УДК 517.9 DOI: 10.14529/mmph170302

УСТОЙЧИВОСТЬ ЭВОЛЮЦИОННОГО ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

П.О. Москвичева
Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация
E-mail: pelageia@bk.ru

Уравнения соболевского типа являются частью обширной области неклассических уравнений математической физики. Они возникают при моделировании различных процессов в естественных и технических науках.

Исследуется устойчивость стационарного решения эволюционного уравнения, возникшего в теории фильтрации и заданного в ограниченной области. Для данного уравнения рассматривается начально-краевая задача. Получены условия, при которых нулевое решение уравнения устойчиво.

Ключевые слова: уравнение соболевского типа; относительно p-секториальные операторы; устойчивость; функционал Ляпунова.

Введение

Уравнение

$$(\lambda-\Delta)u_t=\alpha\Delta u-\beta\Delta^2 u+\gamma u+f \tag{1}$$

описывает эволюцию формы свободной поверхности фильтрующейся жидкости (см. [1]). Здесь функция $u=u(x,t)$ имеет физический смысл потенциала скорости движения свободной поверхности. Вещественные параметры α,β,γ и λ характеризуют свойства среды, причем $\alpha,\beta,\gamma>0$, а λ может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Пусть $\Omega\subset R^n$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. Для уравнения (1) на боковой границе $\partial\Omega\times R$ цилиндра $\Omega\times R$ зададим краевые условия

$$u(x,t)=\Delta u(x,t)=0,(x,t)\in\partial\Omega\times R, \tag{2}$$

а также начальное условие

$$u(x,0)=u_0(x)=0,x\in\Omega. \tag{3}$$

Нас интересует устойчивость нулевого решения однородного уравнения (1) (т. е. такого, у которого $f=0$). Устойчивость мы будем понимать в смысле Ляпунова.

Отметим, что ранее уравнение (1) изучалось в различных аспектах. Например, в работе [2] исследовалась разрешимость начально-конечной задачи для уравнения (1). Устойчивость уравнения (1), заданного на конечном связном ориентированном графе, в терминах экспоненциальной дихотомии рассматривалась в [3].

Статья, кроме введения и списка литературы, состоит из двух частей. В первой проводится редукция задачи (1)–(3) к задаче Коши

$$u(0)=u_0 \tag{4}$$

для абстрактного линейного уравнения соболевского типа

$$L\dot{u}=Mu+f. \tag{5}$$

Затем применяются методы теории относительно p-секториальных операторов. Во второй части проводится исследование устойчивости нулевого решения задачи (1)–(3) методом функционала Ляпунова, адаптированного для случая нормированных пространств. Подробно этот метод описан в работе [4], в которой отмечается тот факт, что при переходе от полных метрических пространств к нормированным пространствам (без требования их полноты), с одной стороны, теряется равномерность в устойчивости и асимптотической устойчивости, а с другой – значительно расширяется диапазон решаемых задач.

Фазовое пространство

Пусть U и F – банаховы пространства; оператор $L:U\to F$ является линейным и непрерывным, а оператор $M:U\to F$ является линейным, замкнутым и плотно определенным. Рассмотрим L-резольвентное множество $\rho^L(M) = \{\mu \in C : (\mu L - M)^{-1} : F \to U$ линеен и непрерывен$\}$ и L-спектр $\sigma^L(M) = C \setminus \rho^L(M)$ оператора M [5].

Вектор-функцию $u \in C^1((0,T);U)$ будем называть *решением* задачи (4)–(5), если она, во-первых, удовлетворяет уравнению (5), а во-вторых, $\lim\limits_{t\to 0+} u(t) = u_0$.

