Математика

УДК 532.546: 519.6 **DOI: 10.14529/mmph170201**

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ТРУБОПРОВОДНОГО ТРАНСПОРТА ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ

Х.М. Гамзаев
Азербайджанский государственный университет нефти и промышленности, г. Баку, Азербайджан
E-mail: xan.h@rambler.ru

Рассматривается задача по определению распределения скоростей в поперечном сечении трубопровода для нестационарного осесимметричного потока несжимаемой вязкой жидкости при неизвестном условии на стенке трубопровода. Законы изменения во времени перепада давления по длине трубопровода и объемного расхода жидкости в трубопроводе считаются заданными. Данная задача относится к классу нелокальных задач с интегральными условиями для дифференциальных уравнений в частных производных. Путем интегрирования уравнения исходная задача преобразуется к прямой задаче с локальными условиями. Построен дискретный аналог последней задачи в виде неявной разностной схемы и предложен вычислительный алгоритм решения полученной системы разностных уравнений.

Ключевые слова: трубопроводный транспорт; вязкая жидкость; осесимметричное течение; нелокальная задача с интегральным условием; разностный метод.

Введение

В современной технике для перемещения разнообразных жидкостей применяются трубопроводы, начиная с самых незначительных размеров, используемых в лабораторной технике и контрольно-измерительной аппаратуре, до магистральных [1–3]. Обычно при проектировании трубопроводов задаются расход жидкости, который служит основной характеристикой производительности трубопровода в соответствии с его назначением, и положения начального и конечного пунктов трубопровода. При этом одной из основных задач является определение гидравлической характеристики трубопровода, т. е. определение перепада давления, необходимого для пропуска заданного расхода жидкости по данному трубопроводу. В практике для решения этой задачи в качестве расчетной формулы используется формула Дарси–Вейсбаха [3–6]

$$\Delta P = \lambda \frac{\rho \bar{u}^2}{2d} l ,$$

где ΔP – перепад давления на участке трубопровода длиной l, d – диаметр трубопровода, λ – коэффициент гидравлического сопротивления, ρ – плотность жидкости, $\bar{u}$ – средняя скорость по сечению трубопровода.

Данную формулу, а также явное выражение для коэффициента гидравлического сопротивления для ламинарного режима можно получить из точного решения уравнения стационарного течения однородных несжимаемых жидкостей по трубопроводу при соответствующих реологических законах. При этом в качестве граничного условия на стенке трубопровода используется так называемое «условие прилипания». Так возникает известный параболический профиль скорости в стационарных течениях вязких жидкостей под действием перепада давления. Однако многие исследователи на основании молекулярных гипотез приходят к выводу, что вместо условия прилипания на твердой стенке трубопровода имеет место условие скольжения [7, 8]. В литературе рассматриваются три модели взаимодействия жидкостей с твердой стенкой, которые соответствуют следующим граничным условиям: прилипание, проскальзывание по закону Навье и проскальзывание с предельным напряжением [9–12]. Однако при моделировании течения жидкостей в трубопроводах практически невозможно определить, какое из этих граничных условий реализуется на стенке трубопровода. В связи с этим для практики трубопроводного транспорта важное значение имеет исследование по определению закона распределения скоростей в поперечном сечении трубопровода для нестационарных потоков транспортируемых вязких жидкостей при неизвестном условии на стенке трубопровода.

В данной работе задача определения поля скоростей для нестационарных потоков вязких жидкостей в трубопроводах представляется как нелокальная задача с интегральным условием для уравнения нестационарного течения несжимаемой вязкой жидкости в трубопроводе.

