УДК 517.95 DOI: 10.14529/mmph170204

ОБ ОДНОЙ СКАЛЯРНОЙ ФОРМЕ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ШВАРЦА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯХ

В.Г. Николаев
Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого, Великий Новгород, Российская Федерация
E-mail: vg14@inbox.ru

Изучена задача Шварца для 2-вектор-функций, аналитических по Дуглису с матрицей *J*, имеющей разные собственные числа. Проведена редукция задачи Шварца к равносильной граничной задаче для скалярного функционального уравнения. Эта редукция применена для доказательства трех теорем существования и единственности решений задачи Шварца в областях, ограниченных контуром Ляпунова.

Ключевые слова: матрица; жорданова форма; собственное число; собственный вектор; голоморфная функция; контур Ляпунова.

1. Основные определения и постановка задачи

Определение 1. [1–3] *Пусть $n\times n$-матрица J не имеет вещественных собственных чисел. Аналитической по Дуглису или J-аналитической с матрицей J называется комплексная n-вектор-функция $\phi=\phi(z)\in C^1(D)$, для которой в области $D\subset \mathrm{R}^2$ выполнено уравнение*

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}-J\frac{\partial\phi}{\partial x}=0. \tag{1}$$

Замечание 1. Из (1) вытекает, что J-аналитические функции определены с точностью до вектор-постоянной.

Определение 2. *В скалярном случае при $J=\lambda$, $\operatorname{Im}\lambda\neq 0$ функцию $\mathrm{f}=\mathrm{f}_\lambda(z)\in C^1(D)$, для которой в области $D\subset \mathrm{R}^2$ выполнено уравнение*

$$\frac{\partial \mathrm{f}_\lambda}{\partial y}-\lambda\frac{\partial \mathrm{f}_\lambda}{\partial x}=0,$$

будем называть λ-голоморфной в области D.

В [1] показано, что система уравнений в частных производных первого порядка (1) является эллиптической. Рассмотрим для нее при $n=2$ следующую граничную задачу Шварца [1–3].

Пусть конечная односвязная область $D\subset \mathrm{R}^2$ ограничена контуром Γ. Требуется найти J-аналитическую с матрицей J в области D 2-вектор-функцию $\phi(z)\in C(\overline{D})$, которая удовлетворяет граничному условию

$$\operatorname{Re}\phi(z)|_\Gamma=(\psi_1,\psi_2), \tag{2}$$

где вещественная 2-вектор-функция $\psi=(\psi_1,\psi_2)\in C(\Gamma)$ задана.

Как известно [1], свойства λ-голоморфных функций тождественны свойствам обычных голоморфных $(\lambda=i)$ функций. В частности, однородная $(\psi\equiv 0)$ задача (2) для них имеет только постоянные решения. Но при $n>1$ это уже не так: можно построить [3] при произвольном n решения однородной задачи Шварца в виде квадратичных вектор-форм. Один из таких примеров для $n=2$ приведен в конце статьи. Поэтому вопрос существования и единственности решений задачи (2) является нетривиальным.

В теореме 1 задача Шварца для 2×2-матриц, имеющих разные собственные числа, преобразована к равносильному скалярному *функциональному* уравнению. Затем это уравнение применено к изучению неоднородной задачи Шварца – теоремы 3–5.

2. Редукция задачи Шварца к скалярному уравнению при $n=2$

Ниже будем обозначать через f_λ и g_μ соответственно λ- и μ-голоморфные функции (см. определение 2). Символами x,y обозначаем векторы из C^2. Соответственно, $\overline{\mathrm{x}},\overline{\mathrm{y}}$ – комплексное сопряжение векторов x, y. Обозначим через $Q=(\mathrm{x},\mathrm{y})$ жорданов базис матрицы J. Имеет место

