

ВЫРОЖДЕННЫЕ ПОТОКИ РАЗРЕШАЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

М.А. Сагадеева

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

E-mail: sagadeevama@susu.ru

Исследования стационарных уравнений соболевского типа стали основой для изучения множества различных задач, таких как задачи оптимального управления, системы леонтьевского типа, задачи оптимального измерения и т.д. Нестационарные уравнения соболевского типа изучались лишь фрагментарно. В данной статье обосновываются методы, необходимые для нахождения решений таких уравнений. А именно, исследуются вырожденные потоки разрешающих операторов, с помощью которых показана разрешимость начальных задач для нестационарных уравнений соболевского типа.

Ключевые слова: относительно ограниченный оператор; вырожденная группа операторов; задача Коши; задача Шоултера–Сидорова.

Введение

Пусть X, Y – банаховы пространства. Оператор $L \in L(X; Y)$ (т.е. линейный непрерывный) и оператор $M \in CI(X; Y)$ (т.е. линейный замкнутый, плотно определенный в X). На промежутке $J \subset R$ рассмотрим задачу Коши

$$x(t_0) = x_0 \quad (1)$$

при $t_0 \in J$ для нестационарного уравнения вида

$$L\dot{x} = aMx + g, \quad (2)$$

где $\ker L \neq \{0\}$, а скалярная функция $a: J \rightarrow R_+$ и вектор-функция $g: J \rightarrow Y$ подлежат дальнейшему определению.

При условии $a \equiv \text{const}$ уравнение (2) в силу нетривиальности ядра оператора L относится к стационарным уравнениям соболевского типа [1]. В настоящее время уравнения соболевского типа активно исследуются в различных направлениях, о чем могут свидетельствовать монографии, целиком или частично посвященные их исследованию [1–7]. Результаты этих исследований стали основой для изучения систем леонтьевского типа (см. напр. [8, 9]), задач оптимального управления (см. напр. [5]), на основе которых было предложено задачу восстановления динамически искаженного сигнала [10, 11] рассматривать как задачу оптимального измерения [12, 13]. Более того, стационарные уравнения соболевского типа начали рассматриваться в квазибанаховых пространствах [14–16], а также в пространствах «шумов» [17, 18]. Отметим, также, что основой исследования уравнений соболевского типа стал метод фазового пространства [6, 19].

Нестационарные уравнения соболевского типа исследовались автором довольно фрагментарно (см. напр. [20]). Целью данной работы является полное математическое обоснование методов, необходимых при нахождении решения нестационарных уравнений соболевского типа вида (2) и начальных задач для него.

Статья кроме введения, заключения и списка литературы содержит три части. В первой весьма кратко описывается теория относительно p -ограниченных операторов. Все результаты данной части приведены без доказательства, обосновывается лишь переход от контурного интегрирования к предельным переходам. Далее, во второй (основной) части рассматриваются вырожденные группы и потоки операторов, используя которые в третьей части получены решения начальных задач для нестационарных уравнений соболевского типа. Список литературы не претендует на полноту и отражает лишь вкусы и пристрастия автора.

Автор считает своим приятным долгом выразить искреннюю благодарность своему научному консультанту профессору А.Л. Шестакову за внимание к данной работе, профессору Г.А. Свиридюку за строгую, но конструктивную критику, а также коллектив кафедры уравнений математической физики за плодотворные дискуссии и интерес, проявленный к данной работе.

Относительно p -ограниченные операторы

Следуя [1], множества $\rho^L(M) = \{\mu \in C : (\mu L - M)^{-1} \in L(Y; X)\}$ и $\sigma^L(M) = C \setminus \rho^L(M)$ назовем L -резольвентным множеством и L -спектром оператора M соответственно. В силу результатов [1] множество $\rho^L(M)$ является открытым, а поэтому $\sigma^L(M)$ всегда замкнуто.

L -резольвентное множество оператора M может быть пустым множеством, например, если $\ker L \cap \ker M \neq \{0\}$. Предполагая, что множество $\rho^L(M)$ не пусто, введем в рассмотрение оператор-функции комплексного переменного $(\mu L - M)^{-1}$, $R_\mu^L(M) = (\mu L - M)^{-1}L$ и $L_\mu^L(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ с областью определения $\rho^L(M)$, которые будем называть соответственно L -резольвентой, правой и левой L -резольвентами оператора M . В силу [1], L -резольвента, правая и левая L -резольвенты оператора M голоморфны в $\rho^L(M)$.