Постановка задачи

Пусть имеется горизонтально расположенный простой трубопровод с жесткими стенками, длиной l, радиусом R, и по нему перекачивается вязкая несжимаемая жидкость. Предполагается, что ось $0z$ направлена по оси трубопровода и поток направлен вдоль оси трубы так, что из трех компонент скорости (u_r, u_φ, u_z) остается лишь одна $u_z \neq 0$, а $u_r = 0$ и $u_\varphi = 0$. Считая течение жидкости осесимметричным, полную систему дифференциальных уравнений, описывающих данное течение, можно представить в виде [4]

$$\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}=\frac{\nu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z},\ 0<r<R, 0<t\le T,$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial z}=0,\ \frac{\partial u_z}{\partial \varphi}=0,\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r}=0,\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial \varphi}=0, \tag{1}$$

где u_z – компонента скорости течения жидкости, направленная параллельно оси трубопровода, P – давление, ρ – плотность жидкости, $\nu = \mu/\rho$ – кинематическая вязкость, μ – динамическая вязкость жидкости. Из второго и третьего уравнения системы (1) следует, что u_z представляет функцию только r и t, а из двух последних – независимость давления P от r и φ. А это означает, что $\frac{\partial P}{\partial z}$ является функцией только времени.

Полагая

$$u(r,t)=u_z(r,t),\ -\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\Delta P(t)}{l},$$

из системы (1) придем к следующей форме уравнения нестационарного течения вязкой несжимаемой жидкости по трубопроводу

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\nu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\Delta P(t)}{l},\ 0<r<R,\ 0<t\le T, \tag{2}$$

где $\Delta P(t)$ – перепад давления по длине трубопровода в направлении потока.

Плотность жидкости ρ, кинематическая вязкость ν и перепад давления $\Delta P(t)$ считаются заданными.

Пусть для уравнения (2) задаются начальное условие

$$u|_{t=0}=\psi(r), \tag{3}$$

и естественное граничное условие ограниченности решения при $r=0$, которое эквивалентно условию

$$\frac{\partial u}{\partial r}|_{r=0}=0. \tag{4}$$

Однако в связи с тем, что скорость течения жидкости на стенке трубопровода не доступна непосредственному измерению и не может регулироваться, сформулировать граничное условие, соответствующее взаимодействию жидкости с твердой стенкой трубопровода не представляется возможным. Следовательно, чтобы сформулировать корректную задачу, помимо условий (3), (4) необходимо задавать дополнительное условие. Предположим, что закон изменения во времени объемного расхода жидкости в трубопроводе $Q(t)$ известен. Тогда дополнительное условие для уравнения (2) можно представить в виде

$$\int_0^R 2\pi r u dr = Q(t). \tag{5}$$

При этом предполагается выполнение условия согласования

$$2\pi\int_0^R \psi(r)dr = Q(0).$$

Таким образом, задача заключается в определении в прямоугольной области $\{0 \le r \le R,\ 0 \le t \le T\}$ функции $u(r,t)$, удовлетворяющей уравнению (2) и условиям (3)–(5). Задача (2)–(5) относится к классу нелокальных задач с интегральными условиями для дифференциальных уравнений в частных производных [13–16]. Необходимо отметить, что задание нелокального условия (5) приводит к возникновению значительных трудностей при численном решении нелокальной задачи (2)–(5) именно из-за отсутствия какой-либо информации об искомом решении на границе области.

Метод решения

Задачу (2)–(5) сведем к задаче с локальными условиями. Дифференцируем соотношение (5) по переменной t

$$2\pi\int_0^R r\frac{\partial u}{\partial t}dr = \frac{dQ}{dt}.$$

Подставим в это соотношение выражения для $\frac{\partial u}{\partial t}$ из уравнения (2)

$$2\pi\int_0^R r\left[\frac{\nu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\Delta P(t)}{l}\right]dr = \frac{dQ}{dt}.$$

Выполнив интегрирования по частям и учитывая условие (4), получим

$$\nu r\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=R} + \frac{R^2}{2\rho}\frac{\Delta P(t)}{l} = \frac{1}{2\pi}\frac{dQ}{dt}.$$

Разрешив последнее уравнение относительно $\frac{\partial u}{\partial r}\big|_{r=R}$, получим недостающее граничное условие на стенке трубопровода для уравнения (2)

$$\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=R} = \frac{1}{2\pi\nu R}\frac{dQ}{dt} - \frac{R}{2\rho l\nu}\Delta P(t). \qquad (6)$$

Теперь задача заключается в определении функции $u(r,t)$, удовлетворяющей уравнению (2) и начальному условию (3) и локальным граничным условиям (4), (6).

