Математика

УДК 517.956.223 **DOI: 10.14529/mmph170301**

РАЗРЕШИМОСТЬ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ТИПА НЕЙМАНА ДЛЯ ТРИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ШАРЕ

И.А. Гулящих
Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация
E-mail: giarist@mail.ru

Рассматривается краевая задача для тригармонического уравнения в единичном шаре, содержащая в граничных условиях степени лапласиана до второго порядка включительно и нормальную производную. Эта задача является естественным продолжением в стиле Неймана задачи Рикье для тригармонического уравнения. Задача, более общая, чем рассматриваемая, но для бигармонического уравнения была ранее исследована В.В. Карачиком и Б. Торебеком. С помощью сведения исходной краевой задачи к системе трех дифференциальных уравнений третьего порядка в гармонических в единичном шаре функций найдено необходимое и достаточное условие разрешимости исходной краевой задачи типа Неймана. Это условие получено в виде равенства нулю интеграла по единичной сфере от одной из граничных функций задачи. Кроме того, метод доказательства теоремы позволяет строить решение рассматриваемой задачи типа Неймана в явном виде. Также в работе установлено, что решение исходной краевой задачи единственно с точностью до произвольной постоянной.

Ключевые слова: задача Дирихле; задача Неймана; тригармоническое уравнение, условия разрешимости.

Пусть $S=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|<1\}$ – n-мерный единичный шар в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ с нормой $|x|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$, а $\partial S=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|=1\}$ – единичная сфера. В единичном шаре S рассмотрим следующую краевую задачу типа Неймана для однородного тригармонического уравнения

$$\Delta^3 u=0,\quad x\in S,\tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|_{\partial S}=\varphi_0,\quad \frac{\partial\Delta u}{\partial\nu}\Big|_{\partial S}=\varphi_1,\quad \frac{\partial\Delta^2 u}{\partial\nu}\Big|_{\partial S}=\varphi_2,\tag{2}$$

где $\dfrac{\partial}{\partial\nu}$ – внешняя нормальная производная к единичной сфере, φ_0,φ_1 и φ_2 – заданные функции на ∂S. Данная задача обобщает известную задачу Навье [1], которую также называют задачей Рикье [2]. Для бигармонического уравнения такая задача является частным случаем задачи, исследованной в [3–5]. Условия разрешимости других постановок задач типа Неймана можно найти в работах [6–11]. В работе [12] для краевых задач для полигармонического уравнения с нормальными производными в граничных условиях получено достаточное условие фредгольмовости этих задач и приведена формула их индекса. В [13] исследовались полиномиальные решения задачи Дирихле для тригармонического уравнения.

Под решением задачи (1)–(2) будем понимать такие тригармонические в S функции $u(x)$, для которых $\nu\cdot\nabla u(x)\to\varphi_0(s)$, $\nu\cdot\nabla\Delta u(x)\to\varphi_1(s)$ и $\nu\cdot\nabla\Delta^2 u(x)\to\varphi_2(s)$ при $x\to s$, где ν – внутренняя нормаль в точке $s\in\partial S$, проходящая через точку $x\in S$.

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. Пусть $\varphi_k\in C(\partial S)$ при $k=0,1,2$. Решение задачи типа Неймана (1)–(2) существует, если выполнено условие

$$\int_{\partial S}\varphi_2(x)ds_x=0 \qquad (3)$$

и это решение единственно с точностью до константы.

Доказательство. Известно, что всякая тригармоническая в S функция может быть представлена в виде $u(x)=u_0(x)+|x|^2u_1(x)+|x|^4u_2(x)$ (см., например, [14, с. 531] или [15]. Пусть $\upsilon(x)$ – некоторая гармоническая в S функция и $\Lambda=\sum_{i=1}^n x_iD_{xi}$. Нетрудно убедиться, что верны равенства

$$\Delta(|x|^2\upsilon(x))=\Delta(|x|^2)\upsilon(x)+2\sum_{i=1}^n 2x_iD_{xi}\upsilon(x)+|x|^2\Delta\upsilon(x)=(2n+4\Lambda)\upsilon(x),$$

поскольку $\Delta|x|^2=2n.$ Аналогично найдем

$$\Delta(|x|^4\upsilon(x))=\Delta(|x|^4)\upsilon(x)+2|x|^2\sum_{i=1}^n 4x_iD_{xi}\upsilon(x)+|x|^4\Delta\upsilon(x)=$$

$$=4(n+2)|x|^2\upsilon(x)+8|x|^2\Lambda\upsilon(x)=4|x|^2(n+2+2\Lambda)\upsilon(x),$$

