УДК 519.857 DOI: 10.14529/mmph170205

ОБ ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ПОМЕХИ

В.И. Ухоботов
Челябинский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация
E-mail: ukh@csu.ru

Рассматривается линейная задача управления при наличии воздействия со стороны неконтролируемой помехи. Её значения принадлежат компакту. Управление ищется в виде произведения скалярной функции на векторную функцию. Терминальная часть платы зависит от модуля линейной функции вектора состояния. Интегральная составляющая платы является интегралом на отрезке от степени скалярной функции. Найдены необходимые и достаточные условия, при выполнении которых допустимое управление является оптимальным.

Ключевые слова: управление; помеха; дифференциальная игра.

Введение

Линейную задачу управления при наличии воздействия со стороны неконтролируемой помехи и с фиксированным моментом окончания с помощью линейной замены переменных [1] можно свести к виду, когда в правой части новых уравнений стоит только сумма управления и помехи, значения которых принадлежат заданным множествам, зависящим от времени. В случае, если в линейной задаче управления с помехой платой является значение в заданный момент времени модуля линейной функции, то линейная замена переменных приводит к однотипной задаче, когда множества значений управления и помехи являются отрезками, зависящими от времени. В более общем случае такие задачи характеризуются тем, что вектограммами управления и помехи являются шары, радиусы которых зависят от времени. Такую динамику имеют после замены и известные дифференциальные игры «изотропные ракеты» [2], контрольный пример Л.С. Понтрягина [3]. Для таких дифференциальных игр в случае, когда терминальное множество является шаром заданного радиуса, в [3] построен альтернированный интеграл. В [4] построены оптимальные позиционные стратегии игроков. В работе [5] построен альтернированный интеграл для однотипных игр с произвольным выпуклым замкнутым терминальным множеством и построены оптимальные позиционные управления игроков. В работе [6] первый игрок, выводя фазовую точку на круг заданного радиуса, минимизирует интегральную плату, которая задается выпуклой функцией от нормы его управления.

В настоящей работе рассматривается однотипная задача управления с помехой, в которой управление строится из условия минимизации платы, являющейся суммой как терминальной, так и интегральной составляющих. Доказана теорема существования оптимального управления с достаточно широкими ограничениями на рассматриваемый класс задач. Найдены необходимые и достаточные условия, при выполнении которых допустимое управление является оптимальным.

Постановка задачи

Рассматривается управляемый процесс

$$\dot{x} = A(t)x + \varphi B(t)\xi + \eta,\ x(t_0) = x_0;\quad x \in R^m,\quad t \le p. \tag{1}$$

Здесь p – заданный момент окончания процесса управления, а t_0 – начальный момент времени; $\varphi \in R$ и $\xi \in M$ являются управлениями, причем множество M является связным симметричным относительно начала координат компактом в R^s; помеха η принадлежит связному компакту $Q \subset R^m$; $A(t)$ и $B(t)$ – непрерывные при $t_0 \le t \le p$ матрицы соответствующих размерностей.

Определим допустимое управление. Для любого числа $\rho \ge 1$ обозначим через $L_\rho[t_0, p]$ пространство измеримых функций $\phi : [t_0, p] \to R$ с суммируемой на отрезке $[t_0, p]$ степенью $|\phi(r)|^\rho$.

Задано число $q > 1$. Допустимым управлением являются неотрицательная функция $\varphi(\cdot) \in L_q[t_0, p]$ и произвольная функция $\xi : [t_0, p] \times R^m \to M$. Помеха реализуется в виде произвольной функции $\eta : [t_0, p] \times R^m \to Q$.

Такое определение допустимого управления продиктовано следующим соображением. В задачах управления механическими системами переменного состава, движение в которых описывается уравнением Мещерского [7], возможен случай, когда закон изменения реактивной массы нужно задавать программным образом, а управлять можно только направлением относительной скорости ее отделения. В этом случае приходим к сформулированному выше допустимому управлению.

Следуя [1], движения системы (1), порожденные допустимыми управлением и помехой, определим с помощью ломаных.

Возьмем разбиение ω отрезка $[t_0, p]$ с диаметром $d(\omega)$

$$\omega: t_0 < t_1 < ... < t_j < t_{j+1} = p, \quad d(\omega) = \max(t_i - t_{i+1}), i = \overline{0, j} .$$

Положим $x_\omega(t_0) = x_0$ и при $t_i \le t \le t_{i+1}, i = \overline{0, j}$

$$\dot{x}_\omega(t) = A(t)x_\omega(t) + \varphi(t)B(t)\xi(t_i, x_\omega(t_i)) + \eta(t_i, x_\omega(t_i)) . \quad (2)$$

Можно показать, что семейство ломаных (2), определенных на отрезке $[t_0, p]$, является равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным [4, с. 56]. По теореме Арцела [8, с. 104], из любой последовательности ломаных (2) можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся на отрезке $[t_0, p]$. Под движением, реализовавшимся при допустимых $\varphi(t), \xi(t, x), \eta(t, x)$ из начального состояния $x(t_0) = x_0$, будем понимать любой равномерный предел последовательности ломаных (2), у которых диаметр разбиения $d(\omega)$ стремится к нулю.

Показателем качества управления является величина

$$G\left(\left|\langle \psi_0, x(p)\rangle - C\right|\right) + \int_{t_0}^{p} \varphi^q(r)dr . \quad (3)$$

Здесь $\psi_0 \in R^m$ – заданный вектор; $\langle \cdot,\cdot \rangle$ – скалярное произведение в R^m; C – заданное число; $G: R_+ \to R$ – заданная функция.