Для численного решения полученной задачи (2)–(4), (6) используем метод конечных разностей. С этой целью введем равномерную разностную сетку

$$\bar{\omega} = \{(r_i, t_j): r_i = i\Delta r,\ t_j = j\Delta t,\ i = 0,1,2,...n,\ j = 0,1,2,...m\}$$

– в прямоугольной области $\{0 \le r \le R,\ 0 \le t \le T\}$ с шагами $\Delta r = R/n$ по переменной r и $\Delta t = T/m$ по времени t. Пользуясь интегральным методом дискретизации, уравнению (2) во внутренних узлах сетки $\bar{\omega}$ поставим в соответствие неявную разностную схему [17]

$$\frac{u_i^{j+1}-u_i^j}{\Delta t} = \frac{\nu}{r_i\Delta r}\left[r_{i+1/2}\frac{u_{i+1}^{j+1}-u_i^{j+1}}{\Delta r} - r_{i-1/2}\frac{u_i^{j+1}-u_{i-1}^{j+1}}{\Delta r}\right] + \frac{1}{\rho l}\Delta P^{j+1},$$

где $u_i^j \approx u(r_i,t_j),\ \Delta P^j = \Delta P(t_j)$, $r_{i\pm1/2} = r_i \pm \Delta r/2$, $i = 1,2,3,...,n-1,\ j = 1,2,3,....,m-1$.

Начальное условие (3) аппроксимируется точно:

$$u_i^0 = \psi_i, \quad i = \overline{0,n}.$$

Для повышения порядка аппроксимации граничных условий (4), (6) снова используем интегральный метод дискретизации. В результате будем иметь:

$$\frac{u_0^{j+1}-u_0^j}{\Delta t}\frac{r_{1/2}^2}{2} = \nu r_{1/2}\frac{u_1^{j+1}-u_0^{j+1}}{\Delta r} + \frac{r_{1/2}^2}{2\rho l}\Delta P^{j+1},$$

$$\frac{u_n^{j+1}-u_n^j}{\Delta t}\frac{R^2-r_{n-1/2}^2}{2} = \frac{1}{2\pi}\frac{Q^{j+1}-Q^j}{\Delta t} - \nu r_{n-1/2}\frac{u_n^{j+1}-u_{n-1}^{j+1}}{\Delta r} - \frac{r_{n-1/2}^2}{2\rho l}\Delta P^{j+1},$$

где $\psi_i = \psi(r_i)$, $Q^j = Q(t_j)$.

Преобразуем полученную систему разностных уравнений к следующему виду:

$$a_i u_{i-1}^{j+1} - c_i u_i^{j+1} + b_i u_{i+1}^{j+1} = -(u_i^j + \frac{\Delta t}{\rho l}\Delta P^{j+1}),\ i = 1,2,3,....n-1,\ j = 1,2,3,....,m-1, \tag{7}$$

$$u_i^0 = \psi_i,\ i = \overline{0,n}, \tag{8}$$

$$u_0^{j+1} = \theta_1 u_1^{j+1} + \eta_1, \tag{9}$$

$$u_n^{j+1} = \theta_2 u_{n-1}^{j+1} + \eta_2, \tag{10}$$

где

$$a_i = \frac{\nu \Delta t r_{i-1/2}}{r_i \Delta r^2};\ b_i = \frac{\nu \Delta t r_{i+1/2}}{r_i \Delta r^2};\ c_i = a_i + b_i + 1;\ \theta_1 = \frac{\nu \Delta t r_{1/2}}{0,5 r_{1/2}^2 \Delta r + \nu \Delta t r_{1/2}};$$

$$\eta_1 = \frac{0,5 r_{1/2}^2 \Delta r u_0^j + 0,5 \Delta P^{j+1} r_{1/2}^2 \Delta r \Delta t / \rho l}{0,5 r_{1/2}^2 \Delta r + \nu \Delta t r_{1/2}};$$

$$\eta_2 = \frac{0,5 \Delta r \left(Q^{j+1} - Q^j\right)/\pi + 0,5(R^2 - r_{n-1/2}^2)\Delta r u_n^j - 0,5 \Delta P^{j+1} r_{n-1/2}^2 \Delta r \Delta t / \rho l}{0,5(R^2 - r_{n-1/2}^2)\Delta r + \nu \Delta t r_{n-1/2}};$$

$$\theta_2 = \frac{\nu \Delta t r_{n-1/2}}{0,5(R^2 - r_{n-1/2}^2)\Delta r + \nu \Delta t r_{n-1/2}}.$$

Разностная задача (7)–(10) при каждом фиксированном значении j, $j = \overline{1, m-1}$ представляет собой систему линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей, в которой в качестве неизвестных выступают приближенные значения искомой функций $u(x,t)$ в узлах разностной сетки, т. е. u_i^{j+1}, $i = \overline{0,n}$, $j = \overline{1, m-1}$.

