаче о назначениях [7].

При реализации некоторых из предложенных подходов в каких-либо программных средах понадобится переход от логических переменных  $b$  к их числовым значениям [b]. Заметим, что для популярного пакета CPLEX подобного преобразования не требуется.

## Постановка задачи. Квадратичная формулировка

Пусть  $P = \{1, \dots, n\}$  – пункты вывоза грузов веса  $q_i$  – для  $i$ -го пункта,  $D = \{n+1, \dots, 2n\}$  – пункты доставки грузов. Полагаем, что в  $(n+i)$ -м пункте вес груза отрицательный ( $-q_i$ ). Множество пунктов есть  $V = P \cup D \cup \{0\}$ , где нулевой пункт является базой. Транспортное средство (ТС) вместимости  $S$  должно объехать все пункты по циклу таким образом, чтобы доставить грузы из  $i$ -го пункта в  $(n+i)$ -й при всех  $i$ . Маршрут должен начинаться и заканчиваться в базовом пункте. Известны расстояния между всеми парами пунктов  $c_{ij}$ . Требуется найти допустимый цикл минимальной длины. Разумеется, задача относится к классу NP-трудных, поскольку в случае, когда пункты каждой пары совпадают и вместимость ТС большая, получим классическую задачу коммивояжера.

Сформулируем несколько свойств данной задачи.

Минимально допустимая вместимость ТС равна  $\max\{q_i\}$ . Действительно, очевидно, что при  $S < \max\{q_i\}$  организовать перевозку невозможно. При  $S = \max\{q_i\}$  допустимым, например, является маршрут  $0-1-(n+1)-2-(n+2)-\dots-n-2n-0$ . Тем самым, эта задача существенно отличается от более общей задачи транспортировки однородного груза, для которой задача вычисления минимально допустимой вместимости ТС является NP-трудной.

При неограниченной вместимости ТС число допустимых маршрутов равно  $(2n)!/2^n$ . Действительно, всего перестановок пунктов  $(2n)!$ , при этом, каждая из допустимых перестановок порождает  $2^n$  перестановок, полученных всевозможными перестановками пар пунктов с номерами  $i, (n+i)$  при  $i = 1, 2, \dots, n$ . Этот результат получен в [8] более сложным рассуждением.

При  $S \geq \max\{q_i\}$  любой допустимый отрезок маршрута можно продолжить. Действительно, если после прохождения отрезка ТС не содержит груза и при этом есть необслуженные пункты, то в качестве следующего можно принять любой пункт, в котором есть груз. Если в ТС груз есть, то при некотором  $i$  груз в  $i$ -м пункте забрали, но в  $(n+i)$ -й не доставили. Следующим пунктом маршрута можно принять  $(n+i)$ -й.

В качестве переменных примем булевы величины  $x_{ip}$  ( $i, p = 0, 1, \dots, 2n$ ), равные 1, если  $i$ -м в цикле проходится  $p$ -й пункт (величины  $x_{ip}$  образуют матрицу перестановки). Ограничения имеют вид:

$$\sum_{i=0}^{2n} x_{ip} = 1 \quad (p = 0, \dots, 2n), \quad (1)$$

$$\sum_{p=0}^{2n} x_{ip} = 1 \quad (i = 0, \dots, 2n), \quad (2)$$

$$x_{00} = 1, \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{2n} i(x_{i(p+n)} - x_{ip}) \geq 1 \quad (p = 1, \dots, 2n). \quad (4)$$

Условие (4) задает правильность последовательности прохождения пунктов.

Действительно, из условия (2) следует, что при некоторых однозначно определенных  $i', i''$  справедливы равенства  $x_{i'(n+p)} = x_{i'p} = 1$ . Тогда из условия (4) следует, что  $i'' - i' \geq 1$ . Поскольку  $i', i''$  это номера пунктов  $p, (n+p)$  в порядке прохождения в цикле, то нужное свойство выполняется.

$$\sum_{i=1}^r \sum_{p=1}^{2n} q_p x_{ip} \leq S \quad (r = 1, \dots, 2n - 1). \quad (5)$$

Условие (5) отражает ограничение на вместимость ТС.

