УДК 517.95 DOI: 10.14529/mmph170202

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Я.Т. Мегралиев, А.Н. Сафарова
Бакинский государственный университет, г. Баку, Азербайджан
E-mail: yashar_aze@mail.ru

Исследуется разрешимость обратной краевой задачи с неизвестным коэффициентом, зависящим от времени, для параболического уравнения второго порядка с неклассическими краевыми условиями. Суть задачи состоит в том, что требуется вместе с решением определить неизвестный коэффициент. Задача рассматривается в прямоугольной области. Дается определение классического решения поставленной задачи. Сначала рассматривается вспомогательная обратная краевая задача и доказывается эквивалентность (в определенном смысле) исходной задачи. Для исследования вспомогательной обратной краевой задачи сначала используется метод разделения переменных. Далее, рассматривается спектральная задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с интегральными условиями второго рода. После применения формальной схемы метода разделения переменных решение прямой краевой задачи (при заданной неизвестной функции) сводится к решению задачи Коши. После этого решение задачи Коши сводится к решению некоторой счетной системы интегро-дифференциальных уравнений относительно коэффициентов Фурье. В свою очередь, последняя система относительно неизвестных коэффициентов Фурье записывается в виде одного интегро-дифференциального уравнения относительно искомого решения. Затем, используя соответствующие дополнительные условия обратной вспомогательной краевой задачи, для определения неизвестных функций получаем систему двух нелинейных интегральных уравнений. Таким образом, решение вспомогательной обратной краевой задачи сводится к системе двух нелинейных интегро-дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций. Строится конкретное банохово пространство. Далее, в шаре из построенного банохового пространства с помощью сжатых отображений доказывается разрешимость системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений, которая также является единственным решением вспомогательной обратной краевой задачи. Используя эквивалентность задач, получены существование и единственность классического решения исходной задачи.

Ключевые слова: обратная краевая задача; параболическое уравнение; метод Фурье; классическое решение.

Введение

Многие задачи математической физики, механики сплошных сред являются краевыми задачами, сводящимися к интегрированию дифференциального уравнения или системы уравнений в частных производных при заданных краевых и начальных условиях. За последнее время в связи с запросами различных технологических процессов, а так же задачами управления движением летательных аппаратов в верхних слоях атмосферы стало актуальным формирование математических моделей этих явлений, содержащих классические краевые условия [1].

Первая работа, содержащая начально-краевую нелокальную задачу для некоторых семейств эллиптических уравнений, исследуется в [2]. В дальнейшем для общих классов эллиптических уравнений, описывающих многие явления естествознания, поставлены пространственно нелокальные задачи и обоснованы методы их решения [3, 4].

В этой работе с помощью метода Фурье и принципа сжатых отображений доказаны существование и единственность решения нелокальной обратной краевой задачи для параболического уравнения второго порядка.

Постановка обратной краевой задачи

Рассмотрим обратную краевую задачу нахождения решения и неизвестного коэффициента параболического уравнения

$$a_1(t)u_t(x,t)+a_0(t)u(x,t)=u_{xx}(x,t)+f(x,t),\ D_T=\{(x,t):0\le x\le 1,\ 0\le t\le T\}, \tag{1}$$

при условиях:

$$u(x,0)+\delta u(x,T)=\varphi(x)\quad (0\le x\le 1), \tag{2}$$

$$u_x(0,t)=0\qquad (0\le t\le T), \tag{3}$$

$$du(1,t)+\int_0^1 u(x,t)dx=0\quad (0\le t\le T), \tag{4}$$

$$u(0,t)=h(t)\quad (0\le t\le T), \tag{5}$$

где $d>0,\delta\ge 0$ – заданные числа, $a_1(t)>0$, $f(x,t),\ \varphi(x),\ h(t)$ – заданные функции, а $u(x,t)$ и $a_0(t)$ – искомые функции.