Теорема 1. *Пусть* 2×2*-матрица* J *имеет собственный вектор* y *не кратный вещественному и разные собственные числа* $\lambda \neq \mu$. *Тогда разрешимость задачи Шварца для произвольной граничной* 2*-вектор-функции* $\psi \in C(\Gamma)$ *равносильна разрешимости скалярной задачи*

$$\mathrm{g}_\mu + \overline{\mathrm{f}}_\lambda + l\cdot \mathrm{f}_\lambda|_\Gamma = \varphi(t),\ \ \mathrm{f}_\lambda, \mathrm{g}_\mu \in C(\overline{D}),\ \ l = \frac{\det(\mathrm{x}, \overline{\mathrm{y}})}{\det(\mathrm{x}, \mathrm{y})} \in \mathrm{C} \tag{3}$$

для произвольной скалярной комплексной функции $\varphi(t) \in C(\Gamma)$.

Замечание 2. Решения задачи Шварца (однородной или неоднородной) существуют одновременно для всех матриц J из условия теоремы 1 с одинаковым *по модулю* числом l в (3).

$\triangleright$ Действительно, пусть известно, что (3) выполнено при некотором $l' \in \mathrm{C}$, и пусть $l \in \mathrm{C}$ – другое число, причем $|l| = |l'|$. Умножим обе части левого уравнения (3) на такое число $a \in \mathrm{C}$, чтобы $l = al'/\overline{a}$. Тогда первое уравнение в (3) примет следующий вид:

$$a\varphi|_\Gamma = a\,\mathrm{g}_\mu + a\,\overline{\mathrm{f}}_\lambda + al'\,\mathrm{f}_\lambda = a\,\mathrm{g}_\mu + \overline{\overline{a}\,\mathrm{f}}_\lambda + \frac{a}{\overline{a}}\cdot l'\cdot \overline{a}\,\mathrm{f}_\lambda. \tag{4}$$

Переобозначим в (4):

$$\mathrm{g}_\mu = a\,\mathrm{g}_\mu,\quad \mathrm{f}_\lambda = \overline{a}\,\mathrm{f}_\lambda,\quad l = \frac{a}{\overline{a}}l',\quad \varphi = a\varphi. \tag{5}$$

Из (4) и (5) вытекает, что (3) выполняется одновременно для l и l', где $|l| = |l'|$, если граничная функция φ – произвольная. $\triangleleft$

Доказательство теоремы 1. Пусть $J_1 = \operatorname{diag}(\lambda, \mu)$ – жорданова форма матрицы J. По условию $Q = (\mathrm{x}, \mathrm{y})$ – жорданов базис матрицы J. Разложим вектор $\overline{\mathrm{y}}$ по базису x, y:

$$\overline{\mathrm{y}} = l_1\,\mathrm{x} + l\,\mathrm{y},\quad l_1, l \in \mathrm{C},\quad l = \frac{\det(\mathrm{x}, \overline{\mathrm{y}})}{\det(\mathrm{x}, \mathrm{y})}. \tag{6}$$

В (6) использованы формулы Крамера. Поскольку $J\,\mathrm{x} = \lambda\,\mathrm{x}$, $J\,\mathrm{y} = \mu\,\mathrm{y}$, то

$$J\,\overline{\mathrm{y}} = J(l_1\,\mathrm{x} + l\,\mathrm{y}) = \lambda l_1\,\mathrm{x} + \mu l\,\mathrm{y} + \lambda l\,\mathrm{y} - \lambda l\,\mathrm{y} = \lambda(l_1\,\mathrm{x} + l\,\mathrm{y}) + (\mu - \lambda)l\,\mathrm{y} = \lambda\,\overline{\mathrm{y}} + (\mu - \lambda)l\,\mathrm{y}.$$

Таким образом, матрица $J_1 = (Q')^{-1}JQ'$ оператора J в базисе $Q' = (\overline{\mathrm{y}}, \mathrm{y})$ будет иметь следующий вид:

$$J_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ (\lambda - \mu)l & \mu \end{pmatrix}. \tag{7}$$