Целевая функция:

$$\sum_{p=1}^{2n} \sum_{r=0}^{2n} \sum_{i=1}^{2n-1} x_{ip} x_{(i+1)r} c_{pr} + \sum_{i=n+1}^{2n} x_{(2n)i} c_{i0} \rightarrow \min. \quad (6)$$

В задаче (1)–(6)  $O(n^2)$  булевых переменных и  $O(n)$  ограничений.

### Линейная задача 1

Введением дополнительных булевых переменных в целевой функции (6) можно избавиться от нелинейности.

Пусть  $y_{ipr} = x_{ip} x_{(i+1)r}$  ( $i = 0, 1, \dots, 2n-1$ ,  $p, r = 0, 1, \dots, 2n$ ). Легко проверить, что эти величины можно задать линейными условиями

$$y_{ipr} \geq x_{ip} + x_{(i+1)r} - 1, \quad (7)$$

$$x_{ip} + x_{(i+1)r} - 2y_{ipr} \geq 0. \quad (8)$$

Целевая функция примет вид

$$\sum_{p=1}^{2n} \sum_{r=0}^{2n} \sum_{i=1}^{2n-1} y_{ipr} c_{pr} + \sum_{i=n+1}^{2n} x_{(2n)i} c_{i0} \rightarrow \min. \quad (9)$$

В линейной булевой задаче (1)–(5), (7)–(9) число переменных и число ограничений имеют порядок  $O(n^3)$ .

### Линейная задача 2

С помощью преобразования, предложенного в [9], можно уменьшить число переменных, причем часть из них рассматривать как непрерывные.

Введем вещественные переменные  $z_{ip} = x_{ip} \sum_{r=0}^{2n-1} x_{(i+1)r} c_{pr}$ . Целевая функция (6) примет линейную форму

$$\sum_{p=1}^{2n} \sum_{i=1}^{2n-1} z_{ip} + \sum_{i=n+1}^{2n} x_{(2n)i} c_{i0} \rightarrow \min. \quad (10)$$

Пусть  $Q = \min \left\{ \sum_{j=0}^{2n} \max_i (c_{ij}), \sum_{i=0}^{2n} \max_j (c_{ij}) \right\}$ . Величина  $Q$  определяется только матрицей расстояний, причем при любых допустимых значениях переменных  $x$  и любых  $i, p$  справедливы оценки  $0 \leq \sum_{r=0}^{2n} x_{(i+1)r} c_{pr} \leq Q$ .

Легко проверить, что связь переменных  $x$  и  $z$  задается неравенствами

$$0 \leq z_{ip} \leq Q x_{ip}, \quad (11)$$

$$\sum_{r=0}^{2n} x_{(i+1)r} c_{pr} - Q(1 - x_{ip}) \leq z_{ip} \leq \sum_{r=0}^{2n} x_{(i+1)r} c_{pr}. \quad (12)$$

В задаче (1)–(5), (9)–(12) число булевых переменных, вещественных переменных, ограничений имеют порядок  $O(n^2)$ .

### Линейная задача 3

Здесь описано преобразование, которое позволяет снять условие целочисленности с основных переменных  $x_{ip}$  за счет введения существенно меньшего числа булевых переменных. Пусть

$$A_s = \left\{ i \in \{0, 1, \dots, 2n\} : \text{mod}_2 \left[ \frac{i}{2^s} \right] = 0 \right\} \quad (s = 0, 1, \dots, \lceil \log_2(2n+1) \rceil).$$

Иными словами,  $A_s$  состоит из тех чисел, в двоичном разложении которых на  $s$ -м месте расположен 0.

Введем переменные  $u_{sp} = \sum_{i \in A_s} x_{ip}$  ( $s = 0, 1, \dots, \log_2(2n+1)$ ).

Полагаем

$$x_{ip} \in [0, 1]. \quad (13)$$

Проверим, что при выполнении условий (1), (13) и булевости переменных  $u_{sp}$ , переменные  $x_{ip}$  – булевы.

