

ПРЕДЕЛЬНО-КВАЗИСТАЦИОНАРНАЯ МОДЕЛЬ ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКОГО ФОРМООБРАЗОВАНИЯ

Н.М. Шерыхалина, А.А. Зарипов, С.С. Поречный

Уфимский государственный авиационный технический университет, г.Уфа,

Российская Федерация

E-mail: porechny@mail.ru

Рассмотрена задача моделирования электрохимической обработки в квазистационарном приближении. Решена задача формообразования при обработке электрод-инструментом в виде пластины. При решении задачи зависимость выхода по току от плотности тока принималась в виде ступенчатой функции. Для построения конформных отображений использовались преобразования Жуковского и Шварца–Кристоффеля.

Ключевые слова: электрохимическая обработка; функции комплексного переменного; конформное отображение; квазистационарное приближение.

Введение

Для математического моделирования процесса электрохимической обработки (ЭХО) используются законы Фарадея и Ома. В соответствии с этими законами скорость растворения равна $V_{\text{см}} = k\eta E$, $E = j/\kappa$, $k = \kappa\varepsilon/\rho$, где E, j – напряженность и плотность тока на границе анода; κ – электропроводность электролита; $\eta = \eta(j)$ – выход по току; ε – электрохимический эквивалент; ρ – плотность растворяемого материала.

Рассматривается ЭХО в пассивирующем электролите с круто падающей до нуля при уменьшении плотности тока зависимостью $\eta(j)$. В [1–3] рассматривались стационарные и квазистационарные процессы, для этого использовалась ступенчатая зависимость

$$\eta(j) = \begin{cases} \eta_0, & j > j_1, \\ \eta \in [0, \eta_0], & j = j_1, \\ 0, & j < j_1. \end{cases} \quad (1)$$

В данной работе проводится исследование нестационарных процессов с помощью квазистационарной модели. Рассматриваются процессы с предельно высокой локализацией, при этом максимальное значение плотности тока на обрабатываемой поверхности E_0 равно критическому $E_1 = j_1/\kappa$. Аналогичные задачи для других конфигураций электрод-инструментов (ЭИ) рассмотрены в [2].

Будем считать электрическое поле в межэлектродном пространстве (МЭП) соленоидальным и потенциальным. Тогда задачу определения напряженности поля можно решать с помощью аналитических функций комплексного переменного.

Задача формообразования при обработке пластинчатым электрод-инструментом

Рассмотрим задачу обработки угловой поверхности ЭИ в виде пластины ACB' с изолированной верхней поверхностью, которая движется горизонтально вправо с постоянной скоростью $V_{\text{ет}}$. Формы межэлектродного пространства (МЭП) до и в процессе обработки показаны на рис. 1.

На плоскости комплексного потенциала образом МЭП является полуполоса шириной U (рис. 2, а).

При использовании зависимости выхода по току (1) и условия $E_0 = E_1$ на обрабатываемой поверхности образуются две зоны, в одной из которых происходит растворение, в другой – отсутствует. В первой зоне $FMNG$ модуль напряженности равен E_1 . На плоскости $\bar{E} = dW/dZ = |E|e^{-i\theta}$ этой зоне соответствует дуга окружности радиуса E_1 с центром в начале

координат. Участкам AF ($\theta = 0$) и GB ($\theta = -\pi/2$), где отсутствует растворение, на плоскости \bar{E} соответствуют отрезки, соответственно, действительной AF и мнимой GB осей.

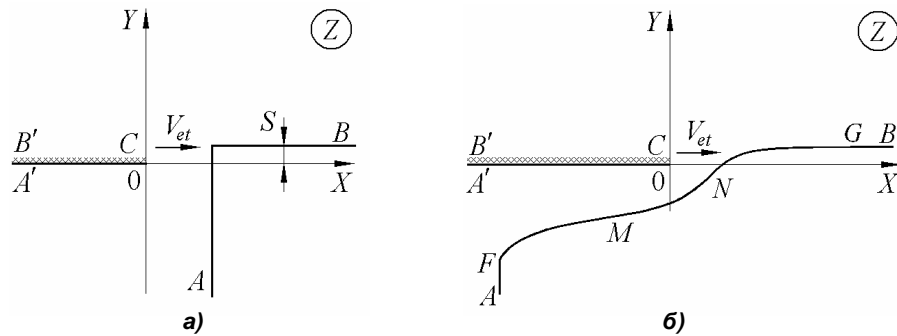


Рис. 1. Формы МЭП на физической плоскости: а) перед началом процесса; б) в процессе обработки. $FMNG$ – зона критического значения напряженности E_1 ; AF, GB – нерастворяемые границы