Управление строится исходя из принципа минимизации гарантированного результата [1] показателя качества (3).

Переход к одномерной однотипной задаче

Следуя [1, с. 160], перейдем к новой управляемой системе, в уравнениях движения которой отсутствует фазовый вектор. Рассмотрим при $t_0 \le t \le p$ решение $\psi(t)$ задачи Коши:

$$\dot{\psi} = -A^*(t)\psi, \quad \psi(t_0) = \psi_0 . \quad (4)$$

Здесь $A^*(t)$ – транспонированная матрица. Положим

$$b_-(t) = \min_{\eta \in Q}\langle \psi(t), \eta \rangle, \quad b_+(t) = \max_{\eta \in Q}\langle \psi(t), \eta \rangle . \quad (5)$$

Тогда из связности компакта Q следует [9, с. 333, теорема 4], что

$$\langle \psi(t), \eta \rangle = \frac{1}{2}\left(b_+(t) + b_-(t)\right) + b(t)v, \quad |v| \le 1, b(t) = \frac{1}{2}\left(b_+(t) - b_-(t)\right) \ge 0 . \quad (6)$$

Обозначим

$$a(t) = \max_{\xi \in M}\langle \psi(t), B(t)\xi \rangle . \quad (7)$$

Из связности и из симметрии компакта M следует, что $a(t) \ge 0$ и

$$\langle \psi(t), B(t)\xi \rangle = -a(t)u, |u| \le 1 . \quad (8)$$

Отметим, что функции (5) и (7) являются непрерывными [10, лемма II.3.5]. Следовательно, непрерывной является и функция $b(t)$ (6).

Перейдем к новой переменной

$$z = \langle \psi(t), x \rangle + \frac{1}{2}\int_{t}^{p}\left(b_+(r) + b_-(r)\right)dr - C . \quad (9)$$

Тогда из (4) и (9) следует, что $z(p)=\langle\psi_0, x(p)\rangle - C$, а ломаная $z_\omega(t)$, отвечающая ломаной (2), определяется равенствами

$$\dot z_\omega(t) = -\varphi(t)a(t)u_i + b(t)v_i, \quad |u_i|\le 1, \quad |v_i|\le 1.$$

Таким образом, получили одномерную однотипную задачу управления

$$\dot z = -\varphi(t)a(t)u + b(t)v, \quad z(t_0)=z_0; \quad \varphi(t)\ge 0, \quad |u|\le 1, \quad |v|\le 1. \tag{10}$$

с критерием качества

$$G(|z(p)|) + \int_{t_0}^{p}\varphi^q(r)dr \to \min_u \max_v . \tag{11}$$

В этой задаче допустимым управлением являются неотрицательная функция $\varphi(\cdot)\in L_q[t_0,p]$ и произвольная функция $u(t,z)$ с $|u(t,z)|\le 1$. Допустимой помехой является произвольная функция $v(t,z)$ с $|v(t,z)|\le 1$. Движение $z(t)$ определяется как равномерный предел последовательности ломаных

$$z_\omega(t) = z_\omega(t_i) - \int_{t_i}^{t}\varphi(r)a(r)dr\, u(t_i, z_\omega(t_i)) + \int_{t_i}^{t} b(r)dr\, v(t_i, z_\omega(t_i)), \quad t_i\le t\le t_{i+1}$$

с диаметром разбиения $d(\omega)\to 0$.

Определение 1. Решением задачи (10), (11) называется допустимое управление $\varphi_0(t), u_0(t,z)$ и число V_0 такие, что

1) для любой допустимой помехи $v(t,z)$ и для любого движения $z(t)$ с начальным условием $z(t_0)=z_0$, порожденного $\varphi_0(t)$, $u_0(t,z)$ и $v(t,z)$, выполнено неравенство:

$$G(|z(p)|) + \int_{t_0}^{p}\varphi_0^q(r)dr \le V_0 ;$$

2) для любого допустимого управления $\varphi(t), u(t,z)$ и для любого числа $V<V_0$ найдется допустимая помеха $v(t,z)$ такая, что для любого движения $z(t)$ с начальным условием $z(t_0)=z_0$, порожденного $\varphi(t), u(t,z)$ и $v(t,z)$, выполнено неравенство

$$G(|z(p)|) + \int_{t_0}^{p}\varphi^q(r)dr > V .$$

Условия оптимальности в однотипной задаче

Рассмотрим задачу (10), (11) в общем случае, когда z, u, v принадлежат пространству R^n, а $|\cdot|$ – норма в R^n.

Зафиксируем неотрицательную функцию $\varphi(\cdot)\in L_q[t_0,p]$, число $\varepsilon\ge 0$ и рассмотрим дифференциальную игру

$$\dot z = -\varphi(t)a(t)u + b(t)v, \quad |u|\le 1, \quad |v|\le 1 \tag{12}$$

с условием окончания

$$|z(p)|\le\varepsilon . \tag{13}$$

Для полноты изложения считаем, что функции $a(t)\ge 0$ и $b(t)\ge 0$ суммируемы на отрезке $[t_0,p]$, причем $a(\cdot)\in L_l[t_0,p]$. Здесь $l=\dfrac{q}{q-1}$.