поскольку $\Delta|x|^4=\sum_{i=1}^n(4|x|^2+8x_i^2)=4(n+2)|x|^2$. Значит можно записать

$$\Delta u(x)=\Delta(u_0(x)+|x|^2u_1(x)+|x|^4u_2(x))=2(n+2\Lambda)u_1(x)+4|x|^2(n+2+2\Lambda)u_2(x),$$

откуда, учитывая, что функции $\Lambda u_1(x)$ и $\Lambda u_2(x)$ гармонические в $S,$ найдем

$$\Delta^2u(x)=8(n+2\Lambda)(n+2+2\Lambda)u_2(x).$$

Рассмотрим граничные условия (2). Пусть ν – внешняя нормаль к ∂S. Поскольку внутренняя нормаль к $\partial S,$ проходящая через точку $x\in S$ имеет вид $-\nu=-x/|x|,$ то

$$\nu\cdot\nabla u(x)\big|_{\partial S}=\sum_{i=1}^n\frac{x_i}{|x|}D_{xi}u\big|_{\partial S}=\Lambda u\big|_{\partial S},$$

и значит граничные условия (2) можно переписать в виде

$$\Lambda u\big|_{\partial S}=\varphi_0,\quad \Lambda\Delta u\big|_{\partial S}=\varphi_1,\quad \Lambda\Delta^2u\big|_{\partial S}=\varphi_2. \qquad (4)$$

Пусть υ_0,υ_1 и υ_2 такие гармонические в S функции, что $\upsilon_k\big|_{\partial S}=\varphi_k,\ k=0,1,2.$ Тогда

$$\Lambda u-\upsilon_0\big|_{\partial S}=0,\quad (\Lambda\Delta u-\upsilon_1)\big|_{\partial S}=0,\quad (\Lambda\Delta^2u-\upsilon_2)\big|_{\partial S}=0. \qquad (5)$$

Пусть опять $\upsilon(x)$ – некоторая гармоническая в S функция. Так как Λ – линейный однородный дифференциальный оператор первого порядка, то

$$\Lambda(|x|^2\upsilon(x))=\Lambda(|x|^2)\upsilon(x)+|x|^2\Lambda\upsilon(x)=|x|^2(2+\Lambda)\upsilon(x)$$

и аналогично

$$\Lambda(|x|^4\upsilon(x))=|x|^4(4+\Lambda)\upsilon(x).$$

Поэтому, вспоминая значения $\Delta u(x)$ и $\Delta^2u(x),$ вычисленные выше, из (5) получим

$$(\Lambda u_0+|x|^2(2+\Lambda)u_1+|x|^4(4+\Lambda)u_2-\upsilon_0)\big|_{\partial S}=0,$$

а также

$$(2\Lambda(n+2\Lambda)u_1+4|x|^2(\Lambda+2)(n+2+2\Lambda)u_2-\upsilon_1)\big|_{\partial S}=0,$$

и наконец

$$(8\Lambda(n+2\Lambda)(n+2+2\Lambda)u_2-\upsilon_2)\big|_{\partial S}=0.$$

Отсюда сразу следует, что

$$\begin{aligned}&(\Lambda u_0+(2+\Lambda)u_1+(4+\Lambda)u_2-\upsilon_0)\big|_{\partial S}=0,\\&(2\Lambda(n+2\Lambda)u_1+4(\Lambda+2)(n+2+2\Lambda)u_2-\upsilon_1)\big|_{\partial S}=0,\\&(8\Lambda(n+2\Lambda)(n+2+2\Lambda)u_2-\upsilon_2)\big|_{\partial S}=0.\end{aligned} \qquad (6)$$

Поскольку внутри внешних скобок находятся гармонические в S функции, то в силу теоремы единственности решения задачи Дирихле в S получим систему уравнений для гармонических в S функций $u_0(x)$, $u_1(x)$ и $u_2(x)$

$$\begin{aligned}&\Lambda u_0+(2+\Lambda)u_1+(4+\Lambda)u_2=\upsilon_0,\\&2\Lambda(n+2\Lambda)u_1+4(\Lambda+2)(n+2+2\Lambda)u_2=\upsilon_1,\\&8\Lambda(n+2\Lambda)(n+2+2\Lambda)u_2=\upsilon_2\end{aligned}\tag{7}$$