После подстановки $J = Q'J_1(Q')^{-1}$ в (1) и умножения обеих частей на $(Q')^{-1}$ получим с учетом (7) следующие два равенства:

$$\frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix} \mathrm{f} \\ \mathrm{g} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ (\lambda - \mu)\,l & \mu \end{pmatrix}\cdot \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} \mathrm{f} \\ \mathrm{g} \end{pmatrix} = 0, \qquad (\mathrm{f}, \mathrm{g})^T = (Q')^{-1}\phi. \tag{8}$$

Из первого равенства в (8) вытекает, что

$$\mathrm{f} = \mathrm{f}_\lambda = \mathrm{u} + i\,\mathrm{v}, \qquad \mathrm{g} = \mathrm{g}_\mu + l\cdot \mathrm{f}_\lambda = \mathrm{p} + i\,\mathrm{q}, \tag{9}$$

где функции $\mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{p}, \mathrm{q}$ – вещественные.

Допустим, что $\phi = \phi(z) \in C(\overline{D})$ во втором уравнении в (8) – решение задачи Шварца с некоторой граничной функцией $\psi \in C(\Gamma)$. Тогда функции f, g в (9) известны *a priori*. Обозначим вектор $\mathrm{y} = (a_1, a_2)$, где $a_1, a_2 \in \mathrm{C}$. Тогда решение $\phi(z)$ с учетом (8) можно записать в виде

$$\phi(z) = Q'\cdot(\mathrm{f},\ \mathrm{g})^T = (\overline{\mathrm{y}},\ \mathrm{y})\cdot(\mathrm{f},\ \mathrm{g})^T = \begin{pmatrix} \overline{a}_1 & a_1 \\ \overline{a}_2 & a_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \mathrm{u} + i\,\mathrm{v} \\ \mathrm{p} + i\,\mathrm{q} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Теперь граничное условие (2) принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\left[\overline{a}_1(\mathrm{u} + i\,\mathrm{v}) + a_1(\mathrm{p} + i\,\mathrm{q})\right]|_\Gamma = \psi_1, \\ \operatorname{Re}\left[\overline{a}_2(\mathrm{u} + i\,\mathrm{v}) + a_2(\mathrm{p} + i\,\mathrm{q})\right]|_\Gamma = \psi_2. \end{cases} \tag{11}$$

Заметим, что для $k = 1, 2$ справедливо тождество

$$\operatorname{Re}[\overline{a}_k(\mathrm{u}+i\,\mathrm{v})+a_k(\mathrm{p}+i\,\mathrm{q})]|_{\mathrm{u}=-\mathrm{p},\,\mathrm{v}=\mathrm{q}}=\operatorname{Re}\,[\overline{a}_k(-\mathrm{p}+i\,\mathrm{q})-\overline{\overline{a}_k(-\mathrm{p}+i\,\mathrm{q})}]=0. \qquad (12)$$

Поэтому единственное решение (11) как алгебраической системы относительно u,v можно найти в виде:

$$\mathrm{u}=-\mathrm{p}+\mathrm{r}(\psi_1,\psi_2), \qquad \mathrm{v}=\mathrm{q}+h(\psi_1,\psi_2), \qquad (13)$$

где $\mathrm{r}(\cdot)$, $\mathrm{h}(\cdot)$ – линейные функции своих переменных.

$\triangleright$ Действительно, обозначим $a_1=a+bi$, $a_2=c+di$, $a,b,c,d\in\mathrm{R}$. Тогда после подстановки (13) в (11) имеем в силу (12):

$$\begin{cases}\operatorname{Re}\,\left[\overline{a}_1(\mathrm{r}+i\,\mathrm{h})\right]=\operatorname{Re}\,\left[(a-bi)(\mathrm{r}+i\,\mathrm{h})\right]|_\Gamma=a\mathrm{r}+b\,\mathrm{h}=\psi_1,\\ \operatorname{Re}\,\left[\overline{a}_2(\mathrm{r}+i\,\mathrm{h})\right]=\operatorname{Re}\,\left[(c-di)(\mathrm{r}+i\,\mathrm{h})\right]|_\Gamma=c\,\mathrm{r}+d\,\mathrm{h}=\psi_2.\end{cases}$$