Для такой однотипной игры Л.С. Понтрягин [3] построил альтернированный интеграл. Из его вида следует, что начальное положение $z(t_0)$ принадлежит значению альтернированного интеграла в момент времени t_0 тогда и только тогда, когда:

$$f_1(\varphi(\cdot)) = |z(t_0)| + \int_{t_0}^{p} \big(b(r) - \varphi(r)a(r)\big)\,dr \le \varepsilon, \tag{14}$$

$$f_2(\varphi(\cdot)) = \max_{t_0 \le t \le p} \int_{t}^{p} \big(b(r) - \varphi(r)a(r)\big)\,dr \le \varepsilon. \tag{15}$$

Обозначим

$$f(\varphi(\cdot)) = \max\big(f_1(\varphi(\cdot)); f_2(\varphi(\cdot))\big), \tag{16}$$

$$w(z) = \frac{z}{|z|} \text{ при } |z| > 0 \text{ и } w(0) \text{ – любое с ограничением } |w(0)| = 1. \tag{17}$$

Теорема 1 [4, теоремы 8.1 и 8.2]. Для начального состояния $t_0 < p, z(t_0) \in R^n$ в игре (12), (13) управление $u = w(z)$ обеспечивает выполнение неравенства $|z(p)| \le f(\varphi(\cdot))$ для любой функции $|v(t,z)| \le 1$ и для любого реализовавшегося движения $z(t)$. Управление $v = w(z)$ обеспечивает выполнение неравенства $|z(p)| \ge f(\varphi(\cdot))$ для любой функции $|u(t,z)| \le 1$ и для любого реализовавшегося движения $z(t)$.

Из этой теоремы, используя формулу (16), получим, что, если выполнены неравенства (14) и (15), то управление $u = w(z)$ обеспечивает выполнение неравенства (13) для любой функции $|v(t,z)| \le 1$ и для любого реализовавшегося движения $z(t)$. Если же одно из неравенств (14) и (15) не выполнено, то управление $v = w(z)$ обеспечивает выполнение противоположного неравенства $|z(p)| > \varepsilon$ для любой функции $|u(t,z)| \le 1$ и для любого реализовавшегося движения $z(t)$.

Далее будем считать, что выполнено следующее предположение.

Предположение 1. Функция $G : [t_0, +\infty) \to R$ является непрерывной, строго возрастает и $G(\varepsilon) \to +\infty$ при $\varepsilon \to +\infty$.

Рассмотрим задачу

$$f_0(\varepsilon, \varphi(\cdot)) = G(\varepsilon) + \int_{t_0}^{p} \varphi^q(r)\,dr \to \min, \tag{18}$$

$$f_1(\varphi(\cdot)) \le \varepsilon, \quad f_2(\varphi(\cdot)) \le \varepsilon, \quad \varepsilon \ge 0, \quad \varphi(\cdot) \in L_q[t_0, p], \quad \varphi(t) \ge 0. \tag{19}$$

Теорема 2. Пусть $\varepsilon_0 \ge 0$ и $\varphi_0(t)$ – решение задачи (18), (19). Тогда решением задачи (10), (11) являются функции $\varphi_0(t), u = w(z)$ и число $V_0 = f_0(\varepsilon_0, \varphi_0(\cdot))$.

Доказательство. При ε_0 и $\varphi_0(t)$ выполнены неравенства (14) и (15). Поэтому управление $\varphi_0(t)$ и $u = w(z)$ обеспечивает выполнение неравенства $|z(p)| \le \varepsilon_0$ для любой функции $|v(t,z)| \le 1$ и для любого реализовавшегося движения $z(t)$. Из условия возрастания функции G получим, что

$$G(|z(p)|) + \int_{t_0}^{p} \varphi_0^q(r)\,dr \le f_0(\varepsilon_0, \varphi_0(\cdot)) = V_0.$$

Допустим, что существуют число $V < V_0$ и допустимое управление $\varphi(t)$ и $u = w(z)$, которое обеспечивает выполнение неравенства

$$G(|z(p)|) + \int_{t_0}^{p} \varphi^q(r)\,dr < V$$

для любой функции $|v(t,z)| \le 1$ и для любого реализовавшегося движения $z(t)$. Тогда это допустимое управление обеспечивает неравенство

$$\left|z(p)\right| \le G^{-1}\left(V - \int_{t_0}^{p} \varphi^q(r)dr\right) = \varepsilon \tag{20}$$

для любой функции $\left|v(t,z)\right| \le 1$ и для любого реализовавшегося движения $z(t)$. Значит эти $\varepsilon \ge 0$ и $\varphi(t)$ удовлетворяют неравенствам (14) и (15) и, следовательно, ограничениям в задаче (18), (19). Поэтому

$$V_0 \le G(\varepsilon) + \int_{t_0}^{p} \varphi^q(r)dr .$$

Отсюда и из правой части (20) получим противоречие $V_0 \le V$.

Замечание. Поскольку функция (17) удовлетворяет условию $\left|w(z)\right| = 1$, то теорема 2 остается справедливой и для случая, когда ограничение на управление u в задаче (18), имеет вид равенства $|u| = 1$.

Теорема 3. Решение в задаче (18), (19) существует.