с гармонической правой частью. Эту систему можно переписать в матричном виде

$$A(\Lambda)U(x)=V(x),\tag{8}$$

где обозначено

$$A(\Lambda)=\begin{pmatrix}\Lambda & \Lambda+2 & \Lambda+4\\ 0 & 2\Lambda(n+2\Lambda) & 4(\Lambda+2)(n+2+2\Lambda)\\ 0 & 0 & 8\Lambda(n+2\Lambda)(n+2+2\Lambda)\end{pmatrix},\quad U=\begin{pmatrix}u_0\\u_1\\u_2\end{pmatrix},\quad V=\begin{pmatrix}\upsilon_0\\\upsilon_1\\\upsilon_2\end{pmatrix}.$$

Итак, всякое решение $u(x)=u_0(x)+|x|^2u_1(x)+|x|^4u_2(x)$ задачи (1)–(2) порождает решение системы уравнений (7). Верно и обратное утверждение, т. е. если $U(x)=(u_0(x),u_1(x),u_2(x))$ – решение системы уравнений (7), то тригармоническая функция $u(x)=u_0(x)+|x|^2u_1(x)+|x|^4u_2(x)$ будет удовлетворять условиям (6), а значит (5) и (4) и следовательно условиям (2).

Решим систему уравнений (7). Рассмотрим ее последнее уравнение

$$8\Lambda(n+2\Lambda)(n+2+2\Lambda)u_2=\upsilon_2.\tag{9}$$

Обозначим здесь $\omega(x)=8\Lambda(n+2\Lambda)(n+2+2\Lambda)u_2(x)$. Тогда будем иметь в S уравнение $\Lambda\omega(x)=\upsilon_2(x)$, в котором $\omega(x)$ и $\upsilon_2(x)$ – гармонические в S функции. Это уравнение имеет решение только и только тогда, когда $\upsilon_2(0)=0$ и оно единственно с точностью до константы. Действительно, если $\upsilon_2(x)$ и $\omega(x)$ гармонические в S функции, то в окрестности нуля они имеют вид

$$\omega(x)=\omega(0)+\sum_{i=1}^{n}\omega_i x_i+\mathrm{O}(|x|^2),\quad \upsilon_2(x)=\upsilon_2(0)+\sum_{i=1}^{n}\upsilon_2^i x_i+\mathrm{O}(|x|^2).$$

Поэтому в окрестности нуля должно выполняться равенство

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i x_i+\mathrm{O}(|x|^2)=\upsilon_2(0)+\sum_{i=1}^{n}\upsilon_2^i x_i+\mathrm{O}(|x|^2).$$

Полагая в нем $x=0$, получим $\upsilon_2(0)=0$ – необходимое условие существования решения уравнения $\Lambda\omega(x)=\upsilon_2(x)$. Достаточность этого условия следует из представления [10]

$$\omega(x)=\int_0^1\upsilon_2(tx)\frac{dt}{t}+C,$$

которое справедливо, если $\upsilon_2(0)=0$ (интеграл сходится). Нетрудно убедиться, что для такой функции $\omega(x)$ будет $\Lambda\omega(x)=\upsilon_2(x)$ в S. Таким образом из (9) относительно $u_2(x)$ получаем другое уравнение

$$32(n/2+\Lambda)(n/2+1+\Lambda)u_2=\int_0^1\upsilon_2(tx)\frac{dt}{t}+C,\tag{10}$$

где C – произвольная константа. Рассмотрим оператор [4]

$$M_\lambda\upsilon=\int_0^1\upsilon(tx)t^{\lambda-1}dt,$$

который действует на гармонические в S функции и определен при $\lambda>0$. Очевидно, что операторы M_λ и M_μ коммутируют

$$\begin{aligned}M_\lambda M_\mu\upsilon(x)&=M_\lambda\int_0^1\upsilon(tx)t^{\mu-1}dt=\int_0^1\tau^{\lambda-1}\int_0^1\upsilon(t\tau x)t^{\mu-1}dtd\tau=\\&=\int_0^1 t^{\mu-1}\int_0^1\upsilon(t\tau x)\tau^{\lambda-1}dtd\tau=M_\mu M_\lambda\upsilon(x).\end{aligned}$$