Определение. Пару $\{u(x,t),a_0(t)\}$ функций $u(x,t)$ и $a_0(t)$ будем называть классическим решением задачи (1)–(5), если выполняются следующие условия:

1) функция $u(x,t)$ и ее производные $u_t(x,t)$, $u_x(x,t)$, $u_{xx}(x,t)$ непрерывны в D_T;

2) функция $a_0(t)$ непрерывна на $[0,T]$;

3) уравнение (1) и условия (2)–(5) удовлетворяются в обычном классическом смысле.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. Предположим, что $\delta\ge 0$, функция $a_1(t)$ положительна и непрерывна на $[0,T]$, функция $\varphi(x)$ непрерывна на $[0,1]$, функция $f(x,t)$ непрерывна по совокупности переменных в D_T, $h(t)\in C^1[0,T],\ h(t)\ne 0\ (0\le t\le T)$. Кроме того, пусть выполняется условие согласования

$$\varphi(0)=h(0)+\delta h(T). \tag{6}$$

Тогда задача нахождения классического решения задачи (1)–(5) эквивалентна задаче определения функций $u(x,t)\in C^{2,1}(D_T)$ и $a_0(t)\in C[0,T]$, из соотношений (1)–(4)

$$a_1(t)h'(t)+a_0(t)h(t)=u_{xx}(0,t)+f(0,t)\quad (0\le t\le T). \tag{7}$$

Доказательство. Пусть $\{u(x,t),a_0(t)\}$ – классическое решение задачи (1)–(5). Предполагая, что $h(t)$ дифференцируема, из (5) получаем:

$$u_t(0,t)=h'(t)\ (0\le t\le T). \tag{8}$$

Подставляя $x=0$ в уравнения (1), имеем:

$$a_1(t)u_t(0,t)+a_0(t)u(0,t)=u_{xx}(0,t)+f(0,t)\quad (0\le t\le T). \tag{9}$$

Из последнего соотношения, в силу (5) и (8), получаем , что выполняется (7).

Теперь пусть $\{u(x,t),a_0(t)\}$ – решение задачи (1)–(3), (7), и удовлетворяется условие согласования (6). Из (7) и (9) имеем:

$$a_1(t)\frac{d}{dt}(u(0,t)-h(t))+a_0(t)(u(0,t)-h(t))=0\quad (0\le t\le T).$$

Примем обозначения

$$y(t)\equiv u(0,t)-h(t)\quad (0\le t\le T) \tag{10}$$

и последнее соотношение перепишем в виде:

$$a_1(t)y'(t)+a_0(t)y(t)=0\quad (0\le t\le T). \tag{11}$$

Из (10), с учетом (2) и (6), нетрудно видеть, что

$$y(0)+\delta y(T)=\varphi(0)-(h(0)+\delta h(T))=0. \tag{12}$$

Очевидно, что общее решение (11) имеет вид:

$$y(t)=c\exp\left[-\int_0^t\frac{a_0(\tau)}{a_1(\tau)}d\tau\right],(0\le t\le T). \tag{13}$$

Отсюда, с учетом (12), получаем:

$$c\left(1+\delta\exp\left[-\int_0^t\frac{a_0(\tau)}{a_1(\tau)}d\tau\right]\right)=0. \tag{14}$$

В силу $\delta \ge 0$ из (14) получим $c = 0$, подставляя его в (13), заключаем, что $y(t) = 0$ $(0 \le t \le T)$. Следовательно, из (10) ясно, что выполняется и условие (5). Лемма доказана.

Вспомогательная факты

Задача на собственные значения [6]:

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0,\ 0 \le x \le 1, \tag{15}$$

$$y'(0) = 0, y'(1) = d\lambda\, y(1),\ d > 0 \tag{16}$$

имеет только собственные функции $y_k(x) = \sqrt{2}\cos(\sqrt{\lambda_k}\, x),\ k = 0,1,...$ с неотрицательными собственными числами λ_k из уравнения $\operatorname{tg}\sqrt{\lambda} = -d\sqrt{\lambda}$.

Решая однородную задачу, соответствующую задаче (1)–(4), методом разделения переменных, приходим к спектральной задаче для уравнения (15) с граничными условиями

$$y'(0) = 0,\ d\, y(1) + \int_0^1 y(x)\,dx = 0,\ d > 0. \tag{17}$$

Ее решением будет система $\{y_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, т. е. система собственных функций задачи (15), (16) без функций, соответствующих собственному значению $\lambda_0 = 0$.