На поверхности ЭИ $A'C$ угол $\theta = -\pi/2$, на $B'C$ $\theta = \pi$. Поэтому на плоскости годографа \bar{E} имеем, соответственно, вертикальный и горизонтальный лучи. Область на плоскости годографа размещается на двулистной поверхности. Для наглядности можно изобразить каждый лист отдельно (рис 2, б, в).

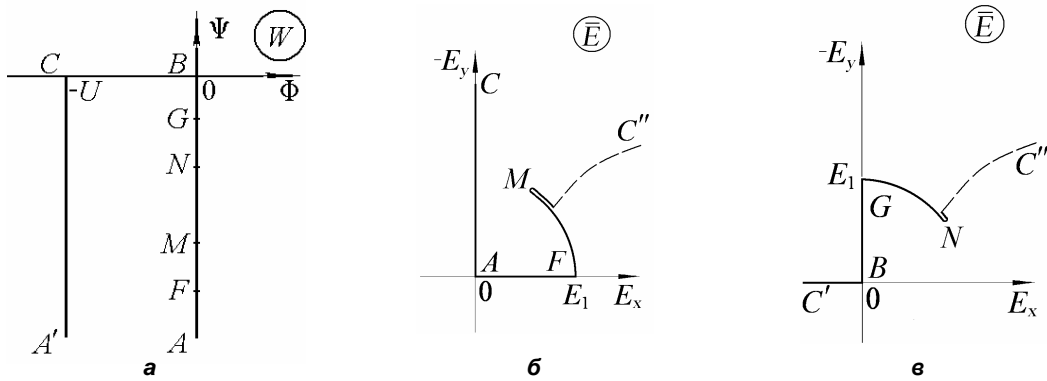


Рис. 2. Образы МЭП на плоскостях: а) комплексного потенциала; б), в) годографа; б) первый лист; в) – второй лист

Применив преобразование Жуковского

$$\omega = i \ln \frac{\bar{E}}{E_1} = \theta + i\tau, \quad \tau = \ln \frac{|E|}{E_1}, \quad (2)$$

получим фигуру, граница которой содержит только части прямых, т.е. многоугольник с углами A, B, C, F, G, M, N , равными $0; 0; 0, \pi/2; \pi/2; 2\pi, 2\pi$ соответственно (рис. 3, а, б).

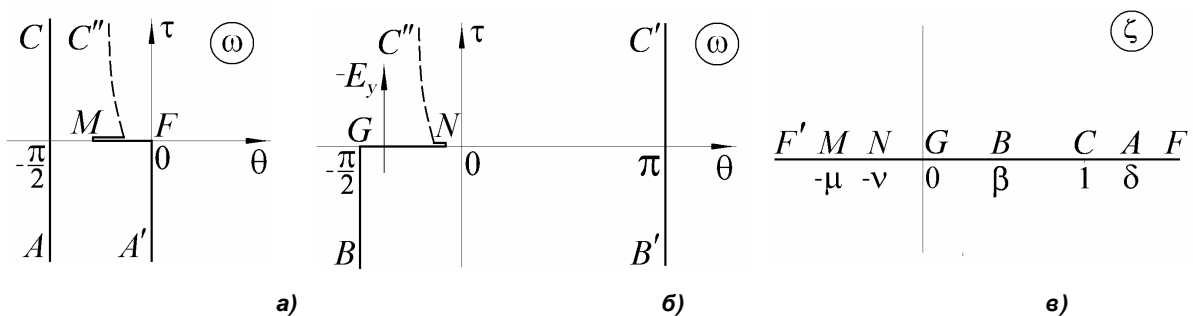


Рис. 3. Образы МЭП на плоскостях параметрического переменного: а) первый лист плоскости α б) второй лист плоскости α в) плоскость ζ