Для решения таких систем можно использовать алгоритм Томаса, представляющий собой экономичный вариант алгоритма для метода последовательного исключения неизвестных Гаусса (метод прогонки) [18]. Согласно алгоритму Томаса решение системы (7)–(10) при каждом фиксированном значении j, $j = \overline{1, m-1}$ представляется в виде

$$u_i^{j+1} = \alpha_{i+1} u_{i+1}^{j+1} + \beta_{i+1},\ i = n-1, n-2, \ldots, 1, 0,\ u_n^{j+1} = \frac{\theta_2 \beta_n + \eta_2}{1 - \theta_2 \alpha_n},$$

где коэффициенты α_i, β_i, $i = 1, 2, 3, \ldots n$ определяются по формулам:

$$\alpha_1 = \theta_1,\quad \beta_1 = \eta_1,\ \alpha_{i+1} = \frac{b_i}{c_i - a_i \alpha_i},\ \beta_{i+1} = \frac{a_i \beta_i + u_i^j + \Delta t \Delta P^{j+1}/\rho l}{c_i - a_i \alpha_i},\quad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Результаты численных расчетов. Для выяснения эффективности практического применения предложенного вычислительного алгоритма были проведены численные эксперименты для модельных задач. Схема численного эксперимента заключается в следующем: задается скорость течения жидкости на стенке трубопровода

$$u|_{r=R} = g(t),$$

и с учетом этого условия определяется $u(r,t)$ решение прямой задачи (2)–(4). Далее, по формуле (5) определяется $Q(t)$ объемный расход жидкости в трубопроводе, и найденная зависимость принимается за точные данные для численного решения задачи (2)–(4), (6).

Расчеты выполнялись на пространственно-временной разностной сетке с шагами $\Delta r = 0{,}01$ м, $\Delta t = 1$ с. Результаты численного эксперимента, проведенного для случая R = 0,6 м; $\mu = 10^{-3}$ Па·с; ρ = 1000 кг/м^3; $\psi(r) = 0{,}0001$ м/с; $\Delta P(t) = 0{,}01 \cdot 10^5$ Па; $g(t) = 0{,}0001$ м/с; $l = 5000$ м представлены в табл. 1; в ней u^t и $\overline{u}$ – точные и вычисленные значения функции $u(r,t)$, м/с.

Результаты численного эксперимента показывают, что значения искомой функции $u(r,t)$ восстанавливаются с очень высокой точностью во всех точках разностной сетки.

Таблица 1

r, м	t = 600 с		t = 900 с		t = 1500 с		t = 1800 с	
	u^t	$\bar{u}$	u^t	$\bar{u}$	u^t	$\bar{u}$	u^t	$\bar{u}$
0,00	0,1201	0,1201	0,1801	0,1801	0,3001	0,3001	0,3601	0,3601
0,05	0,1201	0,1201	0,1801	0,1801	0,3001	0,3001	0,3601	0,3601
0,10	0,1201	0,1201	0,1801	0,1801	0,3001	0,3001	0,3601	0,3601
0,15	0,1201	0,1201	0,1801	0,1801	0,3001	0,3001	0,3601	0,3601
0,20	0,1201	0,1201	0,1801	0,1801	0,3001	0,3001	0,3601	0,3601
0,25	0,1201	0,1201	0,1801	0,1801	0,3001	0,3001	0,3601	0,3601
0,30	0,1201	0,1201	0,1801	0,1801	0,3001	0,3001	0,3601	0,3601
0,35	0,1201	0,1201	0,1801	0,1801	0,3001	0,3001	0,3601	0,3601
0,40	0,1201	0,1201	0,1801	0,1801	0,3001	0,3001	0,3600	0,3600
0,45	0,1201	0,1201	0,1801	0,1801	0,2997	0,2997	0,3590	0,3590
0,50	0,1200	0,1200	0,1792	0,1793	0,2936	0,2937	0,3481	0,3482
0,55	0,1131	0,1132	0,1608	0,1610	0,2425	0,2426	0,2785	0,2786
0,60	0,0001	0,0003	0,0001	0,0003	0,0001	0,0003	0,0001	0,0002