В случае (L,p)-секториальности оператора M существует аналитическая разрешающая полугруппа абстрактного линейного однородного уравнения соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu.$$

Одной из таких полугрупп будет семейство операторов

$$U^t = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (\mu L - M)^{-1} L e^{\mu t} d\mu, t \in R_+.$$

Обозначим $U^0 = \ker U^\bullet = \{\varphi \in U : U^t\varphi, t \in R_+\}$, $U^1 = \operatorname{im} U^\bullet = \{\upsilon \in U : \lim\limits_{t\to 0+} U^t\upsilon = \upsilon\}$. Аналогично $F^0(F^1)$ – ядро (образ) аналитической полугруппы

$$F^t = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma L(\mu L - M)^{-1} e^{\mu t} d\mu, t \in R_+.$$

Пусть $P(Q)$ – проектор на $U^1(F^1)$ вдоль $U^0(F^0)$. Введем обозначения

$$H = M_0^{-1}L_0, R^t = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (\mu L - M)^{-1} e^{\mu t} d\mu, t \in R_+.$$

Теорема 1. *Пусть оператор* M (L,p)*-секториален и* $U^0 \oplus U^1 = U$, $F^0 \oplus F^1 = F$. *Тогда для любых* $T \in R_+, f \in C^{p+1}([0,T];F)$ *и* $u_0 \in \{u \in U : (I-P)u = -\sum\limits_{q=0}^{p} H^q M_0^{-1}(I-Q)^{f(q)}(0)\}$ *существует единственное решение* u *задачи (4)–(5), представимое в виде*

$$u(t) = \sum_{q=0}^{p} H_q M_0^{-1}(I-Q)f^{(q)}(t) + U^t u_0 + \int_0^t R^{t-s} L_1^{-1} Qf(s) ds.$$

Для того чтобы редуцировать задачу (1)–(3) к задаче (4)–(5), введем в рассмотрение банаховы пространства $\mathcal{U} = \{u \in W_2^2(\Omega) : u(x) = 0, x \in \partial\Omega\}$ и $\mathcal{F} = L_2(\Omega)$, а также операторы $L = \lambda - \Delta$ и $M = \alpha\Delta - \beta\Delta^2 + \gamma$. Причем область определения оператора M есть

$$\operatorname{dom} M = \{u \in W_2^4(\Omega) : u(x) = \Delta u(x) = 0, x \in \partial\Omega\}.$$

Обозначим $\{\varphi_k : k \in N\}$ — ортонормированные в смысле скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$ в $L_2(\Omega)$ собственные функции задачи $u|_{\partial\Omega} = 0$ для уравнения $\Delta u = 0$ в области Ω, занумерованные по невозрастанию собственных значений $\{\lambda_k : k \in N\}$ с учетом их кратности.

По построению оператор $L : U \to F$ и $M : \operatorname{dom} M \to F$ линейны и непрерывны, а значит оператор $M : U \to F$ линеен замкнут и плотно определен. Редукция задачи (1)–(3) к задаче (4)–(5) закончена.

Теперь покажем, что оператор $M(L,p)$-секториален. Поскольку

$$(\mu L - M)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{\mu(\lambda-\lambda_k) + \alpha\lambda_k + \beta\lambda_k^2 - \gamma},$$

то спектр оператора M имеет вид

$$\sigma^L(M) = \left\{\mu_k = \frac{-\alpha\lambda_k - \beta\lambda_k^2 + \gamma}{(\lambda-\lambda_k)} : k \in N\{l : \lambda - \lambda_k = 0\}\right\}.$$

В силу того, что точки спектра оператора Лапласа $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ вещественны, дискретны, конечнократны и сгущаются только к $+\infty$, то относительный спектр $\sigma^L(M)$ обладает теми же свойствами. А из формул

$$R_{\mu}^{L}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{\mu-\mu_k},(\mu L-M)^{-1}L(\nu L-M)^{-1}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{(\mu-\mu_k)(\nu-\nu_k)(\lambda-\lambda_k)}$$

аналогично [5, гл. 5] следует сильная (L,p)-секториальность оператора M, из которой вытекает $(L,0)$-секториальность оператора M, а также выполнение условий $U^0\oplus U^1=U$, $F^0\oplus F^1=F$ и существование линейного непрерывного оператора $L_1^{-1}:F^1\to U^1$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *При любых* $\alpha,\beta,\gamma\in R_+,\lambda\in R$ *таких, что либо* λ *не является корнем уравнения* $\alpha a+\beta a^2-\gamma=0$*, либо* $\lambda\notin\{\lambda_k\}$ *оператор* M *сильно* $(L,0)$*-секториален.*