Известно [6], что, начиная с некоторого номера N, имеют место оценки

$$\left|\sqrt{\lambda_k} - \pi/2 - (k-1)\pi\right| < \frac{1}{(d\pi k)}. \tag{18}$$

Сравним систему $\{y_k(x)\}$ без функции $y_0(x)$ с известной системой $\{v_k(x)\}$, $v_k(x) = \sqrt{2}\cos\left(\sqrt{\mu_k}\, x\right)$, где $\sqrt{\mu_k} = \frac{\pi}{2} + \pi(k-1),\ k = 1,2,...$, которая является ортонормированным базисом в $L_2(0,1)$. Аналогично рассуждениям [5], для $k \ge N$, с учетом (18), имеем

$$\left\|y_k(x) - v_k(x)\right\|_{L_2(0,1)}^2 < \frac{2}{3(dk\pi)}.$$

Таким образом,

$$\sum_{k=N}^{\infty}\left\|y_k(x) - v_k(x)\right\|_{L_2(0,1)}^2 < \frac{1}{9d^2}, \tag{19}$$

откуда следует сходимость ряда из левой части этого неравенства.

Имеет место следующая лемма.

Лемма 2 [6]**.** Биортогонально сопряженная система $\{z_k(x)\}$, $k = 1,2,...$ определяется формулой

$$z_k(x) = \sqrt{2}\,(\cos(\sqrt{\lambda_k}\, x) - \cos\sqrt{\lambda_k}\,)/(1 + d\cos^2\sqrt{\lambda_k}\,).$$

Теорема 1 [6]**.** Система $\{y_k(x)\}, k = 1,2,...$ образует базис Рисса в пространстве $L_2(0,1)$.

Теперь пусть $\eta_k(x) = \sqrt{2}\sin(\sqrt{\lambda_k}\, x),\ \xi_k(x) = \sqrt{2}\sin(\sqrt{\mu_k}\, x),\ k = 1,2,...$. Тогда аналогично (19) имеем

$$\sum_{k=N}^{\infty}\left\|\eta_k(x) - \xi_k(x)\right\|_{L_2(0,1)}^2 < \frac{1}{9d^2}. \tag{20}$$

Предположим, что $g(x) \in L_2(0,1)$. Тогда соответственно с учетом (19), (20) получаем:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^1 g(x)y_k(x)dx\right)^2\right)^{1/2} \le M\left\|g(x)\right\|_{L_2(0,1)}, \tag{21}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^1 g(x)\eta_k(x)dx\right)^2\right)^{1/2} \le M\left\|g(x)\right\|_{L_2(0,1)}, \tag{22}$$

где

$$M = \left(N(1+N) + 2 + \frac{1}{9d^2} \right)^{1/2}.$$

Пусть $\varphi(x) \in C[0,1]$, $g'(x) \in L_2(0,1)$ и $J(g) \equiv dg(1) + \int_0^1 g(x)dx = 0$. Тогда имеем

$$g_k = (g(x), z_k(x)) = -\frac{\sqrt{2}}{\alpha_k} \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^1 g'(x) \sin(\sqrt{\lambda_k} x) dx, \qquad (23)$$

где

$$\alpha_k = 1 + d\cos^2 \sqrt{\lambda_k} > 1.$$

Отсюда, в силу (22), находим

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{\lambda_k} |g_k|)^2 \right)^{1/2} \le M \| g'(x) \|_{L_2(0,1)}. \qquad (24)$$

Предположим, что $\varphi(x) \in C^1[0,1]$, $g''(x) \in L_2(0,1)$, $J(g) = 0$, $g'(0) = 0$. Тогда из (23) получаем

$$g_k = \frac{\sqrt{2}}{\alpha_k} \frac{1}{\lambda_k} (g'(1)\cos(\sqrt{\lambda_k}) - \int_0^1 g''(x)\cos(\sqrt{\lambda_k} x) dx). \qquad (25)$$

В силу (21), из (25), находим

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k |g_k|)^2 \right)^{1/2} \le 2m_0 |g'(1)| + \sqrt{2} M \| g''(x) \|_{L_2(0,1)}. \qquad (26)$$

Теперь, пусть $g(x) \in W_2^3(0,1)$, $J(g) = 0$, $g'(0) = 0$, $g'(1) + dg''(1) = 0$. Тогда из (24) имеем

$$g_k = \frac{\sqrt{2}}{\alpha_k} \frac{1}{\lambda_k \sqrt{\lambda_k}} \int_0^1 g'''(x) \sin(\sqrt{\lambda_k} x) dx.$$

Отсюда, с учетом (20), находим

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k \sqrt{\lambda_k} |g_k|)^2 \right)^{1/2} \le M \| g'''(x) \|_{L_2(0,1)}. \qquad (27)$$

Теперь введем следующие пространства:

1. Пусть $B_{2,T}^{3/2}$ [7] обозначает совокупность всех функций $u(x,t)$ вида

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) y_k(x),$$

рассматриваемых в D_T, где функции $u_k(t) \in C[0,T]$, и удовлетворяют условию

$$\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k \sqrt{\lambda_k} \| u_k(t) \|_{C[0,T]})^2 \right\}^{1/2} < +\infty.$$

В множестве $B_{2,T}^{3/2}$ норма определяется формулой:

$$\| u(x,t) \|_{B_{2,T}^{3/2}} = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k \sqrt{\lambda_k} \| u_k(t) \|_{C[0,T]})^2 \right\}^{1/2}.$$

2. Обозначим топологическое произведение $B_{2,T}^{3/2} \times C[0,T]$ через $E_T^{3/2}$ с нормой

$$\| z \|_{E_T^3} = \| u(x,t) \|_{B_{2,T}^{3/2}} + \| a_0(t) \|_{C[0,T]}.$$

Известно, что эти пространства $B_{2,T}^{3/2}$ и $E_T^{3/2}$ банаховы.

О разрешимости обратной краевой задачи

Формально разыскивая первую компоненту $u(x,t)$ решения $\{u(x,t),a_0(t)\}$ задачи (1)–(3), (7) в виде

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)y_k(x) \tag{28}$$

приходим к задаче:

$$a_1(t)u'_k(t)+\lambda_k u_k(t)=F_k(t;a_0,u)\ \ (k=1,2,...;0\le t\le T), \tag{29}$$

$$u_k(0)=\varphi_k,\ (k=1,2,...), \tag{30}$$

где

$$u_k(t)=\int_0^1 u(x,t)z_k(x)dx, F_k(t;u,a)=f_k(t)-a_0(t)u_k(t),$$

$$f_k(t)=\int_0^1 f(x,t)z_k(x)dx, \varphi_k=\int_0^1\varphi(x)z_k(x)dx\ \ (k=1,2,...),$$

причем

$$y_k(x)=\sqrt{2}\cos(\sqrt{\lambda_k}x),\ z_k(x)=\sqrt{2}\,(\cos(\sqrt{\lambda_k}x)-\cos(\sqrt{\lambda_k}))/(1+d\cos^2\sqrt{\lambda_k}).$$

Далее, из (29), (30),считая, что $a_1(t)>0$ и $\delta\ge 0$ находим:

$$u_k(t)=\frac{\varphi_k e^{-\int_0^t\frac{\lambda_k ds}{a_1(s)}}}{1+\delta e^{-\int_0^T\frac{\lambda_k ds}{a_1(s)}}}+\int_0^t\frac{F_k(\tau;a_0,u)}{a_1(\tau)}e^{-\int_\tau^t\frac{\lambda_k ds}{a_1(s)}}d\tau-\frac{\delta e^{-\int_0^T\frac{\lambda_k ds}{a_1(s)}}}{1+\delta e^{-\int_0^T\frac{\lambda_k ds}{a_1(s)}}}\int_0^T\frac{F_k(\tau;a_0,u)}{a_1(\tau)}e^{-\int_\tau^t\frac{\lambda_k ds}{a_1(s)}}d\tau\ \ (k=1,2,...)\,. \tag{31}$$

Для определения первой компоненты $u(x,t)$ решения $\{u(x,t),a_0(t)\}$ задачи (1)–(3), (7) подставляем выражения $u_k(t)$ $(k=1,2,\ldots)$ из (31) в (18):

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{\varphi_k e^{-\int_0^t\frac{\lambda_k ds}{a_1(s)}}}{1+\delta e^{-\int_0^T\frac{\lambda_k ds}{a_1(s)}}}+\int_0^t\frac{F_k(\tau;a_0,u)}{a_1(\tau)}e^{-\int_\tau^t\frac{\lambda_k ds}{a_1(s)}}d\tau-\frac{\delta e^{-\int_0^T\frac{\lambda_k ds}{a_1(s)}}}{1+\delta e^{-\int_0^T\frac{\lambda_k ds}{a_1(s)}}}\int_0^T\frac{F_k(\tau;a_0,u)}{a_1(\tau)}e^{-\int_\tau^t\frac{\lambda_k ds}{a_1(s)}}d\tau\right\}y_k(x). \tag{32}$$

Учитывая (28), из (7) находим, что

$$a_0(t)=h^{-1}(t)\left\{h'(t)-f(0,t)-\sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k u_k(t)\right\}. \tag{33}$$