Так как по условию собственный вектор $\mathrm{y}=(a_1,\ a_2)=(a+bi,\ c+di)$ матрицы J не кратен вещественному, то определитель

$$\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}\neq 0.$$

Поэтому алгебраическая система

$$\begin{cases}a\cdot\mathrm{r}+b\cdot\mathrm{h}=\psi_1,\\ c\cdot\mathrm{r}+d\cdot\mathrm{h}=\psi_2,\end{cases} \qquad a,b,c,d\in\mathrm{R} \qquad (14)$$

имеет единственное решение относительно переменных r,h, откуда и вытекает (13). $\triangleleft$

Далее заметим, что пара равенств вещественных функций (13) равносильна одному комплексному функциональному уравнению

$$\mathrm{u}-i\,\mathrm{v}+(\mathrm{p}+i\,\mathrm{q})|_\Gamma=\mathrm{r}-i\,\mathrm{h}, \qquad (15)$$

которое имеет место на контуре Γ. С учетом (9) равенство (15) можно записать в виде:

$$\overline{\mathrm{f}}_\lambda+\mathrm{g}_\mu+l\cdot\mathrm{f}_\lambda|_\Gamma=\mathrm{r}(\psi_1,\psi_2)-i\,\mathrm{h}(\psi_1,\psi_2)=\varphi(t), \qquad \mathrm{f}_\lambda,\,\mathrm{g}_\mu\in C(\overline{D}), \qquad (16)$$

что совпадает с первым уравнением в (3).

Число l в (16) задано формулой (6), совпадающей с (3). Таким образом, существование решения $\phi(z)$ задачи Шварца означает разрешимость (16) для некоторой граничной функции φ. Но если граничная вектор-функция $\psi=(\psi_1,\psi_2)$ в (2) при этом произвольна, то и $\varphi=(\mathrm{r},-\mathrm{h})$ в (16), т. е. и в (3), будет произвольной. Действительно, взаимосвязь между парами вещественных функций r,h и ψ_1,ψ_2 определяется неособой системой (14). Напомним, что коэффициенты (14) определяются по вектору $\mathrm{y}=(a+bi,\,c+di)$ – собственному вектору матрицы J.

В обратную сторону: пусть задача (16), т. е. и (3), разрешима для любой граничной функции φ. Найдем по заданной функции $\psi=(\psi_1,\psi_2)$ с помощью (14) функцию $\varphi=\mathrm{r}-i\,\mathrm{h}$. Пусть $\mathrm{f}_\lambda,\mathrm{g}_\mu$ – решение (16) с этой функцией φ. Тогда в силу (8) и (9) решение задачи Шварца дается формулой

$$\phi(z)=Q'\cdot(\mathrm{f},\mathrm{g})^T=(\overline{\mathrm{y}},\mathrm{y})\cdot(\mathrm{f}_\lambda,\ \mathrm{g}_\mu+l\cdot\mathrm{f}_\lambda)^T. \qquad (17)$$

Теорема 1 доказана.

3. Применение теоремы 1 к доказательству существования решений задачи Шварца при $n=2$

Применим уравнение (3) к неоднородной задаче Шварца. Вместо произвольного контура $\Gamma=\partial D$ будем рассматривать кривую Ляпунова. Все решения будем искать в классе функций, непрерывных по Гельдеру. В связи с этим напомним известное

Определение 3. *Гладкая кривая* $\Gamma\subset\mathrm{R}^2$ *называется кривой (контуром) Ляпунова, если существуют такие два вещественных числа* $a>0$ *и* b, $0<b\le 1$, *что для любых двух точек* $z_1,z_2\in\Gamma$ *выполняется условие Ляпунова*

$$|\,\theta\,|<a\cdot|\,z_1-z_2\,|^b,$$

где θ *– угол между касательными или нормалями к* Γ *точках* z_1,z_2.

Ниже будет использован следующий результат, полученный А.П. Содатовым в [2].