Пусть напротив  $x_{ip} \in (0, 1)$  при некоторых  $i, p$ . В силу условия (1) существует еще один индекс  $j \neq i$ , при котором  $x_{jp} \in (0, 1)$ . Существует такое значение  $s$ , для которого на  $s$ -й позиции в разло-

## Математика

жениях чисел  $i$  и  $j$  расположены разные символы. Пусть для определенности  $i \in A_s, j \notin A_s$ . Но  $1 = \sum_{i=0}^{2n} x_{ip} = \sum_{i \in A_s} x_{ip} + \sum_{i \notin A_s} x_{ip} = u_{sp} + \sum_{i \notin A_s} x_{ip}$ .

В силу выбора  $s$  оба слагаемых в правой части положительные, т.е. значение  $u_{sp}$  не может быть булевым. Противоречие.

Применяя конструкцию из предыдущего пункта, получим смешанную задачу, в которой число булевых переменных равно  $O(n \log(2n))$ , непрерывных переменных и ограничений  $O(n^2)$ .

### Линейная задача 4

К квадратичной модели можно применить линеаризацию иного типа. Пусть  $A_i$  – порядковый номер  $i$ -го пункта в порядке прохождения от базы, т.е. решение уравнения  $x_{ki} = 1$  относительно  $k$ .

Справедливо равенство  $\sum_{s=0}^{2n} \sum_{k=1}^s x_{ki} = 2n - A_i + 1$ , поскольку  $\sum_{k=1}^s x_{ki} = 0$  при  $s < A_i$  и  $\sum_{k=1}^s x_{ki} = 1$  при  $s \geq A_i$ .

Через величины  $A_i$  ограничения записываются следующим образом:

правильность порядка прохождения пунктов  $A_i < A_{n+i}$  ( $i = 1, \dots, n$ );

ограничения на вместимость:  $\sum_{i=1}^{2n} q_i [A_i \leq k] \leq S$  ( $k = 1, \dots, 2n - 1$ ).

Целевая функция:  $\sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} c_{ij} [A_i + 1 = A_j] + \sum_{i=n+1}^{2n} c_{i0} [A_i = 2n] \rightarrow \min$ .

### Линейная задача 5

Двухиндексная формализация является наиболее распространенной. Пусть  $t_{ij}$  – булевы переменные, равные 1, если в цикле дуга из  $i$ -го пункта ведет в  $j$ -й.

Ограничения:

$$\sum_{i=0}^{2n} t_{ij} = 1 \quad (j = 0, 1, \dots, 2n), \quad (14)$$

$$\sum_{j=0}^{2n} t_{ij} = 1 \quad (i = 0, 1, \dots, 2n), \quad (15)$$

$$t_{ii} = 0 \quad (i = 0, \dots, 2n). \quad (16)$$

Эти условия означают, что ТС из каждого пункта выезжает, в каждый пункт въезжает. При выполнении условий (14)–(16) цикл может разбиваться на подциклы, состоящие более, чем из одного пункта. Для того, чтобы этого избежать, следуя [10], введем вещественные переменные  $A_i$ , удовлетворяющие ограничениям:

$$0 \leq A_i \leq 2n \quad (i = 0, \dots, 2n), A_0 = 0, \quad (17)$$

$$A_i - A_j + (2n+1) t_{ij} \leq 2n \quad (i, j = 0, \dots, 2n). \quad (18)$$

Из условий (14)–(18) следует, что величины  $A_i$  автоматически целые, равные, как и в предыдущей модели, номерам пунктов в порядке прохождения в цикле. Правильность последовательности прохождения пунктов приобретает простую форму и ограничения на вместимость имеют тот же вид, что и в выше.

Целевая функция:  $\sum_{i=0}^{2n} \sum_{j=0}^{2n} c_{ij} t_{ij} \rightarrow \min$ .

В этой модели число булевых переменных и ограничений имеет порядок  $O(n^2)$ , вещественных  $O(n)$ .

### Линейная задача 6

Введение иных вспомогательных переменных позволяет модифицировать линейную модель 5.