Для получения функции, конформно отображающей верхнюю полуплоскость ζ (рис. 3, в) на этот многоугольник, используем преобразование Шварца–Кристоффеля

$$\omega(\zeta) = C_1 \int_{\infty}^{\zeta} \frac{(\zeta + \mu)(\zeta + \nu)d\zeta}{(\zeta - \delta)(\zeta - \beta)(\zeta - 1)\zeta^{1/2}}, \quad (3)$$

Имеем

$$\frac{(\zeta + \mu)(\zeta + \nu)}{(\zeta - \delta)(\zeta - \beta)(\zeta - 1)} = \frac{(\delta + \mu)(\delta + \nu)}{(\delta - \beta)(\delta - 1)} \frac{1}{\zeta - \delta} + \frac{(\beta + \mu)(\beta + \nu)}{(\beta - \delta)(\beta - 1)} \frac{1}{\zeta - \beta} + \frac{(1 + \mu)(1 + \nu)}{(1 - \delta)(1 - \beta)} \frac{1}{\zeta - 1},$$

$$\int \frac{d\zeta}{(\zeta - \delta)\sqrt{\zeta}} = \left| \begin{array}{l} u = \sqrt{\zeta} \\ du = \frac{d\zeta}{2\sqrt{\zeta}} \end{array} \right| = 2 \int \frac{du}{u^2 - \delta} = \frac{1}{\sqrt{\delta}} \ln \frac{u - \sqrt{\delta}}{u + \sqrt{\delta}} = \frac{1}{\sqrt{\delta}} \ln \frac{\sqrt{\zeta} - \sqrt{\delta}}{\sqrt{\zeta} + \sqrt{\delta}}.$$

Тем самым

$$\omega(\zeta) = C_1 \int_{\infty}^{\zeta} \frac{(\zeta + \mu)(\zeta + \nu)d\zeta}{(\zeta - \delta)(\zeta - \beta)(\zeta - 1)\zeta^{1/2}} = C_1 \frac{(\delta + \mu)(\delta + \nu)}{(\delta - \beta)(\delta - 1)} \frac{1}{\sqrt{\delta}} \ln \frac{\sqrt{\zeta} - \sqrt{\delta}}{\sqrt{\zeta} + \sqrt{\delta}} +$$

$$+ C_1 \frac{(\beta + \mu)(\beta + \nu)}{(\beta - \delta)(\beta - 1)} \frac{1}{\sqrt{\beta}} \ln \frac{\sqrt{\zeta} - \sqrt{\beta}}{\sqrt{\zeta} + \sqrt{\beta}} + C_1 \frac{(1 + \mu)(1 + \nu)}{(1 - \delta)(1 - \beta)} \ln \frac{\sqrt{\zeta} - 1}{\sqrt{\zeta} + 1}. \quad (4)$$

Поскольку в соответствии с рис. 3

$$\operatorname{Re} \omega\left(\frac{\beta}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{Re} \omega\left(\frac{1 + \beta}{2}\right) = \pi, \quad \operatorname{Re} \omega\left(\frac{1 + \delta}{2}\right) = -\frac{\pi}{2},$$

то

$$\operatorname{Re} \omega\left(\frac{1 + \delta}{2}\right) = C_1 \frac{(\delta + \mu)(\delta + \nu)}{(\delta - \beta)(\delta - 1)} \frac{1}{\sqrt{\delta}} i\pi = -\frac{\pi}{2}, \quad C_1 \frac{(\delta + \mu)(\delta + \nu)}{(\delta - \beta)(\delta - 1)} \frac{1}{\sqrt{\delta}} = \frac{i}{2}, \quad (5)$$

$$\operatorname{Re} \omega\left(\frac{1 + \beta}{2}\right) = C_1 \frac{(\delta + \mu)(\delta + \nu)}{(\delta - \beta)(\delta - 1)} \frac{1}{\sqrt{\delta}} i\pi + C_1 \frac{(1 + \mu)(1 + \nu)}{(1 - \delta)(1 - \beta)} i\pi = \pi, \quad \frac{i}{2} i\pi + C_1 \frac{(1 + \mu)(1 + \nu)}{(1 - \delta)(1 - \beta)} i\pi = \pi,$$