Далее, после подстановки выражения $u_k(t)$ из (31) в (33) для определения второй компоненты $a_0(t)$ решения $\{u(x,t),a_0(t)\}$ задачи (1)–(3), (7) получаем:

$$a_0(t)=h^{-1}(t)\left\{a_1(t)h'(t)-f(0,t)-\sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\left(\frac{\varphi_k e^{-\int_0^t\frac{\lambda_k ds}{a_1(s)}}}{1+\delta e^{-\int_0^T\frac{\lambda_k ds}{a_1(s)}}}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\int_0^t\frac{F_k(\tau;a_0,u)}{a_1(\tau)}e^{-\int_\tau^t\frac{\lambda_k ds}{a_1(s)}}d\tau-\frac{\delta e^{-\int_0^T\frac{\lambda_k ds}{a_1(s)}}}{1+\delta e^{-\int_0^T\frac{\lambda_k ds}{a_1(s)}}}\int_0^T\frac{F_k(\tau;a_0,u)}{a_1(\tau)}e^{-\int_\tau^t\frac{\lambda_k ds}{a_1(s)}}d\tau\right\}. \tag{34}$$

Теперь докажем следующую лемму.

Лемма 3. Если $\{u(x,t),a_0(t)\}$ является решением задачи (1)–(3), (7), то функции

$$u_k(t)=\int_0^1 u(x,t)z_k(x)dx \quad (k=1,2,...),$$

т. е. коэффициенты Фурье функции $u(x,t)$ по системе $\{y_k(x)\}, k=1,2,...$ удовлетворяют на $[0,T]$ счетной системе (31).

Доказательство. Предположим, что $\{u(x,t),a_0(t)\}$ – решение задачи (1)–(3), (7).Тогда очевидно, что

$$2\int_0^1 u_t(x,t)z_k(x)dx=\frac{d}{dt}\left(2\int_o^1 u(x,t)dx\right)=u_k'(t) \ (k=1,2,...), \tag{35}$$

причем $u_k(t)\in C[0,T]$.

Далее, пользуясь граничным условием (3), дважды интегрируя по частям, находим:

$$\int_0^1 u_{xx}(x,t)z_k(x)dx=\frac{\sqrt{2}}{\alpha_k}\int_0^1 u_{xx}(x,t)\left(\cos(\sqrt{\lambda_k}x)-\cos\sqrt{\lambda_k}\right)dx=$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{\alpha_k}(d\lambda_k u(1,t)\cos\sqrt{\lambda_k}+\lambda_k\int_0^1 u_{xx}(x,t)\cos(\sqrt{\lambda_k}x)dx)=$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{\alpha_k}\left[\lambda_k(du(1,t)+\int_0^1 u(x,t)dx)\cos\sqrt{\lambda_k}+\right.$$

$$\left.+\lambda_k\int_0^1 u(x,t)\left(\cos(\sqrt{\lambda_k}x)-\cos\sqrt{\lambda_k}\right)dx\right]=-\lambda_k u_k(t), \tag{36}$$

где

$$\alpha_k=1+d\cos^2\sqrt{\lambda_k}>1.$$

Умножив уравнение (1) на функцию $z_k(x)$ $(k=1,2,...)$, проинтегрировав полученное равенство по x от 0 до 1 и учитывая (35), (36), получаем уравнение (29).

Аналогично из (2) получаем, что выполняется условие (30).

Таким образом, $u_k(t)$ $(k=0,1,...)$ является решением задачи (29), (33). А отсюда непосредственно следует, что функции $u_k(t)$ $(k=0,1,...)$ удовлетворяют на $[0,T]$ системе (31). Лемма доказана.

Из леммы 3 вытекает следующее

Следствие. Задача (1)–(3), (7) не может иметь более одного решения, если система (32), (34) имеет единственное решение.

В пространстве $E_T^{3/2}$ рассмотрим оператор

$$\Phi(u,a)=\{\Phi_1(u,a),\Phi_2(u,a)\}.$$

Здесь

$$\Phi_1(u,a)=\tilde{u}(x,t)\equiv\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{u}_k(t)\sin\lambda_k x,\ \Phi_2(u,a)=\tilde{a}_0(t),$$

а $\tilde{u}_k(t)$ $(k=1,2,...)$ и $\tilde{a}_0(t)$ – определяются соответственно из правых частей (31) и (34).