Пусть  $t_{ij}$  – те же переменные, что и в предыдущей модели, удовлетворяющие условиям (14)–(16). Введем двумерный аналог  $(\alpha_i, \beta_i)$  потенциалов пунктов, исследованных, в частности, в [11]. Смысл вспомогательных вещественных переменных – вес груза, который погрузили (соответственно разгрузили) до посещения  $i$ -го пункта, включая  $i$ -й. Как обычно,  $a^+ = (|a|+a)/2$ ,  $a^- = (|a|-a)/2$  – соответственно положительная и отрицательная части числа. Пусть числа  $\alpha_i, \beta_i$  удовлетворяют следующим условиям:

$$\alpha_j \geq t_{ij}(\alpha_i + q_j^+) \quad (i = 0, \dots, 2n; j = 1, \dots, 2n), \quad (19)$$

$$\alpha_j \leq R \quad (j = 0, \dots, 2n), \quad (20)$$

$$\beta_j \geq t_{ij}(\beta_i + q_j^-) \quad (i = 0, \dots, 2n; j = 1, \dots, 2n), \quad (21)$$

$$\beta_j \leq R \quad (j = 0, \dots, 2n), \quad (22)$$

$$\alpha_0 = \beta_0 = 0. \quad (23)$$

Здесь  $R = \sum_{i=0}^{2n} q_i^+ = \sum_{i=0}^{2n} q_i^-$ . Из условий (19), (21) следует, что в построенном маршруте нет циклов. Действительно,  $q_j^+ + q_j^- = |q_j| > 0$ , т.е. при  $t_{ij} = 1$  выполняется неравенство  $\alpha_j + \beta_j > \alpha_i + \beta_i$ , что и требовалось. Отсюда и из условий (14), (15) маршрут является цепью, содержащей все пункты; поскольку  $\alpha_j + \beta_j \geq 0$  в силу условий (19), (21), то из (23) следует, что начальный пункт цепи является базой (это следует также из того, что в неравенствах (19), (21) нет ограничений на дугу, конечным пунктом которого является база). Пусть маршрут (незамкнутый) имеет вид  $0-i_1-i_2-\dots-i_{2n}$ .

$$\text{Докажем, что } \alpha_{i_k} = \sum_{j=1}^k q_{i_j}^+, \quad \beta_{i_k} = \sum_{j=1}^k q_{i_j}^- \quad (k=1, \dots, 2n).$$

Для этого просуммируем неравенства (19). Получим  $\alpha_{i_{2n}} \geq \alpha_0 + \sum_{j=1}^{2n} q_{i_j}^+ = R$ , тем самым, с учетом (20) и (23) неравенства (19) при  $t_{ij} = 1$  фактически являются равенствами, что и требовалось. Утверждение для  $\beta$  аналогично вытекает из (21)–(23).

Нелинейные условия (19), (21) можно привести к линейной форме с помощью приема, аналогичного (11), (12).

Условие правильности прохождения пунктов и ограничения на вместимость имеют простой вид:  $\alpha_i + \beta_i \leq \alpha_{(i+n)} + \beta_{(i+n)}$  ( $i = 1, \dots, n$ );  $\alpha_i - \beta_i \leq S$  ( $i = 1, \dots, 2n$ ). Целевая функция та же, что и в модели 5.

### Линейная задача 7

Применим трехиндексные переменные, использование которых позволяет получить линейную булеву задачу, причем в этом случае для исключения «коротких» циклов не требуется введения дополнительных переменных. Эта формализация оказалась наиболее эффективной среди нескольких альтернативных при решении задачи доставки однородного груза типа «many-to-many».

Пусть  $v_{ij}^k$  ( $i, j = 0, \dots, 2n; k = 1, \dots, 2n+1$ ) – булевы переменные, равные 1, если  $k$ -я по порядку дуга в маршруте ведет из  $i$ -го пункта в  $j$ -й. Эта модель является детализацией линейных моделей 1 и 6. Действительно,  $\sum_{i=0}^{2n} v_{ij}^k = x_{kj}$ ,  $\sum_{k=1}^{2n} v_{ij}^k = t_{ij}$ .

Ограничения

$$\sum_{i=0}^{2n} \sum_{k=1}^{2n+1} v_{ij}^k = 1 \quad (j = 0, \dots, 2n); \quad (24)$$

$$\sum_{j=0}^{2n} \sum_{k=1}^{2n+1} v_{ij}^k = 1 \quad (i = 0, \dots, 2n); \quad (25)$$

$$\sum_{i=0}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} v_{ij}^k = 1 \quad (k = 1, \dots, 2n+1) \quad (26)$$

означают, что ТС из каждого пункта выезжает и в каждый въезжает по одному разу, а также, что каждая дуга инцидентна единственной паре пунктов.