Предложенный вычислительный алгоритм также опробован на данных модели стационарного течения вязкой несжимаемой жидкости в трубопроводе

$$\frac{\mu}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)=-\frac{\Delta P}{l},\ 0<r<R,$$

$$\frac{du}{dr}\Big|_{r=0}=0,\ \int_0^R 2\pi r u dr=Q,$$

где Q и ΔP являются постоянными. Данная задача имеет точное решение

$$u(r)=\frac{Q}{\pi R^2}+\frac{\Delta P}{8\mu l}(R^2-2r^2). \qquad (11)$$

По заданным постоянным значениям Q и ΔP численно определялись распределения скоростей по поперечному сечению трубопровода как по предложенному вычислительному алгоритму, так и по точной формуле (11). Результаты численных расчетов, проведенных для случая $\rho=1000$ кг/м^3; $\mu=10^{-3}$ Па·с; $Q=1{,}885$ м^3/с; $\Delta P/l=0{,}2\cdot 10^{-4}$ Па/м; R = 0,6 м, представлены в табл. 2; в ней $\bar{u}$ – вычисленные значения скорости течения при выходе на стационар по предложенному алгоритму, м/с; u_{st} – вычисленные значения скорости течения по формуле (11), м/с.

Таблица 2

r, м	$\bar{u}$	u_{st}
0,00	1,6676	1,6677
0,05	1,6676	1,6677
0,10	1,6675	1,6676
0,15	1,6675	1,6676
0,20	1,6674	1,6675
0,25	1,6673	1,6674
0,30	1,6671	1,6672
0,35	1,6670	1,6671
0,40	1,6668	1,6669
0,45	1,6666	1,6667
0,50	1,6663	1,6664
0,55	1,6661	1,6662
0,60	1,6658	1,6659

Анализ полученных результатов показывает, что по заданным значениям Q и ΔP с высокой точностью можно восстановить распределения скоростей по поперечному сечению трубопровода. Результаты численных экспериментов свидетельствуют, что при течении вязкой несжимаемой жидкости в трубопроводе не всегда выполняется условие прилипания жидкости к стенке трубопровода.

Заключение

Рассмотрена задача определения распределения скоростей по поперечному сечению трубопровода для нестационарного потока вязкой несжимаемой жидкости на основании информации об изменении во времени объёмного расхода жидкости и перепада давления по длине трубопровода. Вычислительный алгоритм для решения данной задачи базируется на сведении нелокальной задачи с интегральным условием к задаче с локальными условиями. Предложенный вычислительный алгоритм также можно использовать при определении гидравлической характеристики трубопроводов.

Литература

1. Лурье, М.В. Математическое моделирование процессов трубопроводного транспорта нефти, нефтепродуктов и газа / М.В. Лурье. – М.: ФГУП Изд-во «Нефть и газ» РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина, 2003. – 336 с.

2. Леонов, Е.Г. Гидроаэромеханика в бурении / Е.Г. Леонов, В.И. Исаев. – М.: Недра, 1987. – 304 с.

3. Басниев, К.С. Нефтегазовая гидромеханика / К.С. Басниев, Н.М. Дмитриев, Г.Д. Розенберг. – Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. – 544 с.

4. Лойцянский, Л.Г. Механика жидкости и газа / Л.Г. Лойцянский. – М.: Наука, 1987. – 840 с.

5. Рабинович, Е.З. Гидравлика / Е.З. Рабинович. – М.: Недра, 1980. – 278 с.

6. Шлихтинг, Г. Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг. – М: Наука, 1969. – 711 с.