Определение 1. Оператор M назовем спектрально ограниченным относительно оператора L (коротко, (L, σ) -ограниченным), если $\exists r \in R_+ \quad \forall \mu \in C \quad (|\mu| > r) \Rightarrow (\mu \in \rho^L(M))$.

Возьмем (L, σ) -ограниченный оператор M , выберем в комплексной плоскости C контур $\gamma = \{\mu \in C : |\mu| = h > r\}$. Тогда имеют смысл такие интегралы, как интегралы от голоморфных оператор-функций комплексного переменного по замкнутому контуру,

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma R_\mu^L(M) d\mu, \quad Q = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma L_\mu^L(M) d\mu. \quad (3)$$

Так как правая $R_\mu^L(M) = (\mu L - M)^{-1}L$ и левая $L_\mu^L(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ L -резольвенты оператора M голоморфны [1], то операторы P и Q не зависят от радиуса h контура γ .

Лемма 1. [1] Пусть $L \in L(X; Y)$, $M \in CI(X; Y)$ и оператор M (L, σ) -ограничен. Тогда операторы $P \in L(X)$ и $Q \in L(Y)$ являются проекторами.

Введем обозначение $X^0 = \ker P$, $X^1 = \text{im } P$, $Y^0 = \ker Q$, $Y^1 = \text{im } Q$; а через L_k (M_k) обозначим сужение оператора L (M) на X^k ($X^k \cap \text{dom } M$), $k = 0, 1$.

Теорема 1 (теорема Г.А. Свиридюка о расщеплении). [1] Пусть операторы $L \in L(X; Y)$ и $M \in CI(X; Y)$, причем оператор M (L, σ) -ограничен. Тогда

- (i) операторы $L_k \in L(X^k; Y^k)$ и $M_k \in CI(X^k; Y^k)$, $k = 0, 1$;
- (ii) существуют операторы $L_1^{-1} \in L(Y^1; X^1)$ и $M_0^{-1} \in L(Y^0; X^0)$.

При условии (L, σ) -ограниченности оператора M , согласно теореме 1, существуют операторы $H = M_0^{-1}L_0 \in L(X^0)$ и $S = L_1^{-1}M_1 \in L(X^1)$, используя которые можно разложить L -резольвенту оператора M в кольце $|\mu| > r$ в ряд Лорана

$$(\mu L - M)^{-1} = - \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k H^k M_0^{-1} (I_Y - Q) + \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{-k} S^{k-1} L_1^{-1} Q.$$

При этом бесконечно удаленная точка является

- (i) устранимой особой точкой, если $H = O$;
- (ii) полюсом порядка $p \in N$, если $H^p \neq O$, а $H^{p+1} = O$;
- (iii) существенно особой точкой, если $H^k \neq O$ для всех $k \in N$.

Бесконечно удаленную точку будем называть полюсом порядка $p \in N_0$ ($\equiv \{0\} \cup N$), если она является устранимой особой точкой ($p = 0$) или полюсом порядка $p \in N$.

Определение 2. Оператор M будем называть (L, p) -ограниченным ($p \in N_0$), если он (L, σ) -ограничен и бесконечность является полюсом порядка $p \in N_0$ для $(\mu L - M)^{-1}$.

Следствие 1. Пусть оператор M (L, p) -ограничен ($p \in N_0$). Тогда

$$P = \lim_{\mu \rightarrow \infty} (\mu R_{\mu}^L(M))^{p+1}, \quad Q = \lim_{\mu \rightarrow \infty} (\mu L_{\mu}^L(M))^{p+1}.$$

Доказательство. Рассмотрим

$$\begin{aligned} P &= \lim_{\mu \rightarrow \infty} (\mu R_{\mu}^L(M))^{p+1} = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \left(\mu (\mu L - M)^{-1} L (P + (I_X - P)) \right)^{p+1} = \\ &= \lim_{\mu \rightarrow \infty} \left(\left(I_X - \frac{1}{\mu} L_1^{-1} M_1 \right)^{-1} P + \left(\mu (\mu H - I_X)^{-1} H \right)^{p+1} (I_X - P) \right) = P + O(I_X - P) = P. \end{aligned}$$

Утверждение относительно проектора Q доказывается аналогично. Следствие доказано.

Вырожденные группы и потоки операторов.

Пусть X, Y – банаховы пространства, операторы $L \in L(X; Y)$ и $M \in CI(X; Y)$.