С помощью несложных преобразований находим, что справедливы неравенства:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k\sqrt{\lambda_k}\,\|\tilde{u}_k(t)\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{1/2}\le\sqrt{3}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k\sqrt{\lambda_k}\,|\varphi_k|\right)^2\right)^{1/2}+\left\|\frac{1}{a_1(t)}\right\|_{C[0,T]}(1+\delta)\sqrt{3}\times$$

$$\times\left[\sqrt{T}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k\sqrt{\lambda_k}\,|f_k(\tau)|\right)^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}+T\|a_0(t)\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k\sqrt{\lambda_k}\,\|u_k(t)\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right], \tag{37}$$

$$\left\|\tilde{a}_0(t)\right\|_{C[0,T]} \le \left\|h^{-1}(t)\right\|_{C[0,T]}\left\{\left\|a_1(t)h'(t)-f(0,t)\right\|_{C[0,T]}+\sqrt{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-1}\right)^{1/2}\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k\sqrt{\lambda_k}\left|\varphi_k\right|\right)^2\right)^{1/2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left\|\frac{1}{a_1(t)}\right\|_{C[0,T]}(1+\delta)\left(\sqrt{T}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k\sqrt{\lambda_k}\left|f_k(\tau)\right|)^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}+T\left\|a_0(t)\right\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k\sqrt{\lambda_k}\left\|u_k(t)\right\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right]\right\}. \tag{38}$$

Предположим, что данные задачи (1)–(3), (7) удовлетворяют следующим условиям:

1. $\varphi(x)\in W_2^{(3)}(0,1),\quad d\varphi(1)+\int_0^1\varphi(x)dx=0,\quad \varphi'(0)=0,\quad \varphi'(1)+d\varphi''(1)=0;$

2. $f(x,t),\quad f_x(x,t),\quad f_{xx}(x,t)\in C(D_T),\ f_{xxx}(x,t)\in L_2(D_T),$

$$df(1,t)+\int_0^1 f(x,t)dx=0,\ f_x(0,t)=0,\ f_x(1,t)+df_{xx}(1,t)=0\,(0\le t\le T);$$

3. $h(t)\in C^1[0,T],\quad h(t)\ne 0\ \ (0\le t\le T)$.

В силу (25) и (27), из (37) и (38) соответственно находим:

$$\left\|\tilde{u}(x,t)\right\|_{B_{2,T}^{3/2}}\le A_1(T)+B_1(T)T\left\|a_0(t)\right\|_{C[0,T]}\left\|u(x,t)\right\|_{B_{2,T}^{3/2}}, \tag{39}$$

$$\left\|\tilde{a}(t)\right\|_{C[0,T]}\le B_1(T)+B_2(T)T\left\|a_0(t)\right\|_{C[0,T]}\left\|u(x,t)\right\|_{B_{2,T}^{3/2}}, \tag{40}$$

где

$$A_1(T)=\sqrt{3}M\left[\left\|\varphi'''(x)\right\|_{L_2(0,1)}+\left\|\frac{1}{a_1(t)}\right\|_{C[0,T]}(1+\delta)\sqrt{T}\left\|f_{xxx}(x,t)\right\|_{L_2(D_T)}\right],B_1(T)=\sqrt{3}\left\|\frac{1}{a_1(t)}\right\|_{C[0,T]}(1+\delta),$$

$$A_2(T)=\left\|h^{-1}(t)\right\|_{C[0,T]}\left\{\left\|a_1(t)h'(t)-f(0,t)\right\|_{C[0,T]}+\sqrt{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-1}\right)^{1/2}\left[M\left\|\varphi'''(x)\right\|_{L_2(0,1)}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left\|\frac{1}{a_1(t)}\right\|_{C[0,T]}(1+\delta)\sqrt{T}\left\|f_{xxx}(x,t)\right\|_{L_2(D_T)}\right]\right\},\ B_2(T)=\left\|h^{-1}(t)\right\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Введя обозначения

$$A(T)=A_1(T)+A_2(T),\ B(T)=B_1(T)+B_2(T)$$

из неравенств (39), (40), получаем

$$\left\|\tilde{u}(x,t)\right\|_{B_{2,T}^{3/2}}+\left\|\tilde{a}(t)\right\|_{C[0,T]}\le A(T)+B(T)T\left\|a_0(t)\right\|_{C[0,T]}\left\|u(x,t)\right\|_{B_{2,T}^{3/2}}. \tag{41}$$

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 2. Предположим, что выполняются условие 1–3 и неравенство

$$(A(T)+2)^2B(T)<1. \tag{42}$$

Тогда в шаре $K=K_R(\left\|z\right\|_{E_T^{3/2}}\le R=A(T)+2)$ из $E_T^{3/2}$ задача (1)–(3), (7) имеет единственное решение.