$$C_1 \frac{(1 + \mu)(1 + \nu)}{(1 - \delta)(1 - \beta)} = -i \frac{3}{2}, \quad (6)$$

$$\operatorname{Re} \omega\left(\frac{\beta}{2}\right) = C_1 \frac{(\delta + \mu)(\delta + \nu)}{(\delta - \beta)(\delta - 1)} \frac{1}{\sqrt{\delta}} i\pi + C_1 \frac{(1 + \mu)(1 + \nu)}{(1 - \delta)(1 - \beta)} i\pi + C_1 \frac{(\beta + \mu)(\beta + \nu)}{(\beta - \delta)(\beta - 1)} \frac{1}{\sqrt{\beta}} i\pi = -\frac{\pi}{2},$$

$$\frac{i}{2} i\pi - i \frac{3}{2} i\pi + C_1 \frac{(\beta + \mu)(\beta + \nu)}{(\beta - \delta)(\beta - 1)} \frac{1}{\sqrt{\beta}} i\pi = -\frac{\pi}{2}, \quad C_1 \frac{(\beta + \mu)(\beta + \nu)}{(\beta - \delta)(\beta - 1)} \frac{1}{\sqrt{\beta}} = i \frac{3}{2} \quad (7)$$

Из (5), (6) и (7)

$$C_1 = i \frac{\sqrt{\delta} (\delta - \beta)(\delta - 1)}{2 (\delta + \mu)(\delta + \nu)}, \quad (8)$$

$$\frac{\sqrt{\delta} (\delta - \beta)(\delta - 1) (1 + \mu)(1 + \nu)}{2 (\delta + \mu)(\delta + \nu) (1 - \delta)(1 - \beta)} = -\frac{3}{2}, \quad \frac{\sqrt{\delta} (\delta - \beta)(1 + \mu)(1 + \nu)}{2 (\delta + \mu)(\delta + \nu)(1 - \beta)} = \frac{3}{2}, \quad (9)$$

$$\frac{\sqrt{\delta} (\delta - \beta)(\delta - 1) (\beta + \mu)(\beta + \nu)}{2 (\delta + \mu)(\delta + \nu) (\beta - \delta)(\beta - 1)} \frac{1}{\sqrt{\beta}} = \frac{3}{2}, \quad \frac{\sqrt{\delta} (\delta - 1) (\beta + \mu)(\beta + \nu)}{2 (\delta + \mu)(\delta + \nu) (\beta - 1) \sqrt{\beta}} = -\frac{3}{2}. \quad (10)$$

Если точки перегиба M и N отсутствуют, то параметры μ и ν – комплексно сопряженные, (т.е. $\mu = \mu_1 + i\nu_1$, $\nu = \mu_1 - i\nu_1$). Тогда уравнения (9), (10), примут вид

$$\frac{\sqrt{\delta} (\delta - \beta) \left((1 + \mu_1)^2 + \nu_1^2 \right)}{2 (1 - \beta) \left((\delta + \mu_1)^2 + \nu_1^2 \right)} = \frac{3}{2}, \quad (11)$$

$$\frac{\sqrt{\delta}(\delta-1)((\beta+\mu_1)^2+v_1^2)}{2(\beta-1)((\delta+\mu_1)^2+v_1^2)} \frac{1}{\sqrt{\beta}} = -\frac{3}{2}. \quad (12)$$

Тем самым с учетом (5)–(7), окончательно

$$\omega(\zeta) = \frac{i}{2} \ln \frac{\sqrt{\zeta} - \sqrt{\delta}}{\sqrt{\zeta} + \sqrt{\delta}} + i \frac{3}{2} \ln \frac{\sqrt{\zeta} - \sqrt{\beta}}{\sqrt{\zeta} + \sqrt{\beta}} - i \frac{3}{2} \ln \frac{\sqrt{\zeta} - 1}{\sqrt{\zeta} + 1}. \quad (13)$$

Согласно (2)

$$\bar{E} = \frac{dW}{dZ} = E_1 e^{-i\omega} = E_1 \sqrt{\frac{\sqrt{\zeta} - \sqrt{\delta}}{\sqrt{\zeta} + \sqrt{\delta}}} \left(\frac{\sqrt{\zeta} - \sqrt{\beta}}{\sqrt{\zeta} + \sqrt{\beta}} \right)^{3/2} \left(\frac{\sqrt{\zeta} + 1}{\sqrt{\zeta} - 1} \right)^{3/2}. \quad (14)$$