Определение 3. Однопараметрическое семейство $X(\cdot): R \rightarrow L(X)$ будем называть *вырожденной группой операторов*, если выполнены условия

- (i) $X(0) = P$,
- (ii) $X(t)X(s) = X(t + s)$ для всех $t, s \in R$.

Замечание 1. Если первое условие определения 3 заменить на $X(0) = I_X$, то группа вырожденной не является, и в этом случае ее называют просто группой операторов.

Вырожденная группа операторов называется *аналитической*, если она допускает аналитическое продолжение во всю комплексную плоскость с сохранением свойств (i) и (ii).

Теорема 3. [1] Пусть оператор M (L, σ) -ограничен. Тогда существует аналитическая группа $\{X(t) \in L(X): t \in R\}$ $\{Y(t) \in L(Y): t \in R\}$, причем ее операторы задаются интегралами типа Данфорда–Тейлора по контуру $\gamma = \{\mu \in C: |\mu| = h > r\}$

$$X(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R_{\mu}^L(M) e^{\mu t} d\mu \quad \left(Y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} L_{\mu}^L(M) e^{\mu t} d\mu \right). \quad (4)$$

Замечание 2. Сужение операторов $X(t)|_X = \exp(tS)$, где $S = L_1^{-1} M_1 \in L(X^1)$ из теоремы 1.

Следствие 2. Пусть оператор M (L, p) -ограничен ($p \in N_0$). Тогда операторы группы $\{X(t) \in L(X): t \in R\}$ $\{Y(t) \in L(Y): t \in R\}$ заданы аппроксимациями Хилле–Уиддера–Поста

$$X(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{t} R_{\frac{k}{t}}^L(M) \right)^k \quad \left(Y(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{t} L_{\frac{k}{t}}^L(M) \right)^k \right).$$

Доказательство. Рассмотрим группу $\{X(t) \in L(X): t \in R\}$. В силу теоремы 2 и следствия 1

$$\begin{aligned} X(t) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{t} R_{\frac{k}{t}}^L(M) (P + (I_X - P)) \right)^k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{t} \left(\frac{k}{t} L_1 - M_1 \right)^{-1} L_1 P + \frac{k}{t} \left(\frac{k}{t} L_0 - M_0 \right)^{-1} L_0 (I_X - P) \right)^k = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\left(I_X - \frac{k}{t} L_1^{-1} M_1 \right)^{-k} P + \left(\frac{k}{t} \left(\frac{k}{t} H - I_X \right)^{-1} H \right)^k (I_X - P) \right) = \exp(St)P + O(I_X - P). \end{aligned}$$

Откуда, принимая во внимание замечание 2, получаем утверждение относительно $X(t)$.

Утверждение относительно группы $Y(t)$ доказывается аналогично. Следствие доказано.

Определение 4. Двухпараметрическое семейство $X(\cdot, \cdot): R \times R \rightarrow L(X)$ будем называть *вырожденным потоком операторов*, если выполнены условия

- (i) $X(t, t) = P$, для всех $t \in R$
- (ii) $X(t, \tau)X(\tau, s) = X(t, s)$ для всех $t, \tau, s \in R$.

Замечание 3. Если первое условие определения 4 заменить на $X(t, t) = I_X$, то поток вырожденным не является, и в этом случае его называют просто потоком операторов.

Вырожденный поток операторов называется *аналитическим*, если он допускает аналитическое продолжение во всю комплексную плоскость с сохранением свойств (i) и (ii).

Пусть оператор $M(L, p)$ -ограничен ($p \in N_0$) и функция $a \in C(R; R)$. По аналогии с (4) рассмотрим при $t, s \in R$ выражение

$$X(t, s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R_{\mu}^L(M) \exp\left(\mu \int_s^t a(\zeta) d\zeta\right) d\mu, \quad (5)$$

где контур $\gamma = \{\mu \in C : |\mu| = h > r\}$.

Теорема 4. Пусть оператор $M(L, p)$ -ограничен ($p \in N_0$) и функция $a \in C(R; R)$. Тогда семейство $\{X(t, s) \in L(X) : t, s \in R\}$, операторы которого заданы формулой (5), является вырожденным аналитическим потоком операторов.

Доказательство. Для операторов (5) потока $\{X(t, s) \in L(X) : t, s \in R\}$ очевидно существует аналитическое продолжение.