Для оператора M_λ при $\lambda > 0$ верны равенства

$$\left(\Lambda+\lambda\right)M_\lambda \upsilon(x) = \left(\Lambda+\lambda\right)\int_0^1 \upsilon(tx)t^{\lambda-1}dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n x_i \upsilon_{x_i}(tx)t^\lambda dt + \lambda M_\lambda \upsilon(x) =$$

$$= \int_0^1 (\upsilon(tx))'_t \tau^\lambda dt + \lambda M_\lambda \upsilon(x) = \upsilon(tx)t^\lambda \Big|_0^1 - \lambda \int_0^1 \upsilon(tx)t^{\lambda-1}dt + \lambda M_\lambda \upsilon(x) = \upsilon(x).$$

Поэтому уравнение (10) можно переписать единственным образом в виде

$$u_2(x) = \frac{1}{32} M_{n/2+1} M_{n/2} M_0 \upsilon_2(x) + \frac{C}{32} M_{n/2+1} M_{n/2} 1. \tag{11}$$

Нетрудно подсчитать, что

$$M_\lambda 1 = \int_0^1 t^{\lambda-1}dt = \frac{t^\lambda}{\lambda}\Big|_0^1 = \frac{1}{\lambda},$$

а поэтому из (11) находим

$$\begin{aligned} u_2(x) &= \frac{1}{32} M_{n/2+1} M_{n/2} M_0 \upsilon_2(x) + \frac{C}{32} \frac{1}{n/2+1} \frac{1}{n/2} = \\ &= \frac{1}{32} M_{n/2+1} M_{n/2} M_0 \upsilon_2(x) + \frac{C}{8n(n+2)}. \end{aligned} \tag{12}$$

Обратимся теперь ко второму уравнению системы (7). Подставим в него найденное значение $u_2(x)$. Учитывая, что если $P(t)$ полином, то $P(\Lambda)1 = P(0)$ будем иметь

$$4\Lambda(n/2+\Lambda)u_1 + \frac{8}{32}(\Lambda+2)(n/2+1+\Lambda)M_{n/2+1}M_{n/2}M_0\upsilon_2(x) + \frac{C}{8n(n+2)}8(n+2) = \upsilon_1.$$

Отсюда выводим

$$4\Lambda(n/2+\Lambda)u_1 = \omega_1(x), \tag{13}$$

где обозначено

$$\omega_1(x) = \upsilon_1(x) - \frac{1}{4}(\Lambda+2)M_{n/2}M_0\upsilon_2(x) - \frac{C}{n}.$$

Аналогично исследованию решений уравнения (9), полученное уравнение имеет решение, если

$$\omega_1(0) = \upsilon_1(0) - \frac{1}{4}(\Lambda+2)M_{n/2}M_0\upsilon_2(x)\big|_{x=0} - \frac{C}{n} = 0.$$

Нетрудно видеть, что поскольку $\upsilon_2(0) = 0$, то

$$(\Lambda+2)M_{n/2}M_0\upsilon_2(x)\big|_{x=0} = M_{n/2}\upsilon_2(x)\big|_{x=0} + 2M_{n/2}M_0\upsilon_2(x)\big|_{x=0} = 0,$$

а значит уравнение (13) имеет решение только в случае, если $\upsilon_1(0) = \dfrac{C}{n}.$ Выберем произвольную константу C так, что $C = n\upsilon_1(0),$ а значит условие разрешимости уравнения (13) будет выполнено. В этом случае $\upsilon_2(x)$ из (12) примет вид

$$u_2(x) = \frac{1}{32} M_{n/2+1} M_{n/2} M_0 \upsilon_2(x) + \frac{\upsilon_1(0)}{8n(n+2)}. \tag{14}$$

Следовательно, решение уравнения (13) существует и имеет вид

$$u_1(x) = \frac{1}{4} M_{n/2} M_0 \omega_1(x) + C_1,$$

где с учетом найденного значения C

$$\omega_1(x) = \upsilon_1(x) - \upsilon_1(0) - \frac{1}{4}(\Lambda+2)M_{n/2}M_0\upsilon_2(x) = \upsilon_1(x) - \upsilon_1(0) - \frac{1}{4}M_{n/2}(1+2M_0)\upsilon_2(x).$$

Поэтому $u_1(x)$ имеет вид

$$u_1(x) = \frac{1}{4} M_{n/2} M_0 \left(\upsilon_1(x) - \upsilon_1(0) - \frac{1}{4} M_{n/2}(1+2M_0) \right) \upsilon_2(x) + C_1. \tag{15}$$