Фазовое пространство задачи (1)–(3) имеет вид

$$B=\begin{cases}U,\text{ если }\lambda\notin\{\lambda_k\},\\ \{u\in U:\langle u,\varphi_k\rangle=0,\lambda=\{\lambda_k\}\text{ и }\lambda\text{ не является корнем уравнения }a+\beta a^2-\gamma=0\}.\end{cases}$$

Устойчивость

Пусть H – нормированное пространство. Будем говорить, что на H задан *поток*, если существует отображение S такое, что для любого $u\in H$ и некоторого $\tau=\tau(u)\in R_+$ выполнены следующие условия:

(i) $S=S(t,u)\in H$ при всех $t\in(-\tau,\tau);S(0,u)=u;$

(ii) $S(t+s,u)=S(t,S(s,u))$ при всех $t+s\in(-\tau,\tau).$

Точка $u\in H$, такая, что

(iii) $S(t,u)=u,t\in R,$ называется *стационарной точкой* потока S.

Определение 1. Стационарная точка u потока S называется

(i) *устойчивой* (по А.М. Ляпунову), если для любой окрестности O_u точки u существует (возможно, другая) окрестность $\dot{O}_u$ той же точки, что $S(t,v)\in\dot{O}_u$ для любых $v\in O_u$ и $t\in R_+$;

(ii) *асимптотически устойчивой* (по А.М. Ляпунову), если она устойчива и, кроме того, для любой точки v из некоторой окрестности O_u точки u выполнено $S(t,v)\to u$ при $t\to\infty$.

Определение 2. Функционал $V\in C(H,R)$ называется *функционалом Ляпунова* потока S, если

$$\dot{V}(u)=\overline{\lim_{t\to0+}}\frac{1}{t}(V(S(t,u)-V(u)))\le0$$

для всех $u\in O_u$.

Теорема 3. *Пусть* u *– стационарная точка потока* S *на* O_u*, если для потока* S *существует функционал Ляпунова такой, что*

(i) $V(u)=0$*;*

(ii) $V(v)\ge\varphi(\|v-u\|)$*,*

где φ *– строго возрастающая непрерывная функция, такая, что* $\varphi(0)=0$ *и* $\varphi(r)>0$*, тогда точка* u *устойчива.*

Теорема 4. *Пусть выполнены условия Теоремы 3 и существует строго возрастающая непрерывная функция* ψ*, такая, что* $\psi(0)=0$ *и* $\psi(r)>0$ *при* $r\in R_+$*, причем* $\dot{V}(v)\le-\psi(\|v-u\|)$*, тогда точка и асимптотически устойчива.*

Теперь применим теоремы 3 и 4 к нашей задаче. Для этого построим нормированное пространство H. В пространстве U зададим норму пространства L_2. Таким образом, на H будет существовать поток, который задается формулой

$$S(t,u)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}R_{\mu}^{L}(M)ue^{\mu t}d\mu, t\in R.$$

Здесь замкнутый контур γ ограничивает область, которая содержит L-спектр $\sigma^L(M)$ оператора M, а оператор-функция $R_{\mu}^{L}(M)=(\mu L-M)^{-1}L$. Очевидно, что точка нуль – это стационарная точка данного потока. Зададим функцию Ляпунова формулой

$$V(u)=\int_{\Omega}(u_x^2+\lambda u^2)dx.$$

Очевидно, что $V(0)=0$, а в силу теоремы вложения Соболева $V(u)\geq c\|u\|^2$. После скалярного умножения в L_2 уравнения (1) на u и применения интегрирования по частям с учетом условий (2) мы получим, что

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega}(u_x^2+\lambda u^2)dx=-\alpha\int_{\Omega}u_x^2dx-\beta\int_{\Omega}u_{xx}^2dx-\gamma\int_{\Omega}u^2dx$$

или

$$\dot{V}(u)\leq -c\|u\|_U^2,$$

где $c=\max\{\alpha,\beta,\gamma\}$.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 5. *Нулевое решение задачи (1)–(3) асимптотически устойчиво для любых* $\alpha,\beta,\gamma\in R_+$ *и* $\lambda\geq 0$.