Покажем, что $X(t, s)$ образуют поток операторов. Свойство (i) из определения 4 следует из способа задания операторов $X(t, s)$. Рассмотрим свойство (ii) из определения 4:

$$\begin{aligned} X(t, \tau)X(\tau, s) &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma} R_{\mu}^L(M) \exp\left(\mu \int_{\tau}^t a(\zeta) d\zeta\right) d\mu \cdot \int_{\gamma'} R_{\lambda}^L(M) \exp\left(\lambda \int_s^{\tau} a(\zeta) d\zeta\right) d\lambda = \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma} \left(\int_{\gamma'} R_{\mu}^L(M) R_{\lambda}^L(M) \exp\left(\lambda \int_s^{\tau} a(\zeta) d\zeta\right) d\lambda \right) \exp\left(\mu \int_{\tau}^t a(\zeta) d\zeta\right) d\mu = \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \left(\int_{\gamma} \int_{\gamma'} \frac{\exp\left(\lambda \int_s^{\tau} a(\zeta) d\zeta\right) d\lambda}{\lambda - \mu} R_{\mu}^L(M) \exp\left(\mu \int_{\tau}^t a(\zeta) d\zeta\right) d\mu + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\gamma'} R_{\lambda}^L(M) \exp\left(\lambda \int_s^{\tau} a(\zeta) d\zeta\right) \int_{\gamma} \frac{\exp\left(\mu \int_{\tau}^t a(\zeta) d\zeta\right) d\mu}{\mu - \lambda} d\lambda \right), \end{aligned}$$

где точка $\mu \in \gamma$ лежит внутри области, ограниченной контуром γ' , а точка $\lambda \in \gamma'$ находится вне области, ограниченной контуром γ . Тогда в силу теоремы о вычетах, учитывая последнее выражение, получим

$$\begin{aligned} X(t, \tau)X(\tau, s) &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma} R_{\mu}^L(M) \exp\left(\mu \int_{\tau}^t a(\zeta) d\zeta\right) d\mu \cdot \int_{\gamma'} R_{\lambda}^L(M) \exp\left(\lambda \int_s^{\tau} a(\zeta) d\zeta\right) d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R_{\mu}^L(M) \exp\left(\mu \left(\int_{\tau}^t a(\zeta) d\zeta + \int_s^{\tau} a(\zeta) d\zeta\right)\right) d\mu = X(t, s). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Замечание 4. В силу теоремы 1 сужение операторов потока $X(t, s)|_X = \exp\left(S \int_s^t a(\zeta) d\zeta\right)$, где оператор $S = L_1^{-1} M_1 \in L(X^1)$.

Замечание 5. В пространстве $L(Y)$ по аналогии с (5) также можно задать поток операторов следующей формулой

$$Y(t, s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} L_{\mu}^L(M) \exp\left(\mu \int_s^t a(\zeta) d\zeta\right) d\mu. \quad (6)$$

Доказательство свойств такого потока аналогично доказательству теоремы 4.

Следствие 3. Пусть оператор M (L, p) -ограничен ($p \in N_0$) и функция $a \in C(R; R_+)$. Тогда операторы потоков $\{X(t, s) \in L(X) : t, s \in R\}$ и $\{Y(t, s) \in L(Y) : t, s \in R\}$ задаются с помощью аппроксимаций Хилле–Уиддера–Поста

$$X(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\left(L - \frac{1}{k} M \int_s^t a(\zeta) d\zeta \right)^{-1} L \right)^k \quad \text{и} \quad Y(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(L \left(L - \frac{1}{k} M \int_s^t a(\zeta) d\zeta \right)^{-1} \right)^k. \quad (7)$$

Начальные задачи для нестационарных уравнений соболевского типа.

Пусть X, Y – банаховы пространства, операторы $L \in L(X; Y)$ и $M \in CI(X; Y)$. Рассмотрим задачу Коши

$$x(t_0) = x_0 \quad (8)$$

для однородного нестационарного уравнения вида

$$L\dot{x} = aMx, \quad (9)$$

где функция $a : R \rightarrow R_+$ подлежит дальнейшему определению.

Определение 5. Вектор-функция $x \in C^1(R; X)$ называется (классическим) решением (9), если подстановка этой вектор-функции в уравнение (9) делает его верным тождеством. Решение $x = x(t)$ уравнения (9) будем называть решением задачи Коши (8) для уравнения (9) (коротко, задачи (8), (9)), если оно удовлетворяет условию Коши (3) при некотором $x_0 \in X$.