Теорема 2. *Пусть кривая* $\Gamma = \partial D$ *– кривая Ляпунова, пусть* $(\operatorname{Im}\lambda)\cdot(\operatorname{Im}\mu) < 0$. *Тогда для любой граничной функции* φ *из класса Гельдера* $H^{\sigma}(\Gamma)$, $0 < \sigma < 1$ *решение задачи*

$$\mathrm{f}_{\lambda}(z) + \mathrm{g}_{\mu}(z)|_{\Gamma} = \varphi(z), \quad \mathrm{f}_{\lambda},\, \mathrm{g}_{\mu} \in H^{\sigma}(\overline{D})$$

существует и единственно (с точностью до постоянной).

Из теорем 1, 2 вытекают три приведенные ниже теоремы.

Теорема 3. *Пусть в условиях теоремы* 1 $\Gamma = \partial D$ *– контур Ляпунова. При этом собственные векторы матрицы* J *комплексно сопряжены:* $\mathrm{x} = \overline{\mathrm{y}}$. *Тогда для любой граничной функции* $\psi \in H^{\sigma}(\Gamma)$, $0 < \sigma < 1$ *решение задачи Шварца в классе* $\phi \in H^{\sigma}(\overline{D})$ *существует и единственно с точностью до вектор-постоянной.*

Доказательство. Положим в (3) $\mathrm{x} = \overline{y}$, тогда $l = 0$. В результате для (3) оказывается выполненным утверждение теоремы 2. Поэтому из теоремы 1 вытекает утверждение настоящей теоремы.

Теорема 4. *Пусть в условиях теоремы* 1 $\Gamma = \partial D$ *– контур Ляпунова. При этом матрица* J *имеет вещественный собственный вектор* x. *Тогда выполнено утверждение теоремы 3.*

Если при этом граничная функция $\psi \in C^2(\Gamma)$, *то решение* $\phi = \phi(z)$ *задачи Шварца обладает свойством*

$$\frac{\partial \phi}{\partial x},\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \in H^{\sigma}(\overline{D}). \tag{18}$$

Доказательство. Если в (3) вектор x вещественный, то $|l| = 1$.

Покажем, что при каждом таком $l \in \mathrm{C}$ решение задачи (3) всегда существует и единственно, если Γ – контур Ляпунова и $\varphi \in H^{\sigma}(\Gamma)$.

$\triangleright$ В силу замечания 2 достаточно рассмотреть случай $l = 1$. Обозначим: $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$, $\mathrm{f}_{\lambda} = \mathrm{u} + i\,\mathrm{v}$, $\mathrm{g}_{\mu} = \mathrm{p} + i\,\mathrm{q}$. Тогда (3) запишется в виде

$$\mathrm{p} + i\mathrm{q} + \mathrm{u} - i\mathrm{v} + \mathrm{u} + i\mathrm{v} = \mathrm{p} + i\mathrm{q} + 2\mathrm{u}|_{\Gamma} = \varphi_1 + \varphi_2 i. \tag{19}$$

Из (19) имеем: $\mathrm{q}|_{\Gamma} = \varphi_2$. Согласно известной теореме [4], μ-голоморфная функция $\mathrm{g}_{\mu}(z) \in H^{\sigma}(\overline{D})$ может быть единственным образом (с точностью до постоянной) восстановлена по граничному значению своей мнимой части $\varphi_2 \in H^{\sigma}(\Gamma)$. Тот же результат будет и для реальной части.

Тогда из (19) станет известно граничное значение реальной части функции f_{λ}, т. е. $\mathrm{u}|_{\Gamma} = 1/2(\varphi_1 - \mathrm{p}) \in H^{\sigma}(\Gamma)$. Отсюда в силу той теоремы из [4] можно однозначно восстановить функцию $\mathrm{f}_{\lambda} \in H^{\sigma}(\overline{D})$. $\triangleleft$

Таким образом, в силу теоремы 1 для произвольного l, $|l| = 1$ справедливо и утверждение теоремы 3.