Доказательство. Отметим вначале, что функция G ограничена снизу, а связи (19) являются совместными. Из ограниченности снизу функции G и из условия $\varphi(t) \ge 0$ следует, что значения функционала $f_0\left(\varepsilon, \varphi(\cdot)\right)$ ограничены снизу. Обозначим через V_0 значение его нижней грани при ограничениях (19). Тогда существуют последовательности $\varepsilon_i \ge 0,\ \varphi_i : [t_0, p] \to R$, удовлетворяющие ограничениям (19), такие, что

$$\lim_{i\to+\infty} f_0\left(\varepsilon_i, \varphi_i(\cdot)\right) = V_0 . \tag{21}$$

Из (18) следует, что $G(\varepsilon_i) \le f_0\left(\varepsilon_i, \varphi_i(\cdot)\right)$. Отсюда, используя условие $G(\varepsilon) \to +\infty$ при $\varepsilon \to +\infty$, получим, что последовательность чисел ε_i ограничена. Переходя, если нужно к сходящейся подпоследовательности, считаем, что $\varepsilon_i \to \varepsilon_0$. Отсюда и из непрерывности функции $G(\varepsilon)$ следует, что $G(\varepsilon_i) \to G(\varepsilon_0)$. Из формулы (18), из сходимости последовательностей $f_0\left(\varepsilon_i, \varphi_i(\cdot)\right)$ и $G(\varepsilon_i)$ получим, что существует число $D > 0$ такое, что $\int_{t_0}^{p} \varphi_i^q(r)dr \le D$ для всех $i \ge 1$. Считаем, что существует $\lim_{i\to\infty} \int_{t_0}^{p} \varphi_i^q(r)dr$ (иначе перейдем к подпоследовательности).

В пространстве $L_q[t_0, p]$ любой шар слабо компактен [11, с. 256]. Поэтому, переходя, если нужно, к подпоследовательности, считаем, что существует функция $\varphi_0(\cdot) \in L_q[t_0, p]$ такая, что

$$\lim_{i\to\infty} \int_{t_0}^{p} \varphi_i(r)\chi(r)dr = \int_{t_0}^{p} \varphi_0(r)\chi(r)dr \ \text{ для любой функции } \chi(\cdot) \in L_l[t_0, p] \tag{22}$$

и [11, с. 217]

$$\int_{t_0}^{p} \varphi_0^q(r)dr \le \lim_{i\to\infty} \int_{t_0}^{p} \varphi_i^q(r)dr .$$

Из последнего неравенства, используя формулы (18) и (21), получим, что $f_0\left(\varepsilon_0, \varphi_0(\cdot)\right) \le V_0$. Поэтому, если покажем, что ε_0 и $\varphi_0(t)$ удовлетворяют связям (19), то они будут являться решением задачи (18), (19).

Поскольку $\varphi_i(r) \ge 0$ при $r \in [t_0, p]$, то из условия (22) следует [4, с. 61], что $\varphi_0(r) \ge 0$ для почти всех $r \in [t_0, p]$. Используя неравенство Гельдера [11, с. 494–496], можно получить [4, с. 57–58], что

$$\int_t^p \big(b(r)-\varphi_i(r)a(r)\big)\,dr \to \int_t^p \big(b(r)-\varphi_0(r)a(r)\big)\,dr$$

равномерно при $t\in[t_0,p]$. Отсюда следует [4, с. 58], что

$$\max_{t_0\le t\le p}\int_t^p \big(b(r)-\varphi_i(r)a(r)\big)\,dr \to \max_{t_0\le t\le p}\int_t^p \big(b(r)-\varphi_0(r)a(r)\big)\,dr\,.$$

Таким образом, учитывая формулы (14) и (15), можем утверждать, что ε_0 и $\varphi_0(t)$ удовлетворяют связям (19).

Замечание. Если известно решение $\varphi_0(t)$ в задаче (18), (19), то, подставляя его в формулу (8) при $u=w(z)$, где z и $w(z)$ определяются формулами (9) и (17), найдем решение $\xi(t,x)$ в исходной задаче (1).

Приведем достаточные условия, при выполнении которых число ε_0 и функция $\varphi_0(t)$ являются решением задачи (18), (19).

Теорема 4. Пусть число ε_0 и функция $\varphi_0:[t_0,p]\to R$ удовлетворяют условиям (19). Пусть существуют число $\lambda\ge 0$ и неубывающая на отрезке $[t_0,p]$ функция $\theta(t)$, такие, что $\theta(t_0)=0$ и:

$$\int_{t_0}^p \theta(r)\big(b(r)-\varphi_0(r)a(r)\big)\,dr=\theta(p)\varepsilon_0\,, \tag{23}$$

$$\lambda\left(\int_{t_0}^p \theta(r)\big(b(r)-\varphi_0(r)a(r)\big)\,dr+|z(t_0)|-\varepsilon_0\right)=0\,, \tag{24}$$

$$G(\varepsilon_0)-\big(\lambda+\theta(p)\big)\varepsilon_0\le G(\varepsilon)-\big(\lambda+\theta(p)\big)\varepsilon \ \text{ при любом } \varepsilon\ge 0\,, \tag{25}$$

$$\varphi_0(t)=\left(\frac{a(t)}{q}\big(\lambda+\theta(t)\big)\right)^{\frac{1}{q-1}} \ \text{ при } t\in[t_0,p]\,. \tag{26}$$

Тогда число ε_0 и функция $\varphi_0(t)$ являются решением задачи (18), (19).

Доказательство. Возьмем произвольные число $\varepsilon\ge 0$ и функцию $\varphi(\cdot)\in L_q[t_0,p],\varphi(t)\ge 0$. Запишем функцию Лагранжа

$$\Lambda\big(\varepsilon,\varphi(\cdot)\big)=G(\varepsilon)+\int_{t_0}^p \varphi^q(r)dr+\int_{t_0}^p \theta(r)\big(b(r)-\varphi(r)a(r)\big)dr-\theta(p)\varepsilon+\lambda\left(\int_{t_0}^p \big(b(r)-\varphi(r)a(r)\big)\,dr\ +|z(p)|-\varepsilon\right)=$$

$$=G(\varepsilon)-\big(\lambda+\theta(p)\big)\varepsilon+\int_{t_0}^p\Big(\varphi^q(r)-\big(\lambda+\theta(r)+\lambda\big)\varphi(r)a(r)+\big(\lambda+\theta(r)\big)b(r)\Big)dr+\lambda|z(p)|\,.$$

Минимальное значение функции Лагранжа по $\varphi(\cdot)\in L_q[t_0,p],\varphi(t)\ge 0$ находится из условия минимума подинтегрального выражения

$$\beta(\varphi)=\varphi^q-\big(\theta(r)+\lambda\big)\varphi\to\min,\varphi\ge 0\,.$$

Функция $\beta(\varphi)$ является выпуклой. Приравнивая к нулю ее производную, получим, что минимальное значение функции Лагранжа доставляет неотрицательная функция (26). Далее, можно показать [4, с. 63], что функция (26) принадлежит пространству $L_q[t_0,p]$.