Замкнутое множество $\mathcal{D} \subset X$ назовем фазовым пространством уравнения (9), если

- (i) любое решение $x = x(t)$ лежит в \mathcal{D} поточечно (т.е. $x(t) \in \mathcal{D}$ при всех $t \in R$),
- (ii) при любом $x_0 \in \mathcal{D}$ существует единственное решение задачи Коши (8), (9).

Вместе с уравнением (9) будем рассматривать эквивалентное ему при $v \in \rho^L(M)$ уравнение

$$L(vL - M)^{-1} \dot{y} = aM(vL - M)^{-1} y. \quad (10)$$

Теорема 5. Пусть оператор M (L, p) -ограничен ($p \in N_0$) и функция $a \in C(R; R_+)$. Тогда фазовым пространством уравнения (9) ((10)) является множество $X^1(Y^1)$.

Доказательство. В силу теоремы 1 уравнение (9) эквивалентно системе

$$H\dot{x}^0 = ax^0, \quad \dot{x}^1 = Sx^1.$$

Выразим x^0 из первого уравнения этой системы и получим $x^0 = \frac{1}{a} H\dot{x}^0$. Продифференцируем это выражение и применим оператор $\frac{1}{a} H$, в силу уравнения получим

$$\frac{1}{a} H\dot{x}^0 = \frac{1}{a} H \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{a} H\dot{x}^0 \right) = H^2 \frac{1}{a} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{a} \dot{x}^0 \right) = \dot{x}^0$$

и так далее. На шаге с номером p получим $\frac{1}{a} H\dot{x}^0 = H^{p+1} \left(\frac{1}{a} \frac{d}{dt} \right)^p \left(\frac{1}{a} \dot{x}^0 \right) = \dot{x}^0$.

Откуда в силу нильпотентности оператора H , получим, что $x^0 = 0$.

Перейдем к рассмотрению второго уравнения системы. В силу [21] решение этого уравнения имеет вид $x^1(t) = \exp \left(S \int_{t_0}^t a(\zeta) d\zeta \right) x_0$, где $S = L_1^{-1} M_1 \in L(X^1)$. Откуда при $x_0 \in X^1$, в силу замечания 4, решение имеет вид $x(t) = X(t, t_0)x_0$. Теорема доказана.

Определение 7. Поток операторов $X(\cdot, \cdot) : R \times R \rightarrow L(X)$ называется потоком разрешающих операторов (или просто разрешающим потоком) уравнения (9), если для любого $x_0 \in X$ вектор-функция $x(t) = X(t, t_0)x_0$ является решением уравнения (9) в смысле определения 5.

Перейдем к рассмотрению задачи Шоуолтера–Сидорова

$$P(x(t_0) - x_0) = 0 \quad (11)$$

для неоднородного уравнения

$$L\dot{x} = aMx + g \quad (12)$$

с функцией $g : [t_0, T) \rightarrow Y$. В дальнейшем будем использовать обозначение $g^0 = (I_Y - Q)g$.

Определение 8. Вектор-функция $x \in C^1([t_0, T); X)$ называется (классическим) решением (12), если подстановка этой вектор-функции в уравнение (12) делает его верным тождеством при некоторой вектор-функции $g : [t_0, T) \rightarrow Y$. Решение $x = x(t)$ уравнения (12) будем называть решением задачи Шоултера–Сидорова (11) для уравнения (12) (коротко, задачи (11), (12)), если оно удовлетворяет условию (11) при некотором $x_0 \in X$.

Теорема 6. Пусть оператор M (L, p) -ограничен ($p \in N_0$) и функция $a \in C^{p+1}([t_0, T); \mathbb{R}_+)$. Тогда для любой вектор-функции $g : [t_0, T) \rightarrow Y$ такой, что $Qg \in C^1([t_0, T); Y^1)$ и $g^0 \in C^{p+1}([t_0, T); Y^0)$, и для любого начального значения $x_0 \in X$ существует единственное решение $x \in C^1([t_0, T); X)$ задачи Шоултера–Сидорова (11), (12), которое имеет вид

$$x(t) = X(t, t_0)x_0 + \int_0^t X(t, s)L_1^{-1}Qg(s)ds - \sum_{k=0}^p H^k M_0^{-1} \left(\frac{1}{a(t)} \frac{d}{dt} \right)^k \frac{g^0(t)}{a(t)}. \quad (13)$$

Если дополнительно выполнено условие согласования

$$(I_X - P)x_0 = - \sum_{k=0}^p H^k M_0^{-1} \left(\frac{1}{a(t_0)} \frac{d}{dt} \right)^k \frac{g^0(t_0)}{a(t_0)},$$

то функция (13) является единственным решением задачи Коши (9) для уравнения (12).