С учетом (13)

$$dZ = \frac{1}{E_1} e^{i\omega} dW = \frac{1}{E_1} \sqrt{\frac{\sqrt{\zeta} + \sqrt{\delta}}{\sqrt{\zeta} - \sqrt{\delta}}} \left(\frac{\sqrt{\zeta} + \sqrt{\beta}}{\sqrt{\zeta} - \sqrt{\beta}} \right)^{3/2} \left(\frac{\sqrt{\zeta} - 1}{\sqrt{\zeta} + 1} \right)^{3/2} \frac{dW}{d\zeta} d\zeta. \quad (15)$$

Теперь с помощью преобразования Шварца–Кристоффеля найдем функцию $W(\zeta)$

$$\begin{aligned} W(\zeta) &= C_2 \int_{\beta}^{\zeta} \frac{d\zeta}{(\zeta - \delta)(\zeta - \beta)^{1/2}(\zeta - 1)^{1/2}} = \\ &= C_2 \frac{1}{\sqrt{(\delta - \beta)(\delta - 1)}} \ln \left[\frac{\sqrt{(\delta - 1)(\zeta - \beta)} - \sqrt{(\delta - \beta)(\zeta - 1)}}{\zeta - \delta} \right] \Big|_{\beta}^{\zeta} = \\ &= C_2 \frac{1}{\sqrt{(\delta - \beta)(\delta - 1)}} \ln \frac{(1 - \beta)(\zeta - \delta)}{[\sqrt{(\delta - 1)(\zeta - \beta)} + \sqrt{(\delta - \beta)(\zeta - 1)}]^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

При обходе точки $\zeta = \delta$ по полуокружности малого радиуса против часовой стрелки действительная часть W получает приращение, равное $-U$, логарифм – приращение мнимой части $i\pi$. Отсюда

$$\Delta \operatorname{Re} W = -U = C_2 \frac{1}{\sqrt{(\delta - \beta)(\delta - 1)}} i\pi.$$

Тогда

$$C_2 = i \frac{U}{\pi} \sqrt{(\delta - \beta)(\delta - 1)}.$$

Тем самым, окончательно

$$W(\zeta) = i \frac{U}{\pi} \ln \frac{(1 - \beta)(\zeta - \delta)}{[\sqrt{(\delta - 1)(\zeta - \beta)} + \sqrt{(\delta - \beta)(\zeta - 1)}]^2}. \quad (17)$$

Производная

$$\frac{dW}{d\zeta} = i \frac{U}{\pi} \frac{\sqrt{(\delta - \beta)(\delta - 1)}}{(\zeta - \delta) \sqrt{(\zeta - \beta)(\zeta - 1)}}. \quad (18)$$

Из (15) и (18)

$$dZ = i \frac{U}{\pi E_1} \sqrt{(\delta - \beta)(\delta - 1)} \frac{(\sqrt{\zeta} + \sqrt{\delta})(\sqrt{\zeta} + \sqrt{\beta})^3}{(\zeta - \delta)^{3/2} (\zeta - \beta)^2 (\sqrt{\zeta} + 1)^3} d\zeta. \quad (19)$$

Интегрируя (19) численно от $\zeta = 1$, получим функцию $Z(\zeta)$.

Параметры заглупления кромки ЭИ L и S определяются следующим образом

$$L = -\operatorname{Re} Z(\infty), \quad S = \operatorname{Im} Z(0), \quad (20)$$

безразмерное время $\tau = L \frac{E_1}{U}$.

На рис. 4 приведены формы обрабатываемой поверхности в неподвижной относительно материала заготовки и подвижной (связанной с кромкой ЭИ) системах координат, соответствующие $s = S \frac{E_1}{U} = 0$ и $\tau = -2; -1,5; -1; -0,5; 0; 0,5; 1; 1,5; 2; \dots; 5$.