Условия

$$\sum_{j=0}^n v_{0j}^1 = 1, \quad \sum_{i=n+1}^{2n} v_{i0}^{2n+1} = 1 \quad (27)$$

означают, что первая дуга ведет из базы в какой-нибудь пункт производства, а последняя по порядку – из какого-нибудь пункта потребления в базу.

Условие последовательного прохождения дуг (конец  $k$ -й дуги совпадает с началом  $(k+1)$ -й) имеет вид:

$$\sum_{i=0}^{2n} v_{ij}^k = \sum_{s=0}^{2n} v_{js}^{k+1} \quad (j = 1, \dots, 2n; k = 1, \dots, 2n). \quad (28)$$

Условия (24)–(28) определяют гамильтонов цикл, в котором последовательные дуги имеют соответствующие номера [12].

Докажем, что условия правильности последовательности прохождения пунктов в рассматриваемых переменных можно записать в следующей форме:

$$\sum_{s=1}^{2n} \sum_{k \leq s} \sum_{p=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} (v_{(n+i)j}^k - v_{ip}^k) \leq 0 \quad (i=1, \dots, n). \quad (29)$$

Действительно, если из  $i$ -го пункта ТС выезжает по дуге с номером  $k_1$ , а из  $(n+i)$ -го – по дуге с номером  $k_2$ , то  $\sum_{p=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} (v_{(n+i)p}^k - v_{ij}^k) = 0$  при  $k \leq \min\{k_1, k_2\}$ , поскольку в этом случае  $v_{(n+i)p}^k = v_{ij}^k = 0$  при любых  $p, j$ , т.е.  $\sum_{k \leq s} \sum_{p=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} (v_{(n+i)j}^k - v_{ip}^k) = 0$ , если  $s \leq \min\{k_1, k_2\}$ . Это же равенство справедливо при  $s \geq \max\{k_1, k_2\}$ , поскольку в этом случае  $v_{(n+i)p}^{k_1} = v_{ij}^{k_2} = 1$  при некоторых однозначно определенных  $p, j, k_1, k_2$  и  $v_{(n+i)p}^{k_1} = v_{ij}^{k_2} = 0$  при всех остальных  $p, j, k$ . Если  $k_1 < k_2$ , то  $v_{ip}^{k_1} = 1$  при некотором  $p$  и  $v_{ip}^k = 0$  при остальных  $p$ ,  $v_{(n+i)p}^k = 0$  для всех  $p$ , т.е. неравенство (29) выполняется. Аналогично проверяется, что при  $k_2 < k_1$  неравенство (29) не выполняется.

Ограничение на вместимость:

$$\sum_{k \leq s} \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} v_{ij}^k q_i \leq S \quad (s=1, \dots, 2n). \quad (30)$$

Целевая функция:

$$\sum_{k=1}^{2n+1} \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} v_{ij}^k c_{ij} \rightarrow \min. \quad (31)$$

Число булевых переменных и ограничений задачи (24)–(31) имеют порядок  $O(n^3)$ .

## Линейная задача 8

В предыдущих моделях используются разреженные структуры данных. Данные можно уплотнить, используя в качестве основных целочисленные переменные  $A_i$ , введенные в модели 4. Ограничения:

$$0 \leq A_i \leq 2n \quad (i=0, \dots, 2n); A_0 = 0.$$

Отсутствие подциклов равносильно биективности отображения  $A$ . Поскольку число элементов в обоих множествах равно  $2n+1$ , то биективность равносильна инъективности, которую можно задать условиями  $[A_i = A_j] = 0 \quad (i, j=0, \dots, 2n, i < j)$ . Ограничения на правильность последовательности прохождения пунктов и на вместимость, а также целевая функция, имеют тот же вид, что и в модели 4.

## Дополнительные ограничения

Избыточные ограничения могут ускорять решение задачи. В [13] сформулирован ряд дополнительных ограничений для случая неориентированного графа и неограниченной вместимости ТС, число которых экспоненциально зависит от числа пунктов. Для рассматриваемого случая целесообразно использовать следующие ограничения.