Пусть теперь $\psi \in C^2(\Gamma)$. Это означает с учетом (14), что первые производные функций $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ и $\varphi = (r, -h)$ непрерывны по Гельдеру на Γ. Отсюда согласно [4] восстановленные из (19) функции $\mathrm{f}_{\lambda}, \mathrm{g}_{\mu}$ будут обладать свойством

$$\frac{\partial \mathrm{f}_{\lambda}}{\partial x},\ \frac{\partial \mathrm{f}_{\lambda}}{\partial y},\ \frac{\partial \mathrm{g}_{\mu}}{\partial x},\ \frac{\partial \mathrm{g}_{\mu}}{\partial y} \in H^{\sigma}(\overline{D}). \tag{20}$$

Из (20) в силу (17) вытекает (18). Теорема 4 доказана.

Теорема 5. *Пусть в условиях теоремы 1* $\Gamma = \partial D$ *– контур Ляпунова. При этом матрица* J *имеет комплексно сопряженные собственные числа* $\mu = \overline{\lambda}$. *Тогда при* $l \neq 0$ *в (3) выполнено утверждение теоремы 3*

Доказательство. В данном случае задача (3) примет вид:

$$\mathrm{g}_{\overline{\lambda}} + \overline{\mathrm{f}}_{\lambda} + l \cdot \mathrm{f}_{\lambda}\,|_{\Gamma} = \varphi, \quad \mathrm{g}_{\overline{\lambda}},\ \mathrm{f}_{\lambda} \in H^{\sigma}(\overline{D}), \quad l \neq 0. \tag{21}$$

Функция $\mathrm{g}_{\overline{\lambda}} + \overline{\mathrm{f}}_{\lambda}$ будет $\overline{\lambda}$-голоморфной. Поскольку $(\mathrm{Im}\ \lambda) \cdot (\mathrm{Im}\ \overline{\lambda}) < 0,$ то для задачи (21) при $l \neq 0$ выполнена теорема 2. Отсюда в силу теоремы 1 справедливо утверждение теоремы 3. Теорема 5 доказана.

Замечание 3. Условие $l \neq 0$ в (21) соответствует матрице J, не имеющей комплексно сопряженных собственных векторов. Из (21) следует, что при $l = 0$ решение задачи Шварца для матриц из условия теоремы 5 не единственно и не всегда существует.

Теоремы 3 и 4 означают в частности, что при $\lambda \neq \mu$ и при $l = \{0; 1\}$ однородное $(\varphi \equiv 0)$ уравнение (3) имеет только тривиальные решения. Покажем, что такое его свойство справедливо не для всех l.

Пример 1. Пусть

$$J = \begin{pmatrix} 4i & 12 \\ \frac{1}{2} & -i \end{pmatrix}, \qquad \phi(z) = \begin{pmatrix} -2x^2 - 16y^2 + 1 + 8xyi \\ (x^2 + 2y^2) \cdot i \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Матрица J имеет разные собственные числа $\lambda = i$ и $\mu = 2i$. Функция $\phi(z)$ будет согласно определению 1 J-аналитической с матрицей J. При этом $\mathrm{Re}\,\phi(z)|_{\Gamma} = 0$ на эллипсе $\Gamma:\ 2x^2 + 16y^2 = 1.$

Таким образом, (22) доставляет пример нетривиального решения однородной задачи Шварца (2), которому в силу (14) соответствует $\varphi \equiv 0$ в (3).

Прямые вычисления показывают, что для матрицы J (22) собственные векторы x, y и число l (3) имеют, соответственно, вид:

$$\mathrm{x} = (2i,\ \frac{1}{2}), \quad \mathrm{y} = (3i,\ \frac{1}{2}), \quad l = \frac{\det(\mathrm{x}, \overline{\mathrm{y}})}{\det(\mathrm{x}, \mathrm{y})} = 5.$$

Следовательно, в силу теоремы 1 и замечания 2 при $|l| = 5$ однородное уравнение (3) имеет решение в виде квадратичных функций $\mathrm{f}_{\lambda}(z)$ и $\mathrm{g}_{\mu}(z)$.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках выполнения государственного задания (проект 1.6644.2017/БЧ).