Возьмем число ε и функцию $\varphi(t)$, которые удовлетворяют условиям (19). Тогда, используя формулу интегрирования по частям в интеграле Римана–Стилтьеса [12, с. 134], получим, что

$$\int_{t_0}^p \theta(r)\big(b(r)-\varphi(r)a(r)\big)\,dr-\theta(p)\varepsilon=\int_{t_0}^p\left(\int_t^p\big(b(r)-\varphi(r)a(r)\big)\,dr-\varepsilon\right)d\theta(r)\le 0\,.$$

Следовательно,

$$\Lambda\left(\varepsilon,\varphi(\cdot)\right)\le G(\varepsilon)+\int_{t_0}^{p}\varphi^q(r)dr\,.$$

Отсюда и из формул (23), (24) и (25) получим, что

$$G(\varepsilon_0)+\int_{t_0}^{p}\varphi_0^q(r)dr=\Lambda\left(\varepsilon_0,\varphi_0(\cdot)\right)\le\Lambda\left(\varepsilon,\varphi(\cdot)\right)\le G(\varepsilon)+\int_{t_0}^{p}\varphi^q(r)dr\,.$$

Теорема 5. Пусть выполнены условия теоремы 3 и, дополнительно, функция $G:[0,+\infty)\to R$ является выпуклой. Тогда существует решение $\varepsilon_0,\varphi_0(t)$ задачи (18), (19), для которого найдутся число $\lambda\ge 0$ и неубывающая функция $\theta:[t_0,p]\to R$ с $\theta(t_0)=0$, которые удовлетворяют условиям (23)–(26).

Доказательство. Поскольку $b(t)\ge 0$ при $t\in[t_0,p]$, то выполнено неравенство

$$\left|z(t_0)\right|+\int_{t_0}^{p}b(r)dr\ge 0\,. \tag{27}$$

Пусть в (27) стоит знак равенства. Тогда $\left|z(t_0)\right|=0$ и $b(t)=0$ для почти всех $t\in[t_0,p]$. Из формул (14) и (15) получим, что $\varepsilon_0=0$ и $\varphi_0(t)=0$ удовлетворяют ограничением (19). Стало быть, они и будут являться решением задачи (18), (19). В этом случае, условия (23)–(26) выполнены при $\lambda=0$ и $\theta(t)=0$.

Рассмотрим случай, когда в (27) стоит знак строгого неравенства. Возьмем последовательность разбиений

$$\omega_i: t_0=t_0^{(i)}<t_1^{(i)}<\ldots<t_{k_i}^{(i)}<t_{k_i+1}^{(i)}=p\,,$$

диаметры $d(\omega_i)$ которых стремятся к нулю. Рассмотрим оптимизационную задачу

$$f_0\left(\varepsilon,\varphi(\cdot)\right)=G(\varepsilon)+\int_{t_0}^{p}\varphi^q(r)dr\to\min\,, \tag{28}$$

$$f_1\left(\varphi(\cdot)\right)\le\varepsilon;\ \int_{t_j^{(i)}}^{p}\left(b(r)-\varphi(r)a(r)\right)dr\le\varepsilon,\ j=\overline{1,k_i}\,; \tag{29}$$

$$\varepsilon\ge 0,\varphi(\cdot)\in L_q[t_0,p],\varphi(t)\ge 0\ \text{ при }\ t\in[t_0,p]\,. \tag{30}$$

Ограничения (29), (30) являются совместными. Аналогично теореме 3 доказывается, что в задаче (28)–(30) существует решение $\varepsilon_i,\varphi_i(t)$. Эта задача является задачей выпуклого программирования, связи в которой удовлетворяют условию Слейтера. По теореме Куна–Таккера [13, с. 90–91] существует набор множителей Лагранжа $\lambda^{(i)}\ge 0,\lambda_j^{(i)}\ge 0,\ j=\overline{1,k_i}$, такой, что выполнены условия дополняющей нежесткости

$$\lambda^{(i)}\left(\int_{t_0}^{p}\left(b(r)-\varphi_i(r)a(r)\right)dr-\varepsilon_i+\left|z(t_0)\right|\right)=0,\lambda_j^{(i)}\left(\int_{t_j^{(i)}}^{p}\left(b(r)-\varphi_i(r)a(r)\right)dr-\varepsilon_i\right)=0,\ j=\overline{1,k_i} \tag{31}$$

и условие минимума функции Лагранжа $\Lambda_i\left(\varepsilon_i,\varphi_i(\cdot)\right)\le\Lambda_i\left(\varepsilon,\varphi(\cdot)\right)$ для любых ε и $\varphi(\cdot)$, которые удовлетворяют (30). Здесь

$$\Lambda_i\left(\varepsilon,\varphi(\cdot)\right)=G(\varepsilon)+\int_{t_0}^{p}\varphi^q(r)dr+\lambda^{(i)}\left(\int_{t_0}^{p}\left(b(r)-\varphi(r)a(r)\right)dr+\left|z(p)\right|-\varepsilon\right)+$$

$$\sum_{j=1}^{k_i}\lambda_j^{(i)}\left(\int_{t_j^{(i)}}^{p}\left(b(r)-\varphi(r)a(r)\right)dr-\varepsilon\right).$$