На рис. 4, а при $\tau \rightarrow \infty$ видно установление предельно-стационарной конфигурации с $|\bar{E}| = E_1$. Вблизи нерастворяемой зоны AF при возрастании τ формируется некоторая предельная форма (рис. 4, б, кривая ∞). Эта форма соответствует решению задачи об истечении из-под щита [4]. Известно, что эта кривая является гладкой, но ее кривизна в точке перехода к прямой равна бесконечности.

Следует отметить, что при $\tau < 0$ образы точек перегиба $-\mu$ и $-\nu$ совпадают и при дальнейшем уменьшении τ становятся комплексно сопряженными (обозначим их $\mu = \mu_1 + i\nu_1$, $\nu = \mu_1 - i\nu_1$ (11), (12)). При этом внутри области на плоскости \bar{E} появляется точка ветвления M , являющаяся образом точки $\zeta = -\mu + i\nu$. Линия «склейки» на плоскости \bar{E} начинается с некоторой точки на границе области, проходит через точку ветвления, разворачивается и уходит на бесконечность (рис. 5). Как видно из рис. 4, б, при $\tau \rightarrow -\infty$ длина обработанной части поверхности уменьшается и стремится к нулю.

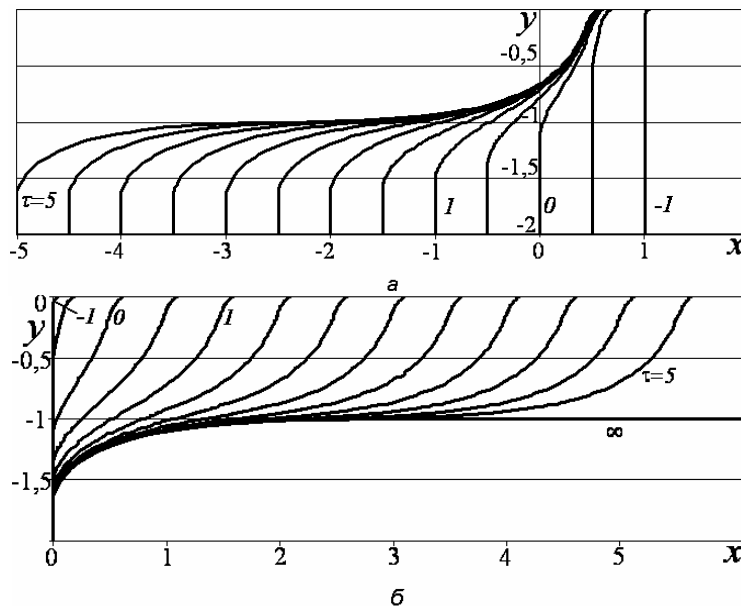


Рис. 4. Формы обрабатываемой поверхности для $s = 0$:
а) в системе координат, связанной с кромкой ЭИ $C(0,0)$;
б) в неподвижной системе координат

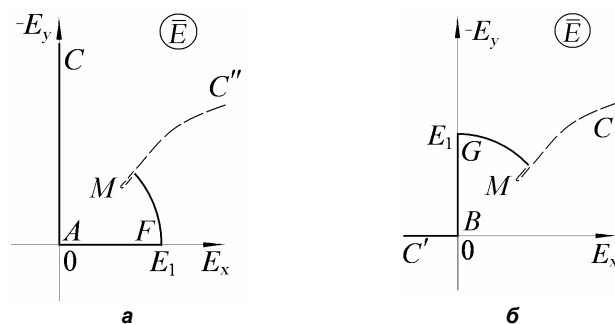


Рис. 5. Образ МЭП на плоскости годографа:
а) первый лист; б) второй лист

Выводы

Таким образом, в квазистационарном приближении решена плоская задача обработки горизонтальным пластинчатым электрод-инструментом с изолированной верхней поверхностью заготовки, имевшей до обработки угловую форму. Как показывают численные исследования [5], в таких задачах квазистационарное приближение весьма точно (до 3–4 значащих цифр) приближает нестационарное решение.