Для линейных моделей 1–3

$$x_{pi} + x_{(p+1)j} \leq [q_i + q_j \leq S] + 1 \quad (i, j=1, \dots, n, p=1, \dots, 2n-2);$$

$$x_{p(n+i)} + x_{(p+1)(n+j)} \leq [q_i + q_j \leq S] + 1 \quad (i, j=1, \dots, n, p=1, \dots, 2n-2).$$

Обозначение  $[a]$  то же, что и во введении. Эти условия означают, что в двух последовательных пунктах производства (потребления) суммарная загрузка (потребность) не превышает вместимости ТС.

Для линейных моделей 4, 5 соответствующие ограничения формулируются проще:

$$t_{ij} \leq [q_i + q_j \leq S]; t_{(n+i)(n+j)} \leq [q_i + q_j \leq S] \quad (i, j=1, \dots, n).$$

Для линейной модели 6:

$$v_{ij}^k \leq [q_i + q_j \leq S]; v_{(n+i)(n+j)}^k \leq [q_i + q_j \leq S] \quad (i, j=1, \dots, n; k=1, \dots, 2n+1).$$

Аналогичные условия можно сформулировать для цепи, содержащей любое число пунктов производства или потребления.

Сформулируем некоторые дополнительные ограничения, которые являются адаптацией ограничений для близких задач из [12] и являются следствиями правильности последовательности прохождения пунктов.

Дуги, соединяющие пункты  $i - (n + j)$  и  $j - (n + i)$  при различных направлениях движения одновременно, в маршрут перевозок входить не могут, поэтому для линейных моделей 1–3

$$x_{pi} + x_{(p+1)(n+j)} + x_{sj} + x_{(s+1)(n+i)} \leq 3; x_{pi} + x_{(p+1)(n+j)} + x_{s(n+i)} + x_{(s+1)i} \leq 3;$$
$$x_{p(n+i)} + x_{(p+1)j} + x_{s(n+j)} + x_{(s+1)i} \leq 3, (i, j = 1, \dots, n; p, s = 1, \dots, 2n-1).$$

Для моделей 4, 5:

$$t_{i(n+j)} + t_{j(n+i)} \leq 1; t_{i(n+j)} + t_{(n+i)j} \leq 1; t_{(n+i)j} + t_{(n+j)i} \leq 1 (i, j=1, \dots, n).$$

Аналогично формулируются условия для моделей 6.

Аналог этих условий можно сформулировать для большего числа дуг. Например, одновременно не могут входить в маршрут дуги, соединяющие пункты  $i - (n + j)$ ,  $j - (n + p)$ ,  $p - (n + i)$  при различных направлениях движения.

Другой класс условий такого типа. Не существует цепи, соединяющей  $(n + i)$ -й и  $i$ -й пункты. Например, для цепи длины 2 для моделей 4, 5 получаем условие  $t_{(n+i)j} + t_{ji} \leq 1 (i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, 2n)$ .

### Заключение

В работе построен ряд моделей, относящихся к задачам транспортной маршрутизации типа «one-to-one», основанных на различных подходах. Большая часть рассмотренных моделей – линейные булевы или смешанные. Для сравнения вычислительной эффективности моделей был проведен эксперимент с использованием оптимизационного пакета CPLEX 12.6. Рекордной по производительности на случайно сгенерированных данных оказалась линейная смешанная трехиндексная модель.

Установлено, что добавление некоторых дополнительных неравенств существенно повышает эффективность работы метода, в то время, как иные добавленные неравенства снижают эффективность.

В ряде случаев фактором, препятствующим решению задачи большей размерности, явилась ограниченность оперативной памяти.

При некоторых дополнительных ограничениях задача решалась для множеств пунктов, предлагаемых библиотекой [14]. В этом случае при использовании линейной смешанной трехиндексной модели получены решения задач весьма большой размерности (до 391 пары пунктов).

Перспективы применения моделей, предложенных в статье, заключаются в расширении оперативной памяти компьютера и совершенствовании оптимизационного пакета CPLEX. Как отметил К. Archetti (Брешиа, Италия) в докладе на 3 совещании Европейской рабочей группы VeRoLog (Осло, 2014 г) [15], CPLEX 11 (2007) работает почти в 30 000 раз быстрее, чем CPLEX 1 (1991).