С помощью функции

$$\theta_i(t)=\begin{cases}\lambda_1^{(i)}+\ldots+\lambda_{k_i}^{(i)}, & t_{k_i}^{(i)}<t\le p,\\ \lambda_1^{(i)}+\ldots+\lambda_{k_i-1}^{(i)}, & t_{k_i-1}^{(i)}<t\le t_{k_i}^{(i)},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \lambda_1^{(i)}, & t_1^{(i)}<t\le t_2^{(i)},\\ 0, & t_0\le t\le t_1^{(i)}\end{cases} \tag{32}$$

запишем равенство

$$\sum_{j=1}^{k_i}\lambda_j^{(i)}\left(\int_{t_j^{(i)}}^{p}\big(b(r)-\varphi(r)a(r)\big)dr-\varepsilon\right)=\int_{t_0}^{p}\theta_i(r)\big(b(r)-\varphi(r)a(r)\big)dr-\varepsilon\theta(p).$$

Тогда функция Лагранжа принимает вид

$$\Lambda_i\big(\varepsilon,\varphi(\cdot)\big)=G(\varepsilon)-\Big(\lambda^{(i)}+\theta_i(p)\Big)\varepsilon+\int_{t_0}^{p}\Big(\varphi^q(r)-\varphi(r)a(r)\Big(\lambda^{(i)}+\theta_i(r)\Big)\Big)dr+\lambda^{(i)}\left(\int_{t_0}^{p}b(r)dr+|z(t_0)|\right).$$

Минимизируя по ε функцию $\Lambda_i\big(\varepsilon,\varphi(\cdot)\big)$ получим неравенство

$$G(\varepsilon_i)-\Big(\lambda^{(i)}+\theta_i(p)\Big)\varepsilon_i\le G(\varepsilon)-\Big(\lambda^{(i)}+\theta_i(p)\Big)\varepsilon \text{ для любого } \varepsilon\ge 0. \tag{33}$$

Минимизируя по $\varphi\ge 0$ подынтегральное выражение в формуле для функции Лагранжа, получим

$$\varphi_i(t)=\left(\frac{a(t)}{q}\Big(\lambda^{(i)}+\theta_i(t)\Big)\right)^{\frac{1}{q-1}}. \tag{34}$$

Покажем, что $\lambda^{(i)}+\theta_i(p)>0$. В самом деле, в противном случае из неотрицательности множителей Лагранжа и из формулы (32) получим, что $\lambda^{(i)}+\theta_i(t)=0$ для всех $t\in[t_0,p]$. Отсюда и из формул (33) и (34) следует, что решением задачи (28)–(30) являются $\varepsilon_i=0$ и $\varphi_i(t)=0$. Стало быть, они удовлетворяют ограничением (19). Это значит, что в (27) стоит знак равенства, что противоречит допущению.

Если ε и $\varphi(t)$ удовлетворяют связям (19), то они удовлетворяют связям (29), (30). Поэтому выполнено неравенство $f_0\big(\varepsilon_i,\varphi_i(\cdot)\big)\le V_0$, где V_0 – минимальное значение целевой функции в задаче (18), (19). Из этого неравенства получим, что $G(\varepsilon_i)\le V_0$. Рассуждая как при доказательстве теоремы 3 и переходя, если нужно, к подпоследовательности, можем считать, что $\varepsilon_i\to\varepsilon_0\ge 0$.

Покажем, что существует число $B>0$ такое, что

$$\lambda^{(i)}\le B,\ \theta_i(p)\le B \text{ для всех } i\ge 1. \tag{35}$$

По условию теоремы функция $G:[0,+\infty)\to R$ является непрерывной и выпуклой. Поэтому [10, с. 61] существуют числа $B_0>0$ и $\delta>0$ такие, что

$$\big|G(\varepsilon)-G(\varepsilon_0)\big|\le B_0\big|\varepsilon-\varepsilon_0\big| \text{ для всех } \big|\varepsilon-\varepsilon_0\big|<3\delta,\varepsilon>0. \tag{36}$$

Поскольку $\varepsilon_i\to\varepsilon_0$, то $|\varepsilon_i-\varepsilon_0|<\delta$ для всех i, начиная с некоторого номера. Производя перенумеровку, считаем, что неравенство $|\varepsilon_i-\varepsilon_0|<\delta$ выполнено для всех $i\ge 1$. Возьмем $\varepsilon=\varepsilon_0+2\delta$. Тогда из неравенств (33) и (36) получим, что

$$\Big(\lambda^{(i)}+\theta_i(p)\Big)\big(\varepsilon-\varepsilon_i\big)\le G(\varepsilon)-G(\varepsilon_i)\le\big|G(\varepsilon)-G(\varepsilon_0)\big|+\big|G(\varepsilon_i)-G(\varepsilon_0)\big|\le B_0\Big(\big|\varepsilon-\varepsilon_0\big|+\big|\varepsilon_i-\varepsilon_0\big|\Big)\le 3B_0\delta.$$

Поскольку $\varepsilon-\varepsilon_i>\delta$, то из предыдущего неравенства получим, что $\lambda^{(i)}+\theta_i(p)\le 3B_0$. Отсюда и из того, что $\lambda^{(i)}\ge 0$ и $\theta_i(p)\ge 0$, получим неравенства (35) с $B=3B_0$.