7. Neto, C. Boundary slip in Newtonian liquids: a review of experimental studies / C. Neto, D. Evans, E. Bonaccurso // Reports on Progress in Physics. – 2005. – Vol. 68, no. 12. – P. 2859–2897.

8. Lauga, E. Microfluidics: the no-slip boundary condition in Handbook of Experimental Fluid Dynamics / E. Lauga, M.P. Brenner, H.A. Stone. – New York: Springer, 2006. – P. 1219–1240.

9. Янков, В.И. Переработка волокнообразующих полимеров. Основы реологии полимеров и течение полимеров в каналах / В.И. Янков. – Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2008. – 264 с.

10. Rao, I.J. The effect of the slip boundary condition on the flow of fluids in a channel / Rao I.J., K.R. Rajagopal // Acta Mechanica. – 1999. – Vol. 135. – P. 113–126.

11. Борзенко, Е.И. Исследование явления проскальзывания в случае течения вязкой жидкости в изогнутом канале / Е.И. Борзенко, О.А. Дьякова, Г.Р. Шрагер // Вестник Томского Государственного Университета. Математика и Механика. – 2014. – № 2(28). – С. 35–44.

12. Volker, J. Slip with friction and penetration with resistance boundary conditions for the Navier–Stokes equation – numerical tests and aspects of the implementation / J. Volker // J. Computational and Applied Mechanics. – 2002. – Vol. 147, Issue 2. – P. 287–300.

13. Cannon, J.R. The solution of heat equation subject to the specification of energy / J.R. Cannon // Quart. Appl. Math. – 1963. – Vol. 21, № 2. – P. 155–160.

14. Ионкин, Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием / Н.И. Ионкин // Дифференциальные уравнения. – 1977. – Т. 13, № 2. – С. 294–304.

15. Самарский, А.А. О некоторых проблемах современной теории дифференциальных уравнений / А.А. Самарский // Дифференциальные уравнения. – 1980. – Т. 16, № 11. – С. 1925–1935.

16. Нахушева, В.А. Дифференциальные уравнения математических моделей нелокальных процессов / В.А. Нахушева. – М.: Наука, 2006. – 173 с.

17. Самарский, А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. – М. Наука, 1989. – 616 с.

18. Самарский, А.А. Численные методы решения обратных задач математической физики / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. – М.: Издательство ЛКИ, 2009. – 480 с.

Поступила в редакцию 8 июля 2016 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2017, vol. 9, no. 2, pp. 5–12

DOI: 10.14529/mmph170201

NUMERICAL METHOD FOR SOLVING A NONLOCAL PROBLEM ON PIPELINE TRANSPORTATION OF VISCOUS LIQUID

K.M. Gamzaev
Azerbaijan State Oil and Industry University, Baku, Azerbaijan
E-mail: xan.h@rambler.ru

The paper deals with a process of unsteady axisymmetric flow of incompressible viscous liquid in the cylindrical pipeline, described by the nonlinear system of Navier-Stokes differential equations. The set of equations is transformed into one linear parabolic equation with an initial and natural boundary condition on the pipeline axis. We face a problem for determining velocity distribution in a cross-section of the pipeline based on the desired law of time variation of the pressure drop along the pipeline. As in case of liquid flow in pipes it's practically impossible to define interaction models of fluid with a solid boundary, the boundary condition on the pipe wall is considered as unknown. For the problem accuracy an additional condition in the form of integral flow characteristic is specified. In other words, the law of time variation of volumetric flow rate in the pipeline is specified. This problem is related to nonlocal problems with an integral condition for partial differential equations.

The specified integral condition is differentiated in time and the obtained ratio with the help of the differential equation is transformed into a local boundary condition. As a result, the set task is altered to a direct problem with local conditions. The finite difference method is applied for numerical solution of the boundary value problem. For this purpose, we create a discrete analog of the problem in the form of an implicit difference scheme using the integral method. A computational algorithm of solving the obtained difference equation system is suggested. Numerical experiments for test problems have been conducted to check the efficiency of practical application of the suggested computational algorithm. The computational algorithm has also been tried on the data of steady flow of viscous incompressible liquid in the pipeline.

Keywords: pipeline transportation; viscous liquid; axisymmetric flow; non-local problem with integral condition; finite difference method.