Доказательство. Запишем систему уравнений (32), (34) в виде

$$z=\Phi z, \tag{43}$$

где $z=\{u,a_0\}$, $\Phi z=\left\{\Phi_1 z,\Phi_2 z\right\}$, а $\Phi_i(u,a_0)(i=1,2)$ определены правыми частями уравнений (32), (34) соответственно.

Оператор $\Phi(u,a_0)$ рассмотрим в шаре $K=K_R(\left\|z\right\|_{E_T^{3/2}}\le R=A(T)+2)$ пространства $E_T^{3/2}$.

Аналогично (41) получаем, что для любых $z,z_1,z_2\in K_R$ справедливы оценки:

$$\|\Phi z\|_{E_T^{3/2}} \le A(T) + B(T)T\|a_0(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^{3/2}}, \tag{44}$$

$$\|\Phi z_1 - \Phi z_2\|_{E_T^{3/2}} \le B(T)TR\left(\|a_{01}(t) - a_{02}(t)\|_{C[0,T]} + \|u_1(x,t) - u_2(x,t)\|_{B_{2,T}^{3/2}}\right). \tag{45}$$

Из неравенств (44) и (45), в силу (42), следует, что оператор Φ является в шаре $K = K_R$ сжатым. Следовательно, оператор Φ имеет в шаре $K = K_R$ единственную неподвижную точку $\{u, a_0\}$, которая является единственным решением уравнения (43). Очевидно, что это решение также является единственным решением системы (32), (34) в шаре $K = K_R$.

Из структуры пространства $B_{2,T}^{3/2}$ следует, что функции $u(x,t)$, $u_x(x,t)$ и $u_{xx}(x,t)$ непрерывны в области D_T.

В силу (24) из (29) легко заметить, что

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\sqrt{\lambda_k}\,\|u_k'(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{1/2} \le \sqrt{3}\left\|\frac{1}{a_1(t)}\right\|_{C[0,T]}\left\{\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k\sqrt{\lambda_k}\,\|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{1/2} + \right.$$

$$\left. + M\left\|\|f_x(x,t)\|_{C[0,T]}\right\|_{L_2(0,1)} + \|a_0(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^{3/2}}\right\}.$$

Из последнего соотношения следует, что $u_t(x,t)$ непрерывна в D_T.

Нетрудно проверить, что уравнение (1) и условия (2)–(4) и (7) выполняются в обычном смысле. Таким образом, решением задачи (1)–(3), (7) является пара функций $\{u(x,t), a_0(t)\}$. В силу следствия леммы 3 оно единственно в шаре $K = K_R$. Теорема доказана.

С помощью леммы 1 и теоремы 2 получаем однозначную разрешимость задачи (1)–(5).

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2, и удовлетворяются условия согласования

$$\varphi(0) = h(0),\ \psi(0) = h'(T).$$

Тогда в шаре $K = K_R(\|z\|_{E_T^{3/2}} \le R = A(T) + 2)$ из пространства $E_T^{3/2}$ задача (1)–(5) имеет единственное классическое решение.

Литература

1. Гордезиани, Д.Г. Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды / Д.Г. Гордезиани, Г.А. Авалишвили // Математическое моделирование. – 2000. – Т. 12, № 1. – С. 94–103.
2. Бицадзе, А.В. О некоторых простейших обобщенных линейных эллиптических задач / А.В. Бицадзе, А.А. Самарский. – ДАН СССР. –1969. – Т. 85, № 4. – С. 739–740.
3. Гордезиани, Д.Г. Об одном методе решения краевой задачи Бицадзе–Самарского / Д.Г. Гордезиани // Семинар Института прикладной математики при Тбилисском университете. – 1970. – № 2. – С. 38–40.
4. Гордезиани, Д.Г. О разрешимости одной краевой задачи для нелинейного уравнения эллиптического типа / Д.Г. Гордезиани, Д.З. Джиоев. – Сообщ. АН ГССР. – 1972. – Т. 68, № 4. – С. 289–292.
5. Капустин, Н.Ю. О сходимости спектральных разложений функций из класса Гёльдера для двух задач со спектральным параметром в граничном условии / Н.Ю. Капустин, Е.И. Моисеев // Дифференциальные уравнения. – 2000. – Т. 36, № 8. – С. 1069–1074.
6. Моисеев, Е.И. Об особенностях корневого пространства одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии / Е.И. Моисеев, Н.Ю. Капустин // Докл. АН. – 2002. – Т. 385, № 1. – С. 20–24.
7. Худавердиев, К.И. Исследование одномерной смешанной задачи для одного класса псевдогиперболических уравнений третьего порядка с нелинейной операторной правой частью / К.И. Худавердиев, А.А. Велиев. – Баку: Чашыоглы, 2010. – 168 с.