Каждая из функций (32) не убывает на отрезке $[t_0, p]$ и удовлетворяет равенству $\theta_i(0) = 0$. Отсюда и из второго неравенства (35) получим, что $0 \le \theta_i(t) \le B$ для всех $t \in [t_0, p]$. Далее, полная вариация [8, с. 318] функции (32) равна $\theta_i(p) - \theta_i(t_0) \le B$. Согласно второй теореме Хелли [8, с. 346], из последовательности функций (32) можно выделить подпоследовательность, сходящуюся в каждой точке отрезка $[t_0, p]$ к некоторой функции $\theta(t)$. Предельная функция не убывает и удовлетворяет равенству $\theta_0(t_0) = 0$.

Поскольку $0 \le \lambda^{(i)} \le B$, то из последовательности чисел $\lambda^{(i)}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Не вводя новых обозначений, считаем, что

$$\lim_{i\to\infty} \theta_i(t) = \theta(t) \text{ для всех } t \in [t_0, p] \text{ и } \lim_{i\to\infty} \lambda^{(i)} = \lambda \ge 0. \tag{37}$$

Из формулы (34) получим, что

$$\lim_{i\to\infty} \varphi_i(t) = \varphi_0(t) \text{ для любого } t \in [t_0, p],$$

где предельная функция $\varphi_0(t)$ задается формулой (26). Поэтому она принадлежит пространству $L_q[t_0, p]$.

Из формул (34) и (35) следует, что

$$0 \le a(t)\varphi_i(t) \le \left(\frac{2B}{q}\right)^{\frac{1}{1-q}} a^l(t) \text{ при всех } t \in [t_0, p]. \tag{38}$$

Зафиксируем число $t \in [t_0, p]$. Пусть $t_j^{(i)} \le t < t_{j+1}^{(i)}$. Тогда из второго неравенства (29) получим, что

$$\varepsilon_i \ge \int_{t_j^{(i)}}^{p} \left(b(r) - \varphi_i(r)a(r)\right) dr = \int_t^p \left(b(r) - \varphi_i(r)a(r)\right) dr + \int_{t_j^{(i)}}^{t} \varphi_i(r)a(r)\,dr - \int_{t_j^{(i)}}^{t} b(r)\,dr. \tag{39}$$

Далее, учитывая, что диаметры $d(\omega_i) \to 0$, получим

$$0 \le \int_{t_j^{(i)}}^{t} \varphi_i(r)a(r)\,dr \le \left(\frac{2B}{q}\right)^{\frac{1}{q-1}} \int_{t_j^{(i)}}^{t} a^l(t)\,dr \to 0, \int_{t_j^{(i)}}^{t} b(r)\,dr \to 0.$$

Здесь использованы неравенство (38) и теорема об абсолютной непрерывности интеграла Лебега [8, с. 282]. По теореме Лебега [8, с. 284],

$$\int_t^p \left(b(r) - \varphi_i(r)a(r)\right) dr \to \int_t^p \left(b(r) - \varphi_0(r)a(r)\right) dr.$$

Поэтому из неравенства (39) следует, что

$$\int_t^p \left(b(r) - \varphi_0(r)a(r)\right) dr \le \varepsilon_0 \text{ при любом } t \in [t_0, p].$$

Стало быть, ε_0 и $\varphi_0(t)$ удовлетворяют неравенству (15). Аналогично из теоремы Лебега получим, что они удовлетворяют неравенству (14). Таким образом, число ε_0 и функция $\varphi_0 : [t_0, p] \to R$ удовлетворяют условиям (19).

Перейдем к пределу в первом равенстве (31). Получим равенство (24). Просуммируем по j вторые равенства в (31) и учтем вид функции (32). Будем иметь

$$\int_{t_0}^{p} \theta_i(r)\left(b(r) - \varphi_i(r)a(r)\right) dr - \theta_i(p)\varepsilon_i = 0. \tag{40}$$

Из формулы (34) следует, что

$$0 \le \varphi_i(t)a(t)\theta_i(t) \le a^l(t)\left(\frac{\lambda^{(i)} + \theta_i(t)}{q}\right)^{\frac{1}{q-1}} \theta_i(t) \le a^l(t)\left(\frac{2B}{q}\right)^{\frac{1}{q-1}} B.$$

Поэтому, переходя в равенстве (40) к пределу и применяя теорему Лебега, получим равенство (23). Аналогично, переходя в первом равенстве (31) к пределу и учитывая второе соотношение в (37), получим равенство (24). Зафиксируем число $\varepsilon \geq 0$ и перейдем к пределу в неравенстве (33). Получим неравенство (25).

Отметим, что по теореме 4 найденные ε_0 и $\varphi_0(t)$ являются решением задачи (18), (19).

Работа выполнена при поддержке гранта Фонда перспективных научных исследований ФГБОУ ВО «ЧелГУ» (2017 г.).