Это решение единственно с точностью до константы C_1. Теперь обратимся к первому уравнению системы (7). Запишем его в виде

$$\Lambda u_0(x) = \omega_0(x),$$

где обозначено

$$\omega_0(x) = \upsilon_0(x) - (\Lambda+2)u_1(x) - (\Lambda+4)u_2(x).$$

Как было показано выше, решение этого уравнения существует только в случае $\omega_0(0)=0$. Проверим выполнимость условия существования решения. Подставим в $\omega_0(x)$ найденные значения $u_1(x)$ и $u_2(x)$ из (15) и (14)

$$\omega_0(x) = \upsilon_0(x) - (\Lambda+2)\left(\frac{1}{4}M_{n/2}M_0\left(\upsilon_1(x)-\upsilon_1(0)-\frac{1}{4}M_{n/2}(1+2M_0)\right)\upsilon_2(x)+C_1\right) -$$

$$-(\Lambda+4)\left(\frac{1}{32}M_{n/2+1}M_{n/2}M_0\upsilon_2(x)+\frac{\upsilon_1(0)}{8n(n+2)}\right)=$$

$$=\upsilon_0(x)-\frac{1}{4}M_{n/2}(1+2M_0)\left(\upsilon_1(x)-\upsilon_1(0)-\frac{1}{4}M_{n/2}(1+2M_0)\right)\upsilon_2(x)-2C_1-$$

$$-\frac{1}{32}M_{n/2+1}M_{n/2}(1+4M_0)\upsilon_2(x)+\frac{4\upsilon_1(0)}{8n(n+2)}=\upsilon_0(x)-2C_1-\frac{\upsilon_1(0)}{2(n+2)}-$$

$$-\frac{1}{4}M_{n/2}(1+2M_0)(\upsilon_1(x)-\upsilon_1(0))+\frac{1}{32}M_{n/2}(2M_{n/2}(1+2M_0)^2-M_{n/2+1}(1+4M_0))\upsilon_2(x).$$

Если положить здесь $x=0$, то с учетом равенства $\upsilon_2(0)=0$ получим

$$\omega_0(0)=\upsilon_0(0)-2C_1-\frac{\upsilon_1(0)}{2(n+2)}.$$

Для того, чтобы $\omega_0(0)=0$, необходимо выполнение равенства

$$C_1=\frac{1}{2}\upsilon_0(0)-\frac{\upsilon_1(0)}{4(n+2)}.$$

С этим учетом $u_1(x)$ из (15) примет вид

$$u_1(x)=\frac{1}{4}M_{n/2}M_0\left(\upsilon_1(x)-\upsilon_1(0)-\frac{1}{4}M_{n/2}(1+2M_0)\right)\upsilon_2(x)+\frac{1}{2}\upsilon_0(0)-\frac{\upsilon_1(0)}{4(n+2)}. \quad (16)$$

Поэтому, если произвольную константу C_1 выбрать таким образом, то первое уравнение системы (7) будет разрешимо и его решение запишется в виде

$$u_0(x)=M_0\omega_0(x)+C_2.$$

С учетом найденного значения $\omega_0(x)$ будем иметь

$$\begin{aligned} u_0(x)=M_0(\upsilon_0(x)-\upsilon_0(0))-\tfrac{1}{4}M_{n/2}(1+2M_0)M_0(\upsilon_1(x)-\upsilon_1(0))+\\ +\tfrac{1}{32}M_{n/2}(2M_{n/2}(1+2M_0)^2-M_{n/2+1}(1+4M_0))M_0\upsilon_2(x)+C_2. \end{aligned} \quad (17)$$

Итак, решение системы уравнений (7) построено и находится по формулам (14), (16) и (17), а значит тригармоническая функция $u(x)=u_0(x)+|x|^2u_1(x)+|x|^4u_2(x)$ является решением задачи (1)–(2). Условие существования этого решения $\upsilon_2(0)=0$ можно переписать в терминах граничных функций в виде (3). Решение задачи единственно с точностью до константы C_2. Выполнимость граничных условий в указанном смысле обеспечивается непрерывностью результата применения коэффициентов операторной матрицы $A(\Lambda)$ к гармоническим функциям $u_0(x)$, $u_1(x)$ и $u_2(x)$, находимым из (14), (16) и (17). Нетрудно видеть, что степени оператора Λ из матрицы $A(\Lambda)$ при действии на эти функции «компенсируются» операторами M_λ и поэтому дополнительной гладкости, кроме непрерывности функций $\upsilon_0(x)$, $\upsilon_1(x)$ и $\upsilon_2(x)$, не требуется. Последнее же обеспечивается непрерывностью граничных функций $\varphi_0(s)$, $\varphi_1(s)$ и $\varphi_2(s)$. Теорема доказана.