Литература

1. Солдатов, А.П. Функции, аналитические по Дуглису / А.П. Солдатов. – Изд-во НовГУ, 1995. – 196 с.

2. Николаев, В.Г. О решении задачи Шварца для *J*-аналитических функций в областях, ограниченных контуром Ляпунова / В.Г. Николаев, А.П. Солдатов / Дифференциальные уравнения. – 2015. – Т. 51, № 7. – С. 965–969. DOI: 10.1134/S0374064115070158

3. Николаев, В.Г. О некоторых свойствах *J*-аналитических функций / В.Г. Николаев // Вестник СамГУ, естественнонаучная серия. – 2013. – Т. 3(104). – С. 25–32.

4. Мусхелишвили, Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / Н.И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1968. – 342 с.

Поступила в редакцию 13 октября 2016 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2017, vol. 9, no. 2, pp. 30–35

DOI: 10.14529/mmph170204

ONE FORM OF THE SCALAR TWO-DIMENSIONAL SCHWARZ PROBLEM AND ITS APPLICATIONS

V.G. Nikolaev
Federal State-Funded Educational Institution of Higher Vocational Education "Yaroslav-the-Wise Novgorod State University", Velikiy Novgorod, Russian Federation
E-mail: vg14@inbox.ru

The paper deals with the problem of existence and uniqueness of the Schwarz problem solution for 2-vector-functions, being analytic on Douglis, in regions bounded by the Lyapunov contour, and in classes of functions that are Holder continuous. However, the matrix J should have different eigenvalues λ, μ, and at least one eigenvector that is not multiple of the real one.

At the beginning of the paper, the inhomogeneous Schwarz problem with a boundary function ψ is transformed. As a result of the performed reduction the Schwarz problem turns into an equivalent boundary problem for an inhomogeneous scalar functional equation. It connects boundary values of λ- and μ-holomorphic functions f, g, defined in the plane region D, with a certain boundary function φ, which is constructed by ψ.

This functional equation for different matrices J is distinguished only by a complex coefficient 1, which is calculated using the matrix J. In this case the following circular property is found: the Schwarz problem is solvable or not simultaneously for all matrices, which coefficient module is equal. That's why without loss of generality 1 can be considered a real number. It's proved that the studied functional equation for cases $l = 0$ and $|l| = 1$ has a unique solution for any right side of φ. The matrices J having complex conjugate eigenvectors and one real eigenvector correspond to these two cases. Therefore, for these matrices the inhomogeneous Schwarz problem in case of any boundary function ψ has the unique solution. We consider absolutely and irrespectively the case when the matrix J has complex conjugate eigenvalues.

At the end of the paper it's shown that in case of $|l| = 5$ the homogeneous ($\varphi = 0$) functional equation has a nontrivial solution.

Keywords: matrix; Jordan canonical form; eigenvalue; eigenvector; holomorphic function; Lyapunov contour.

References

1. Soldatov A.P. *Funktsii, analiticheskie po Duglisu* (Functions being analytic on Douglis). NovGU Publ., 1995, 196 p. (in Russ.).

2. Nikolaev V.G., Soldatov A.P. On the solution of the Schwarz problem for J-analytic functions in a domain bounded by a Lyapunov contour. *Differential Equations*, 2015, Vol. 51, no. 7, pp. 962–966. DOI: 10.1134/S0012266115070150

3. Nikolaev V.G. On some properties of J-analytical functions. *Vestnik SamGU. Estestvenno-Nauchnaya Ser.*, 2013, no. 3(104), pp. 25–32. (in Russ.).

4. Muskhelishvili N.I. *Singulyarnye integral'nye uravneniya* (Singular integral equation). Moscow, Nauka Publ., 1968, 342 p. (in Russ.).

Received October 13, 2016