Литература

1. Житников, В.П. Использование разрывных функций для моделирования растворения при стационарном электрохимическом формообразовании / В.П. Житников, Е.М. Ошмарина, Г.И. Федорова // Известия Вузов. Математика. – 2010. – № 10. – С. 77–81.
2. Житников, В.П. Точные решения двух задач предельного квазистационарного электрохимического формообразования / В.П. Житников, Е.М. Ошмарина, Г.И. Федорова // Известия вузов. Математика. – 2011. – № 12. – С. 21–29.
3. Житников, В.П. Моделирование прецизионной электрохимической обработки секционированным катодом / В.П. Житников, Е.М. Ошмарина, О.Р. Зиннатуллина // ПМТФ. – 2011. – Т. 52, № 6. – С. 185–192.
4. Гуревич, М.И. Теория струй идеальной жидкости / М.И. Гуревич. – М.: Наука, 1979. – 536 с.
5. Житников, В.П. Моделирование процессов нестационарного электрохимического формообразования применительно к прецизионным технологиям / В.П. Житников, Р.Р. Муксимова, Е.М. Ошмарина // Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского. – Казань, изд-во КГУ, 2010. – Т. 42. – С. 99–122.

Поступила в редакцию 7 сентября 2016 г.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2017, vol. 9, no. 1, pp. 65–71*

DOI: 10.14529/mmph170108

LIMITING-QUASISTATIONARY MODEL OF ELECTROCHEMICAL SHAPING

N.M. Sherykhalina, A.A. Zaripov, S.S. Porechny

Ufa State Aviation Technical University, Ufa, Russian Federation

E-mail: porechny@mail.ru

The paper is focused on modeling of electrochemical machining in quasistationary approximation. The modeling is based on the use of Faraday's and Ohm's laws. The dependence of current efficiency on the current density in the form of a step function is used when solving this problem. The model enables us to study the configuration of a machining area, obtained in case of extreme high localization of a solution process. For this function there is a possibility in case of a non-steady process to divide sections of the machining area into zones with different conditions (presence and lack of solution). As the solution in case of such machining happens at a constant value of intensity module, there is a possibility to simulate the change of machining time by embedding of an electrochemical machining electrode into the edge of a workpiece. The evidence from practice shows that the accuracy of approximation of the non-steady process by quasistationary has three and more significant digits. Meanwhile, the computing time decreases by 100 and more times.

The problem of shaping while machining by the machining electrode in the shape of a plate with the isolated top surface is solved. The methods of the complex variable theory have been used to solve the problems on the assumption about constancy of electrolytic conduction. The Joukowski and Schwarz-Christoffel transformations are applied to construct conformal mapping. The accurate solution on the problem in quadratures is obtained.

The study on non-steady processes using a quasistationary model makes it possible to get information about a shape of the machining area at the beginning, continuation and the end of the machining process. In particular, it's found out that near the section of the machining start there is a solution like outflow from the board, well-known in hydrodynamics. It allows examining properties of a shape that is formed at the edge of the machining area.

Keywords: electrochemical machining; complex functions; conformal mapping; quasistationary approximation.

References

1. Zhitnikov V.P., Oshmarina E.M., Fyodorova G.I. The use of discontinuous functions for modeling the dissolution process of steady-state electrochemical shaping. *Russian Mathematics*, 2010, Vol. 54, no. 10, pp. 67–70.
2. Zhitnikov V.P., Oshmarina E.M., Fedorova G.I. Exact solutions of two limiting quasistationary electrochemical shaping problems. *Russian Mathematics*, 2011, Vol. 55, no. 12, pp. 16–22.
3. Zhitnikov V.P., Oshmarina E.M., Zinnatullina A.R. Simulation of precision electrochemical machining of metals by a segmented cathode. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2011, Vol. 52, no. 6, pp. 1004–1010.
4. Gurevich M.I. *Teoriya struy ideal'noy zhidkosti* (Theory of ideal fluid streams). Moscow, Nauka Publ., 1979, 536 p.
5. Zhitnikov V.P., Muksimova R.R., Oshmarina E.M. Modelirovanie protsessov nestatsionarnogo elektrokhimicheskogo formoobrazovaniya primenitel'no k pretsizionnym tekhnologiyam (Process modeling of non-stationary electrochemical shaping applied to a high-precision technologies). *Trudy matematicheskogo tsentra imeni N.I. Lobachevskogo* (Proceedings of the N.I. Lobachevsky Mathematical Centre). Kazan', KGU Publ., 2010, Vol. 42, pp. 99–122.

Received September 7, 2016