Литература

1. Свиридюк, Г.А. Разрешимость задачи Коши для линейных сингулярных уравнений эволюционного типа / Г.А. Свиридюк, М.В. Суханова // Дифференциальные уравнения. – 1992. – Т. 28, № 3. – С. 508–515.

2. Загребина, С.А. Начально-конечная задача для эволюционных уравнений соболевского типа на графе / С.А. Загребина, Н.П. Соловьева // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2008. – № 15 (115). – Вып. 1. – С. 23–26.

3. Свиридюк, Г.А. Эволюционные линейные уравнения соболевского типа на графе / Г.А. Свиридюк, П.О. Пивоварова // Дифференциальные уравнения. – 2010. – Т. 46, № 8. – С. 1147–1152.

4. Загребина, С.А. Устойчивость линейных уравнений Хоффа на графе / С.А. Загребина, П.О. Пивоварова // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2010. – № 16 (192), вып. 5. – С. 11–16.

5. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2003. – 216 p.

Поступила в редакцию 6 июля 2017 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2017, vol. 9, no. 3, pp. 13–17

DOI: 10.14529/mmph170302

STABILITY OF THE EVOLUTIONARY LINEAR SOBOLEV TYPE EQUATION

P.O. Moskvicheva
South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E-mail: pelageia@bk.ru

Sobolev type equations are a part of extensive area of non-classical equations of mathematical physics. These are equations that are not solved respective to the highest derivative with respect to time. Research of different problems for equations of the given type nowadays are very relevant, as such equations appear during modeling of different processes in natural and engineering sciences. In this article, stability of stationary solution of an evolutionary equation, which appeared in the filter theory and which describes development of form of the filterable liquid's free surface, is researched.

For this equation, an initial boundary-value problem in limited area is considered. The article consists of an introduction, a list of references and two parts. In the first part, general concepts and theory assertions concerning p-sectorial operators are given. After that, reduction of the considered problem to the Cauchy problem for a Sobolev type abstract linear equation, by the means of selecting the corresponding Banach spaces and linear operators, is carried out. Then the phase space of our problem is described.

In the second part, general concepts of the stability theory such as flow, stationary point of the flow, and Lyapunov functional, are given. Theorems of stability and asymptotical stability of a stationary point of the flow are given. In this article, the method of Lyapunov functional, modified for the case of complete normalized spaces, is used. It should be noted, that modification of the method lies in transition from incomplete normalized spaces to complete normalized spaces. As a result, the uniformity of stability and asymptotic stability is lost, but the class of problems being solved gets considerably expanded. The main result of the article are conditions formulated as a theorem of stability and asymptotic stability of zero solution of the considered problem.

Keywords: Sobolev type equation; relatively p-sectorial operators; stability; Lyapunov functional.

References

1. Sviridyuk G.A., Sukhanova M.V. Solvability of the Cauchy problem for linear singular equations of evolution type. *Differential Equations*, 1992, Vol. 28, no. 3, pp. 438–444.

2. Zagrebina S.A., Solovyeva N.P. The Initial-Finite Problem for the Evolution Sobolev-Type Equations on a Graph. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software"*, 2008, no. 15 (115), Issue 1, pp. 23–26. (in Russ.).

3. Sviridyuk G.A., Pivovarova P.O. Evolution linear equations of the Sobolev type on a graph. *Differential Equations*, 2010, Vol. 46, Issue 8, pp. 1157–1163. DOI: 10.1134/S0012266110080094

4. Zagrebina S.A., Pivovarova P.O. The stability of the Hoff linear equations on a graph. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software"*, 2010, no. 16(192), Issue 5, pp. 11–16. (in Russ.).

5. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators*. Utrecht; Boston; Köln; Tokyo, VSP, 2003, 216 p. DOI: 10.1515/9783110915501

Received July 6, 2017