References

1. Lur'e M.V. *Matematicheskoe modelirovanie protsessov truboprovodnogo transporta nefti, nefteproduktov i gaza* (Mathematical modeling of processes of oil, oil products and gas pipeline transportation). Moscow, Neft i gaz Publ., 2003, 336 p. (in Russ.).

2. Leonov E.G., Isaev V.I. *Gidroaeromekhanika v burenii* (Aerohydromechanics in drilling). Moscow, Nedra Publ.,1987, 304 p. (in Russ.).

3. Basniev K.S., Dmitriev N.M., Rozenberg G.D. *Neftegazovaia gidromekhanika* (Oil and gas fluid mechanics). Moscow–Izhevsk, Institut kompiuternykh issledovanii Publ., 2005, 544 p. (in Russ.).

4. Loitsianskii L.G. *Mekhanika zhidkosti i gaza* (Mechanics of liquid and gas). Moscow, Nauka Publ., 1987, 840 p. (in Russ.).

5. Rabinovich E.Z. *Gidravlika* (Hydraulics). Moscow, Nedra Publ., 1980, 278 p. (in Russ.).

6. Shlikhting G. *Teoriia pogranichnogo sloia* (Boundary layer theory). Moscow, Nauka Publ., 1969, 711 p. (in Russ.).

7. Neto C., Evans D., Bonaccurso E. Boundary slip in Newtonian liquids: a review of experimental studies. *Reports on Progress in Physics*, 2005, Vol. 68, no. 12, pp. 2859–2897. DOI: 10.1088/0034-4885/68/12/R05

8. Lauga E., Brenner M.P., Stone H.A. *Microfluidics: The No-Slip Boundary Condition*. New York, Springer, 2006, pp. 1219–1240. DOI: 10.1007/978-3-540-30299-5_19

9. Yankov V.I. *Pererabotka voloknoobrazuyushchikh polimerov. Osnovy reologii polimerov i techenie polimerov v kanalakh* (Processing of fiber-forming polymers. Basics of polymer rheology and flow of polymers in channels). Moscow–Izhevsk: NITs "Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika", Institut komp'yuternykh issledovaniy Publ., 2008, 264 p. (in Russ.).

10. Rao I.J., Rajagopal K.R. The effect of the slip boundary condition on the flow of fluids in a channel. *Acta Mechanica*, 1999, Vol. 135, pp. 113–126. DOI: 10.1007/BF01305747

11. Borzenko E.I., Diakova O.A., Shrager G.R. Studying the slip phenomenon for a viscous fluid flow in a curved channel. *Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh.*, 2014, no. 2(28), pp. 35–44. (in Russ.).

12. Volker J. Slip with friction and penetration with resistance boundary conditions for the Navier–Stokes equation – numerical test s and aspects of the implementation. *J. Computational and Applied Mechanics*, 2002, Vol. 147, Issue 2, pp. 287–300. DOI: 10.1016/s0377-0427(02)00437-5

13. Cannon J.R. The solution of heat equation subject to the specification of energy. *Quart. Appl. Math.*, 1963, Vol. 21, no. 2, pp. 155–160. DOI: 10.1090/qam/160437

14. Ionkin N.I. *Differentsial'nye uravneniya*, 1977, Vol. 13, no. 2, pp. 294–304. (in Russ.).

15. Samarskiy A.A. *Differentsial'nye uravneniya*, 1980, Vol. 16, no. 11, pp. 1925–1935. (in Russ.).

16. Nakhusheva V.A. *Differentsial'nye uravneniya matematicheskikh modeley nelokal'nykh protsessov* (Differential equations of mathematical models of nonlocal processes). Moscow, Nauka Publ., 2006, 173 p. (in Russ.).

17. Samarskiy A.A. *Teoriya raznostnykh skhem* (Theory of difference schemes). Moscow, Nauka Publ., 1989, 616 p. (in Russ.).

18. Samarskiy A.A., Vabishchevich P.N. *Chislennye metody resheniya obratnykh zadach matematicheskoy fiziki* (Numerical methods of solving inverse problems of mathematical physics). Moscow, LKI Publ., 2009, 480 p. (in Russ.).

Received July 8, 2016