Поступила в редакцию 15 ноября 2016 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2017, vol. 9, no. 2, pp. 13–21

DOI: 10.14529/mmph170202

ON ONE NONLOCAL INVERSE BOUNDARY PROBLEM FOR THE SECOND-ORDER PARABOLIC EQUATION

Ya.T. Mehraliev, A.N. Safarova
Baku State University, Baku, Azerbaijan
E-mail: yashar_aze@mail.ru

The paper is focused on solvability of an inverse boundary problem with an unknown coefficient which depends on time for a second-order parabolic equation with non-classical boundary conditions. The idea of the problem is that together with the solution it is required to determine the unknown coefficient. The problem is considered in the rectangular area. The paper introduces a classical solution of the set problem. At first, an auxiliary inverse boundary problem is examined and the equivalence (in some sense) of the original problem is proved. First, we apply a method of variable separation to analyze the auxiliary inverse boundary problem. Then, we examine a spectral problem for an ordinary second-order differential equation with integral conditions. Having used a formal scheme of the method of variable separation, the solution of a direct boundary problem (in case of specified unknown function) resolves itself into solution of Cauchy problem. After that the solution is limited to the solution of a countable system of integro-differential equations in Fourier coefficients. In its turn, the last system regarding unknown Fourier coefficients is recorded in the form of an integro-differential equation in the desired solution. Using relevant additional conditions of the auxiliary inverse boundary problem, we obtain a system of two nonlinear integral equations for defining unknown functions. Thus, the solution of the auxiliary inverse boundary problem comes down to the system of two nonlinear integro-differential equations in unknown functions. The specific Banach space is designed. Then, in the sphere made of the Banach space we with the help of contracted mapping prove the solvability of the nonlinear integro-differential equations set, which is a unique solution of the additional inverse boundary problem. Using the equivalence of problems, it is concluded about existence and uniqueness of a classical solution of the original problem.

Keywords: inverse boundary problem; parabolic equation; Fourier method; classical solution.

References

1. Gordeziani D.G., Avalishvili G.A. *Matematicheskoe modelirovanie*, 2000, Vol. 12, no. 1, pp. 94–103. (in Russ.).
2. Bitsadze A.V., Samarskiy A.A. *DAN SSSR*, 1969, Vol. 85, no. 4, pp. 739–740. (in Russ.).
3. Gordeziani D.G. *Seminar Instituta prikladnoy matematiki pri Tbilisskom universitete* (Seminar of the Institute of Applied Mathematics at Tbilisi University), 1970, no. 2, p. 38–40. (in Russ.).
4. Gordeziani D.G., Dzhioev D.Z. O razreshimosti odnoy kraevoy zadachi dlya nelineynogo uravneniya ellipticheskogo tipa (On the solvability of a boundary value problem for a nonlinear equation of elliptic type). *Soobshch. AN GSSR* (Communication of AN GSSR), 1972, Vol. 68, no. 4, pp. 289–292. (in Russ.).
5. Kapustin N.Yu., Moiseev E.I. Convergence of spectral expansions for functions of the hölder class for two problems with a spectral parameter in the boundary condition. *Differential Equations*, 2000, Vol. 36, Issue 8, pp. 1182–1188. DOI:10.1007/BF02754186
6. Moiseev E.I., Kapustin N.Yu. *Doklady akademii nauk*, 2002, Vol. 385, no. 1, pp. 20–24. (in Russ.).
7. Khudaverdiev K.I., Veliev A.A. *Issledovanie odnomernoy smeshannoy zadachi dlya odnogo klassa psevdogiperbolicheskikh uravneniy tret'ego poryadka s nelineynoy operatornoy pravoy chast'yu* (The study of one-dimensional mixed problem for one class of quasi-hyperbolic third-order equations with a nonlinear operator right side). Baku, Chashyogly Publ., 2010, 168 p. (in Russ).

Received November 15, 2016