Доказательство. В силу теоремы 1 задача (11), (12) эквивалентна системе задач

$$\dot{x}^1 = aL_1^{-1}M_1x^1 + L_1^{-1}Qg, \quad x^1(t_0) = Px_0, \quad (14)$$

$$H\dot{x}^0 = ax^1 + M_0^{-1}g^0, \quad x^0(t_0) - \text{любое} \quad (15)$$

на подпространствах X^1 и X^0 соответственно.

Уравнение в задаче (14) не является вырожденным, а, следовательно, решение задачи (14), в силу результатов [21], имеет вид $x^1(t) = X(t, t_0)x_0 + \int_0^t X(t, s)L_1^{-1}Qg(s)ds$.

Перейдем к задаче (15). Выразим x^0 из уравнения задачи (15) и получим

$$x^0 = \frac{1}{a} Hx^0 - M_0^{-1} \frac{g^0}{a}.$$

Продифференцируем это выражение, и применим оператор $\frac{1}{a}H$, в силу уравнения получим

$$\dot{x}^0(t) + M_0^{-1} \frac{g^0(t)}{a(t)} = H^2 \frac{1}{a(t)} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}^0(t)}{a(t)} \right) - HM_0^{-1} \frac{1}{a} \frac{d}{dt} \left(\frac{g^0(t)}{a(t)} \right).$$

Далее снова выразим x^0 , продифференцируем это выражение, применим оператор $\frac{1}{a}H$, и так далее. На шаге с номером p получим

$$\dot{x}^0(t) = H^{p+1} \left(\frac{1}{a(t)} \frac{d}{dt} \right)^p \left(\frac{\dot{x}^0(t)}{a(t)} \right) - \sum_{k=0}^p H^k M_0^{-1} \left(\frac{1}{a} \frac{d}{dt} \right)^k \left(\frac{g^0(t)}{a(t)} \right),$$

откуда в силу нильпотентности оператора H , получим часть решения на X^0 в виде:

$$x^0(t) = - \sum_{k=0}^p H^k M_0^{-1} \left(\frac{1}{a} \frac{d}{dt} \right)^k \left(\frac{g^0(t)}{a(t)} \right).$$

Откуда получаем вид (13) для решения задачи Шоултера–Сидорова (11), (12).

Ясно, что если в начальный момент времени выполнено равенство

$$x^0(t_0) = (I_X - P)x_0 = - \sum_{k=0}^p H^k M_0^{-1} \left(\frac{1}{a(t_0)} \frac{d}{dt} \right)^k \frac{g^0(t_0)}{a(t_0)},$$

то есть выполнено условие согласования, то функция (13) будет являться единственным решением задачи Коши (9) для уравнения (12). Теорема доказана.

Заключение. В дальнейшем планируется применить все полученные результаты для исследования задачи оптимального измерения в нестационарном случае. Такое измерение модели оптимального измерения позволяет учитывать, например, снижение чувствительности измерительного устройства [20].