### Литература

1. Danzig, G. The Truck Dispatching Problem / G. Danzig, J. Ramser // Management Science. – 1959. – Vol. 6. – Issue 1. – P. 80–91.
2. <http://neo.lcc.uma.es/vrp/>
3. Бронштейн, Е.М. Детерминированные оптимизационные задачи транспортной логистики / Е.М. Бронштейн, Т.А. Заико // Автоматика и телемеханика. – 2010. – № 10. – С. 133–147.
4. Furtadoa, M. Pickup and delivery problem with time windows: a new compact two-index formulation / M. Furtadoa, P. Munaria, R. Morabito // Technical Report. Production Engineering Department, Federal University of São Carlos, Rod. Washington Luís, km 235 – SP-310, São Carlos – SP – CEP: 13565-905 – Brazil, July, 2015. [www.optimization-online.org/DB\\_HTML/2015/07/5022.html](http://www.optimization-online.org/DB_HTML/2015/07/5022.html)
5. Burkard, R.E. The quadratic assignment problem / R.E. Burkard, E. Cela, P.M. Pardalos, L.S. Pitsoulis // Handbook of Combinatorial Optimization: сб. науч. тр. – Springer US, 1999. – P. 1713–1809.
6. Glover, F. Improved linear integer programming formulations of nonlinear integer problems / F. Glover // Management Science. – 1975. – Vol. 22. – P. 455–460.
7. Lawler, E.L. The quadratic assignment problem / E.L. Lawler // Management Science. – 1963. – Vol. 9. – P. 586–599.

8. Ruland, K.S. The pickup and delivery problem: Faces and branch-and-cut algorithm / K.S. Ruland, E.Y. Rodin // *Computers & mathematics with applications*. – 1997. – Vol. 33, no. 12. – P. 1–13.
9. Kaufmann, L. An algorithm for the quadratic assignment problem using Benders' decomposition / L. Kaufmann, F. Broeckx // *European Journal of Operational Research*. – 1978. – no. 2. – P. 204–211.
10. Miller, C. Integer programming formulations and travelling salesman problems / C. Miller, A. Tucker, R. Zemlin // *J. A.C.M.* – 1960. – Vol. 7, no. 4. – P. 326–329.
11. Desrochers, M. Improvements and extensions to the Miller–Tucker–Zemlin subtour elimination constraints / M. Desrochers, G. Laporte // *Operations Research Letters*. – 1991. – Vol. 10. – Issue 1. – P. 27–36.
12. Cordeau, J.-F. Recent models and algorithms for one-to-one pickup and delivery problems / J.-F. Cordeau, G. Laporte, S. Ropke // *The Vehicle Routing Problem, Latest Advances and Challenges* B.L. Golden, S. Raghavan, and E.A. Wasil (Eds). – Boston, Springer, 2007. – P. 327–357.
13. <http://www.sintef.no/contentassets/cfb19ab9b7c74>
14. <http://www.iwr.uni-heidelberg.de/groups/comopt/software/TSPLIB95/tsp/>

*Поступила в редакцию 16 сентября 2016 г.*

---

*Bulletin of the South Ural State University  
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"  
2017, vol. 9, no. 1, pp. 13–21*

---

DOI: 10.14529/mmph170102

## FORMALIZATION OF PICKUP AND DELIVERY PROBLEM

**E.M. Bronshtein<sup>1</sup>, E.V. Gindullina<sup>1</sup>, R.V. Gindullin<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> *Ufa State Aviation Technical University, Ufa, Russian Federation*

<sup>2</sup> *Bashkirian State University, Ufa, Russian Federation*

*E-mail: bro-efim@yandex.ru*

The problems of routing like ONE-TO-ONE or Traveling Salesman Problem with Pickup and Delivery (TSPPD) consist in forming a cycle of the minimal length that guarantees a shipment from manufacturers to customers in case of the shipment from each producer to a specific customer. In particular, the problem occurs in case of delivery of passengers (for example, by a taxi company). Some properties of the set problem are specified. The range of quadratic, integer linear and mixed integer linear formalizations of such problems, in which the number of limitations grows polynomially with the increase in the number of points, is considered. In particular, Boolean elements of a permutation matrix, two-index and three-index variables, which describe a precedence relation, are used as variables. In the context of such formalizations it is possible to use optimization packages. We have conducted the computational experiment with the help of CPLEX 12.6 package. The mixed integer linear three-index model was record-breaking in terms of productivity based on randomly generated data. It's found out that some additional limitations significantly improve the effectiveness of a solution. Meanwhile, the use of some other restrictions negates the effectiveness. In most cases the limitedness of RAM is a factor which hinders the solution of high dimension problems.