Литература

1. Красовский, Н.Н. Позиционные дифференциальные игры / Н.Н. Красовский, А.И. Субботин. – М.: Наука, 1974. – 456 с.
2. Айзекс, Р. Дифференциальные игры / Р. Айзекс. – М.: Мир, 1967. – 479 с.
3. Понтрягин, Л.С. Линейные дифференциальные игры преследования / Л.С. Понтрягин // Мат. сб. Новая серия. – 1980. – Т. 112, № 3. – С. 307–330.
4. Ухоботов, В.И. Метод одномерного проектирования в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями: учебное пособие / В.И. Ухоботов. – Челябинск: Челяб. гос. ун-т. – 2005. – 124 с.
5. Ухоботов, В.И. Однотипные дифференциальные игры с выпуклой целью / В.И. Ухоботов // Тр. ИММ УрО РАН. – 2010. – Т. 16, № 5. – С.196–204.
6. Ухоботов, В.И. Однотипные дифференциальные игры с выпуклой интегральной платой / В.И. Ухоботов, Д.В. Гущин // Тр. ИММ УрО РАН. – 2011. – Т. 17, № 1. – С. 251–258.
7. Красовский, Н.Н. Теория управления движением / Н.Н. Красовский. – М.: Наука, 1968. – 475 с.
8. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1972. – 496 с.
9. Кудрявцев, Л.Д. Курс математического анализа. Т.1. / Л.Д. Кудрявцев. – М.: Высшая школа, 1981. – 687 с.
10. Пшеничный, Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи / Б.Н. Пшеничный. – М.: Наука, 1980. – 319 с.
11. Люстерник, Л.А. Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. – М.: Наука, 1965. – 520 с.
12. Рисс, Ф. Лекции по функциональному анализу / Ф. Рисс, Б. Секельфальви-Надь. – М.: Наука, 1979. – 587 с.
13. Иоффе, А.Д. Теория экстремальных задач / А.Д. Иоффе, В.М. Тихомиров. – М.: Наука, 1974. – 479 с.

Поступила в редакцию 2 марта 2017 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series “Mathematics. Mechanics. Physics”
2017, vol. 9, no. 2, pp. 36–46

DOI: 10.14529/mmph170205

ON A LINEAR CONTROL PROBLEM UNDER INTERFERENCE

V.I. Ukhobotov
Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E-mail: ukh@csu.ru

This paper considers a linear control problem under the action of uncontrolled interference. The control process occurs in a given time interval. The possible values of interference belong to a compact set. The control is sought as the product of a scalar function and a vector function. Values of the vector function belong to a connected symmetric compact. This definition of control arises in control problems for mechanical systems of variable composition. For example, the law of variation of a reaction mass is defined as a function of time, and the control affects the direction of relative velocity in which the mass is separated. The terminal part of the board depends on the modulus of a linear function of the state vector. The integral part of the board is an integral over the interval of a degree of the scalar function. The control problem is considered within the theory of guaranteed result optimization. With the help of a linear change of variables, the control problem comes down to a one-type differential game. An optimal control existence theorem is proved under rather wide constraints on the class of problems. Necessary and sufficient conditions are found, under which an admissible control is optimal.

Keywords: control; interference; differential game.

References

1. Krasovskij N.N., Subbotin A.I. *Pozicionnye differencial'nye igry* [Positional differential games]. Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p. (in Russ.).

2. Ajzeks R. *Differencial'nye igry* (Differential games). Moscow, Mir, 1967. 479 p. (in Russ.). [Isaacs R. *Differential games: A Mathematical Theory with Applications to Warfare and Pursuit, Control and Optimization*. New York: John Wiley and Sons, Inc., 1965, 384 p.]

3. Pontryagin L.S. Linear differential games of pursuit. *Math. USSR-Sb.*, 1981, Vol. 40, no. 3, pp. 285–303. DOI: 10.1070/SM1981v040n03ABEH001815

4. Ukhobotov V.I. *Metod odnomernogo proektirovaniya v lineynykh differentsial'nykh igrakh s integral'nymi ogranicheniyami: uchebnoe posobie* (Method of one-dimensional design in linear differential games with integral constraints: textbook). Chelyabinsk, Chelyabinskiy gosudarstvennyy universitet Publ., 2005, 124 p. (in Russ.).

5. Ukhobotov V.I. Odnotipnye differencial’nye igry s vypukloj cel’ju [The same type of differential games with convex purpose]. *Trudy Instituta Matematiki I Mehaniki Uro RAN*, 2010, Vol. 16, no. 5, pp. 196–204.

6. Ukhobotov V.I., Gushchin D.V. Single-type differential games with convex integral. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2011, Vol. 275, suppl. 1, pp. 178–185. DOI: 10.1134/S0081543811090136

7. Krasovskii N.N. *Teoriia upravleniia dvizheniem* (Motion control theory). Moscow, Nauka Publ., 1970, 420 p. (in Russ.).

8. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsii i funktsional’nogo analiza* (Elements of function theory and functional analysis). Moscow, Nauka Publ., 1972, 496 p. (in Russ.).

9. Kudryavtsev L.D. *Kurs matematicheskogo analiza* (Course of mathematical analysis). Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1981, Vol. 1, 687 p. (in Russ.).

10. Pshenichnyy B.N. *Vypuklyy analiz I ekstremal’nye zadachi* (Convex analysis and extremum problems). Moscow, Nauka Publ., 1980, 320 p. (in Russ.).

11. Ljusternik L.A., Sobolev V.I. *Jelementy funkcional'nogo analiza* (Elements of functional analysis). Moscow, Nauka Publ., 1965, 520 p. (in Russ.).

12. Riss F., Sekel’fal’vi-Nad’ B. *Lektsii po funktsional’nomu analizu* (Lectures of functional analysis). Moscow, Nauka Publ., 1979, 287 p. (in Russ.). [Riesz F., Sz.-Nagy B. Leçons d’analyse fonctionnelle. Budapest, Akademiai Kiado, 1972, 588 p.]

13. Ioffe A.D., Tihomirov V.M. *Teoriya ekstremal’nykh zadach* (Theory of extremum problems). Moscow, Nauka Publ., 1974, 479 p. (in Russ.).

Received March 2, 2017