Литература

1. Sviridyuk, G.A. *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operator* / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht, Boston: VSP, 2003. – 216 p.
2. Демиденко, Г.В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной / Г.В. Демиденко, С.В. Успенский. – Новосибирск: Изд-во Научная книга, 1998. – 438 с.
3. *Lyapunov–Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications* / N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinithyn, M. Falaleev. – Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 2002. – 548 p.
4. Замышляева, А.А. Линейные уравнения соболевского типа высокого порядка / А.А. Замышляева. – Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2012. – 107 с.
5. Манакова, Н.А. Задачи оптимального управления для полулинейных уравнений соболевского типа / Н.А. Манакова. – Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2012. – 88 с.
6. Матвеева, О.П. Математические модели вязкоупругих несжимаемых жидкостей ненулевого порядка / О.П. Матвеева, Т.Г. Сукачева. – Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2014. – 101 с.
7. Загребина, С.А. Устойчивые и неустойчивые многообразия решений полулинейных уравнений соболевского типа / С.А. Загребина, М.А. Сагадеева. – Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2016. – 121 с.
8. Келлер, А.В. Численное решение задачи оптимального управления вырожденной линейной системой уравнений с начальными условиями Шоултера–Сидорова / А.В. Келлер // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2008. – № 27(127). – С. 50–56.
9. Келлер, А.В. Численное исследование задач оптимального управления для моделей леонтьевского типа: дис. ... д-ра. физ.-мат. наук / А.В. Келлер. – Челябинск, 2011. – 237 с.
10. Грановский, В.А. Динамические измерения. Основы метрологического обеспечения / В.А. Грановский. – Л.: Энергоатомиздат, 1984. – 224 с.
11. Шестаков, А.Л. Методы теории автоматического управления в динамических измерениях / А.Л. Шестаков. – Челябинск, 2013. – 257 с.
12. Шестаков, А.Л. Новый подход к измерению динамически искаженных сигналов / А.Л. Шестаков, Г.А. Свиридюк // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2010. – № 16(192). – С. 116–120.
13. Shestakov, A.L. *Theory of Optimal Measurements* / A.L. Shestakov, G.A. Sviridyuk, A.V. Keller // *Journal of Computational and Engineering Mathematics*. – 2014. – Vol. 1, no. 1. – P. 3–15.
14. Келлер, А.В. Голоморфные вырожденные группы операторов в квазибанаховых пространствах / А.В. Келлер, Дж.К. Аль-Делфи // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2015. – Т. 7, № 1. – С. 20–27.
15. Замышляева, А.А. О некоторых свойствах решений одного класса эволюционных математических моделей соболевского типа в квазисоболевых пространствах / А.А. Замышляева, Дж. К.Т. Аль-Исави // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2015. – Т. 8, № 4. – С. 113–119.
16. Сагадеева, М.А. Ограниченные решения модели Баренблатта–Желтова–Кочиной в квазисоболевых пространствах / М.А. Сагадеева, Ф.Л. Хасан // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2015. – Т. 8, № 4. – С. 138–144.
17. Свиридюк, Г.А. Динамические модели соболевского типа с условием Шоултера–Сидорова и аддитивными «шумами» / Г.А. Свиридюк, Н.А. Манакова. – Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2014. – Т. 7, № 1. – С. 90–103.
18. Favini, A. *One Class of Sobolev Type Equations of Higher Order with Additive “White Noise”* / A. Favini, G.A. Sviridyuk, A.A. Zamyshlyeva // *Communications on Pure and Applied Analysis*. – 2016. – Vol. 15, no. 1. – P. 185–196.

19. Свиридюк, Г.А. Фазовые пространства одного класса операторных уравнений / Г.А. Свиридюк, Т.Г. Сукачева // Дифференциальные уравнения. – 1990. – Т. 26, № 2. – С. 250–258.

20. Shestakov, A. Reconstruction of a Dynamically Distorted Signal with Respect to the Measure Transducer Degradation / A. Shestakov, G. Sviridyuk, M. Sagadeeva // Applied Mathematical Sciences. – 2014. – Vol. 8, no. 41-44. – P. 2125–2130.

21. Афанасьев, С.Н. Начальные и граничные задачи для сингулярных абстрактных дифференциальных уравнений: дис. ... канд. физ.-мат. наук / С.Н. Афанасьев. – Воронеж, 2004. – 105 с.

Поступила в редакцию 20 мая 2016 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2017, vol. 9, no. 1, pp. 22–30

DOI: 10.14529/mmph170103

DEGENERATE FLOWS OF SOLVING OPERATORS FOR NONSTATIONARY SOBOLEV TYPE EQUATIONS

M.A. Sagadeeva

South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

E-mail: sagadeevama@susu.ru

Research of stationary Sobolev type equations were the basis for the study of a variety of different problems, such as optimal control problem, Leontief type system, the optimal measurement problems, etc. Nonstationary Sobolev type equations have been studied only in fragments. In this article the methods required to find solutions to such equations are substantiated. Namely, we investigate degenerate flows of solving operators with which shows the solvability of initial value problems for nonstationary equations of Sobolev type.

Keywords: relatively bounded operator; degenerate groups of operators; Cauchy problem; Showalter–Sidorov problem.

References

1. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operator*. Utrecht; Boston, VSP, 2003, 216 p. DOI: 10.1515/9783110915501

2. Demidenko G.V., Uspenskii S.V. *Partial Differential Equations and Systems not Solvable with Respect to the Highest-order Derivative*. New York–Basel–Hong Kong, Marcel Dekker Inc., 2003, 239 p. DOI: 10.1201/9780203911433

3. Sidorov N., Loginov B., Sinithyn A., Falaleev M. *Lyapunov–Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications*. Dordrecht; Boston; London, Kluwer Academic Publishers, 2002, 548 p. DOI: 10.1007/978-94-017-2122-6

4. Zamyshlyayeva A.A. *Linear Sobolev Type Equations of High Order*. Chelyabinsk, Publishing center of SUSU, 2012, 88 p. (in Russ.).