In case of some additional restrictions the problem is solved for a set of points, suggested by a library proposed by Heidelberg University (Germany). When using the mixed integer linear model, solutions of extremely high dimension problems are obtained (up to 391 pairs of points). The prospects of applying these models consist in RAM expansion and improvement of CPLEX optimization package. Some scholars note that CPLEX 11 (2007) works 30 000 times faster than CPLEX 1 (1991).

*Keywords: routing; optimization; pickup and delivery problem.*

### References

1. Danzig G., Ramser J. The Truck Dispatching Problem. *Management Science*, 1959, Vol. 6, Issue 1, pp. 80–91. DOI: 10.1287/mnsc.6.1.80
2. <http://neo.lcc.uma.es/vrp/>

3. Bronshtein E.M., Zaiko T.A. Deterministic optimizational problems of transportation logistics. *Automation and Remote Control*, 2010, Vol. 71(10), pp. 2132–2144. DOI: 10.1134/S0005117910100127
4. Furtado M.G.S., Munari P., Morabito R. Pickup and delivery problem with time windows: a new compact two-index formulation. *Technical Report*. Production Engineering Department, Federal University of São Carlos, Rod. Washington Luís, km 235 - SP-310, São Carlos - SP - CEP: 13565-905, Brazil. July, 2015. [www.optimization-online.org/DB\\_HTML/2015/07/5022.html](http://www.optimization-online.org/DB_HTML/2015/07/5022.html)
5. Burkard R.E., Cela E., Pardalos P.M., Pitsoulis L.S. The Quadratic Assignment Problem. *Handbook of Combinatorial Optimization: Vol. 1-3*, Springer US, 1999, pp. 1713–1809. DOI: 10.1007/978-1-4613-0303-9\_27.
6. Glover, F. Improved linear integer programming formulations of nonlinear integer problems. *Management Science*, 1975, Vol. 22, pp. 455–460. DOI: 10.1287/mnsc.22.4.455
7. Lawler E.L. The quadratic assignment problem. *Management Science*, 1963, Vol. 9, pp. 586–599. DOI: 10.1287/mnsc.9.4.586
8. Ruland K.S., Rodin E.Y. The pickup and delivery problem: Faces and branch-and-cut algorithm. *Computers & Mathematics with Applications*, 1997, Vol. 33, no. 12, pp. 1–13. DOI: 10.1016/S0898-1221(97)00090-4
9. Kaufmann L., Broeckx F. An algorithm for the quadratic assignment problem using Benders' decomposition. *European Journal of Operational Research*, 1978, no. 2, pp. 204–211. DOI: 10.1016/0377-2217(78)90095-4
10. Miller C., Tucker A., Zemlin R. Integer Programming Formulation of Traveling Salesman Problems. *J.A.C.M.*, 1960, Vol. 7, no. 4, pp. 326–329. DOI: 10.1145/321043.321046
11. Desrochers M., Laporte G. Improvements and extensions to the Miller–Tucker–Zemlin subtour elimination constraints. *Operations Research Letters*, 1991, Vol. 10, Issue 1, pp. 27–36. DOI: 10.1016/0167-6377(91)90083-2
12. Cordeau J.-F., Laporte G., Ropke S. Recent Models and Algorithms for One-to-One Pickup and Delivery Problems. *The Vehicle Routing Problem: Latest Advances and New Challenges*, 2008, Springer US, pp. 327–357. DOI: 10.1007/978-0-387-77778-8\_15.
13. <http://www.sintef.no/contentassets/cfb19ab9b7c74>
14. <http://www.iwr.uni-heidelberg.de/groups/comopt/software/TSPLIB95/tsp/>

Received September 16, 2016