Литература

1. Gazzola, F. Polyharmonic boundary value problems. Positivity preserving and nonlinear higher order elliptic equations in bounded domains. / F. Gazzola, H.C. Grunau, G. Sweers // Lecture Notes in Mathematics. – 2010. – Vol. 1991. – Berlin: Springer. – 423 p.

2. Karachik, V.V. Normalized system of functions with respect to the Laplace operator and its applications / V.V. Karachik // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2003. – Vol. 287, Issue 2. – P. 577–592.

3. Karachik, V.V. Uniqueness of solutions to boundary-value problems for the biharmonic equation in a ball / V.V. Karachik, M.A. Sadybekov, B.T. Torebek // Electronic Journal of Differential Equations. – 2015. – Vol. 2015, № 244. – P. 1–9.

4. Karachik, V.V. On one mathematical model described by boundary value problem for the biharmonic equation / V.V. Karachik, B.T. Torebek // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2016. – Т. 9, № 4. – С. 40–52.

5. Karachik, V.V. On an Uniqueness and Correct Solvability of the Biharmonic Boundary Value Problem / V.V. Karachik, B.T. Torebek // AIP Conference Proceedings. – 2016. – Vol. 1759. – 020045.

6. Карачик, В.В. Об условиях разрешимости задачи Неймана для полигармонического уравнения в единичном шаре / В.В. Карачик // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2013. – Т. 16, № 4(56). – С. 61–74.

7. Гулящих, И.А. О задаче Неймана для полигармонического уравнения в единичном шаре / И.А. Гулящих // Системы компьютерной математики и их приложения. – 2015. – № 16. – С. 144–145.

8. Карачик, В.В. Условия разрешимости задачи Неймана для однородного полигармонического уравнения / В.В. Карачик // Дифференциальные уравнения. – 2014. – Т. 50, № 11. – С. 1455–1461.

9. Кангужин, Б.Е. Необходимые и достаточные условия разрешимости краевых задач для неоднородного полигармонического уравнения в шаре / Б.Е. Кангужин, Б.Д. Кошанов // Уфимский математический журнал. – 2010. – Т. 2, № 2. – С. 41–52.

10. Карачик, В.В. Об одной задаче типа Неймана для бигармонического уравнения / В.В. Карачик // Математические труды. – 2016. – № 2. – С. 86–108.

11. Turmetov, B. On solvability of the Neumann boundary value problem for non-homogeneous biharmonic equation / B. Turmetov, R. Ashurov // British J. Math. and Comp. Sci. – 2014. – Vol. 4, № 4. – P. 557–571.

12. Кошанов, Б.Д. Краевая задача с нормальными производными для эллиптического уравнения высокого порядка на плоскости / Б.Д. Кошанов, А.П. Солдатов // Дифференциальные уравнения. – 2016. – Т. 52, № 12. – С. 1666–1681.

13. Карачик, В.В. Полиномиальные решения задачи Дирихле для 3-гармонического уравнения в шаре / В.В. Карачик // Журнал Сибирского федерального университета. Серия: Математика и физика. – 2012. – Т. 5, № 4. – С. 527–546.

14. Соболев, С.Л. Введение в теорию кубатурных формул / С.Л. Соболев. – М.: Наука, 1974. – 808 с.

15. Карачик, В.В. Об одном разложении типа Альманси / В.В. Карачик // Математические заметки. – 2008. – Т. 83, № 3. – С. 370–380.