5. Manakova N.A. *Problems of Optimal Control for the Semilinear Sobolev Type Equations*. Chelyabinsk, Publishing center of SUSU, 2012, 107 p. (in Russ.).

6. Matveeva O.P., Sukacheva T.G. *Mathematical Models of the Non-zero Order Viscoelastic Incompressible Fluids*. Chelyabinsk, Publishing center of SUSU, 2014, 101 p. (in Russ.).

7. Zagrebina S.A., Sagadeeva M.A. *Stable and Unstable Manifolds of Solutions to Nonlinear Sobolev Type Equations*. Chelyabinsk, Publishing center of SUSU, 2016, 121 p. (in Russ.).

8. Keller A.V. Numerical Solutions of the Optimal Control Theory for Degenerate Linear System of Equations with Showalter–Sidorov Initial Conditions. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2008, no. 27, pp. 50–56. (in Russ.).

9. Keller A.V. *Chislennoe issledovanie zadach optimal'nogo upravleniya dlya modeley leont'evskogo tipa: dis. ... d-ra. fiz.-mat. nauk* (Numerical Investigation of the Optimal Control Problem for Leontief Type Models. Dr. phys. and math. sci. diss.). Chelyabinsk, 2011, 237 p.

10. Granovskii V.A. *Dinamicheskie izmereniya. Osnovy metrologicheskogo obespecheniya* (Dynamic measurements. Fundamentals of metrology provision). Leningrad, 1984, 257 p. (in Russ.).
11. Shestakov A.L. *Methods of the automat control theory to dynamical measurements*. Chelyabinsk, Publishing center of SUSU, 2013, 127 p. (in Russ.).
12. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A. A New Approach to Measurement of Dynamically Distorted Signals. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2010, no. 16, pp. 116–120. (in Russ.).
13. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A., Keller A.V. Theory of Optimal Measurements. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2014, Vol. 1, no. 1, pp. 3–15.
14. Keller A.V., Al-Delfi J.K. Holomorphic Degenerate Groups of Operators in Quasi-Banach Spaces. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematics, Mechanics, Physics*, 2015, Vol. 7, no. 1, pp. 20–27. (in Russ.).
15. Zamyshlyeva A.A., Al-Isawi J.K.T. On Some Properties of Solutions to One Class of Evolution Sobolev Type Mathematical Models in Quasi-Sobolev Spaces. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2015, Vol. 8, no. 4, pp. 113–119. DOI: 10.14529/mmp150410
16. Sagadeeva M.A., Hasan F.L. Bounded Solutions of Barenblatt–Zheltoy–Kochina Model in Quasi-Sobolev Spaces. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2015, Vol. 8, no. 4, pp. 138–144. (in Russ.). DOI: 10.14529/mmp150414
17. Sviridyuk G.A., Manakova N.A. The Dynamical Models of Sobolev Type with Showalter–Sidorov Condition and Additive "Noise". *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2014, Vol. 7, no. 1, pp. 90–103. (in Russ.). DOI: 10.14529/mmp140108
18. Favini A., Sviridyuk G.A., Zamyshlyeva A.A. One Class of Sobolev Type Equations of Higher Order with Additive "White Noise". *Communications on Pure and Applied Analysis*, 2016, Vol. 15, no. 1, pp. 185–196. DOI:10.3934/cpaa.2016.15.185
19. Sviridyuk G.A., Sukacheva T.G. Phase Spaces of a Class of Operator Semilinear Equations of Sobolev Type. *Differential Equations*, 1990, Vol. 26, no. 2, pp. 188–195.
20. Shestakov A., Sviridyuk G., Sagadeeva M. Reconstruction of a Dynamically Distorted Signal with Respect to the Measure Transducer Degradation. *Applied Mathematical Sciences*, 2014, Vol. 8, no. 41-44, pp. 2125–2130. DOI: 10.12988/ams.2014.312718
21. Afanasiev S.N. *Nachal'nye i granichnye zadachi dlya singulyarnykh abstraknykh differentsial'nykh uravneniy: dis. ... kand. fiz.-mat. nauk* (The Initial and Boundary Value Problems for the Singular Abstract Differential Equations. Cand. phys. and math. sci. diss.). Voronezh, 2004, 105 p.

Received May 20, 2016