Поступила в редакцию 19 апреля 2017 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2017, vol. 9, no. 3, pp. 5–12

DOI: 10.14529/mmph170301

SOLVABILITY OF ONE NEUMANN-TYPE PROBLEM FOR 3-HARMONIC EQUATION IN A BALL

I.A. Gulyashikh
South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E-mail: giarist@mail.ru

A boundary-value problem for 3-harmonic equation in a unit ball, containing in the boundary conditions the Laplacian levels up to the second order inclusively, and the normal derivative, is considered. This problem is a natural Neumann-type continuation of the Riquier problem for a 3-harmonic equation. The problem is more general than the considered one, but it has been researched before by V.V. Karachick and B. Torebek for a biharmonic equation. By the means of reducing the initial boundary-value problem to a system of three differential equations of the third order in harmonic equations in a unit ball of functions, the necessary and sufficient condition for solvability of the initial Neumann-type boundary-value problem is discovered. This condition is obtained as a vanishing of the integral over the unit sphere from one of the boundary functions of the problem. Besides, the method of theorem proof allows framing the solution of the considered Neumann-type problem in an explicit form. Moreover, it is determined in the article that solution of the initial boundary-value problem is unique up to an arbitrary constant.

Keywords: Dirichlet problem; Neumann problem; 3-harmonic equation; solvability conditions.

References

1. Gazzola F., Grunau H.C., Sweers G. Polyharmonic boundary value problems. Positivity preserving and nonlinear higher order elliptic equations in bounded domains. *Lecture Notes in Mathematics*, 2010, Vol. 1991, Berlin, Springer, 423 p. DOI: 10.1007/978-3-642-12245-3

2. Karachik V.V. Normalized system of functions with respect to the Laplace operator and its applications. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2003, Vol. 287, Issue 2, pp. 577–592. DOI: 10.1016/S0022-247X(03)00583-3

3. Karachik V.V., Sadybekov M.A., Torebek B.T. Uniqueness of solutions to boundary-value problems for the biharmonic equation in a ball. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2015, Vol. 2015, no. 244, pp. 1–9.

4. Karachik V.V., Torebek B.T. On one mathematical model described by boundary value problem for the biharmonic equation. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software*, 2016, Vol. 9, no. 4, pp. 40–52. DOI: 10.14529/mmp160404

5. Karachik V.V., Torebek B.T. On an Uniqueness and Correct Solvability of the Biharmonic Boundary Value Problem. *AIP Conference Proceedings*, 2016, Vol. 1759, 020045, 4 p. DOI: 10.1063/1.4959659

6. Karachik V.V., On solvability conditions for a Neumann problem for a polyharmonic equation in the unit ball. *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2013, Vol. 16, no. 4, pp. 61–74. (in Russ.).

7. Gulyashchikh I.A. *Sistemy komp'yuternoy matematiki i ikh prilozheniya*, 2015, no.16, pp. 144–145. (in Russ.).

8. Karachik V.V. Solvability conditions for the Neumann problem for the homogeneous polyharmonic equation. *Differential Equations*, 2014, Vol. 50, no. 11, pp. 1449–1456. DOI: 10.1134/S0012266114110032

9. Kanguzhin B.E., Koshanov B.D. Necessary and sufficient conditions of resolvability boundary problems for non-uniform polyharmonics equations in ball. *Ufimsk. Mat. Zh.*, 2010, Vol. 2, Issue 2, pp. 41–52. (in Russ.).

10. Karachik V.V. *Mat. Tr.*, 2016, Vol. 19, no. 2, pp. 86–108. (in Russ.). DOI: 10.17377/mattrudy.2016.19.203

11. Turmetov B., Ashurov R. On solvability of the Neumann boundary value problem for non-homogeneous biharmonic equation. *British J. Math. and Comp. Sci.*, 2014, Vol. 4, no. 4, pp. 557–571. DOI : 10.9734/BJMCS/2014/6825

12. Koshanov B.D., Soldatov A.P. Boundary Value Problem with Normal Derivatives for a Higher-Order Elliptic Equation on the Plane. *Differential Equations*, 2016, Vol. 52, Issue 12, pp. 1594–1609. DOI: 10.1134/S0012266116120077

13. Karachik V.V. Polynomial solutions to Dirihlet boundary value problem for the 3-harmonic equation in a ball. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*, 2012, Vol. 5, Issue 4, pp. 527–546. (in Russ.).

14. Sobolev S.L. *Vvedenie v teoriyu kubaturnykh formul* (Introduction to the theory of cubature formulas). Moscow, Nauka Publ., 1974, 808 p. (in Russ.).

15. Karachik V.V. On an expansion of Almansi type. *Mathematical Notes*, 2008, Vol. 83, no. 3, pp. 335–344. DOI: 10.1134/S000143460803005X

Received April 19, 2017