УДК 519.213 DOI: 10.14529/mmph170303

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЕРОЯТНОСТНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТИПА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО КОСИНУСА

М.С. Токмачев
Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого, г. Великий Новгород, Российская Федерация
E-mail: mtokm@yandex.ru

Исследовано полученное в результате характеризации трехпараметрическое вероятностное распределение, являющееся обобщением известных распределений: однопараметрического распределения гиперболического косинуса (секанса) и двухпараметрического распределения Майкснера. Приведено доказательство его безграничной делимости. По характеристической функции в общем виде восстановлена плотность распределения вероятностей, выраженная через бета-функцию комплексно-сопряженных аргументов. Наряду с единой формулой, при целых значениях параметра *m* для функции плотности выведены соотношения в элементарных функциях.

Ключевые слова: распределение типа гиперболического косинуса; характеристическая функция; безгранично делимое распределение; бета-функция.

Введение

Вероятностным распределением *типа гиперболического косинуса* называют трехпараметрическое распределение с характеристической функцией

$$f(t)=\left(\operatorname{ch}\frac{\beta}{m}t-i\frac{\mu}{\beta}\operatorname{sh}\frac{\beta}{m}t\right)^{-m}, \text{ где } \mu,\beta,m\in \mathrm{R},\ m>0,\ \beta\neq 0. \quad (1)$$

Впервые функция (1) получена автором при решении задачи характеризации распределений свойством постоянства регрессии квадратичной статистики Q на линейную статистику Λ [1]:

$$E(Q\,|\,\Lambda)=E(Q), \text{ где } Q=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{jk}X_jX_k;\quad \Lambda=\sum_{j=1}^{n}X_j. \quad (2)$$

$X_1, X_2, ..., X_n$ – независимые, одинаково распределенные случайные величины. В зависимости от соотношения коэффициентов статистики Q условие постоянства регрессии (2) является характеризационным (характеристическим) для ряда известных распределений [2–4] и, в частности, распределения типа гиперболического косинуса.

Указанное трехпараметрическое распределение является обобщением двухпараметрического распределения Майкснера (*J. Meixner*) [5, 6] с характеристической функцией

$$f(t)=(\operatorname{ch}t-i\theta\operatorname{sh}t)^{-m},\ m>0,\ \theta\in\mathrm{R}.$$

Распределение Майкснера получается, если в (1) положить $\beta=m$ и переобозначить параметр $\mu/\beta=\mu/m=\theta$. Наличие третьего параметра позволяет получить большее разнообразие распределений: каждое двухпараметрическое распределение Майкснера с конкретными параметрами (θ, m) является семейством распределений с параметром β. Например, при $\theta=2$, $m=1$ получаем тройку параметров $(\mu=2\beta, m=1, \beta)$, где $\beta\in\mathrm{R}, \beta\neq 0$. В частности, эти параметры (μ, m, β) могут быть (2; 1; 1) – распределение Майкснера, а также (1; 1; 0,5), (–1; 1; –0,5), (4; 1; 2) и т. д. Заметим, что в трехпараметрическом распределении математическое ожидание случайной величины равно параметру μ. При этом параметр μ является параметром не только сдвига, но и участвует в формировании дисперсии и других моментов.

В частности, при $\mu=0$, $m=1$ из (1) получаем характеристическую функцию однопараметрического распределения гиперболического косинуса (секанса). При сдвиге случайной величины, распределенной по закону гиперболического косинуса, на величину λ получим двухпараметрическое распределение, известное как распределение Чампернауна [7].

Таким образом, распределение типа гиперболического косинуса оказывается обобщением двухпараметрического распределения Майкснера, которое, в свою очередь, является обобщением однопараметрического распределения гиперболического косинуса на случай $\mu \neq 0$.

В данной работе восполняются пробелы в доказательной части теории: представлено обоснование найденного ранее распределения и выведен ряд соотношений.

Исследование характеристической функции

Докажем, что функция $f(t)$ вида (1), полученная как результат характеризации распределений свойством постоянства регрессии, действительно является характеристической функцией.

Теорема 1. Функция

$$\frac{1}{q(t)} = \frac{1}{\operatorname{ch}\frac{\beta}{m}t - i\frac{\mu}{\beta}\operatorname{sh}\frac{\beta}{m}t}, \tag{3}$$

где μ, β, m – действительные постоянные, $\beta, m \neq 0$, является характеристической функцией некоторого распределения.

Доказательство теоремы 1. Для доказательства теоремы потребуются две леммы.

Лемма 1. Функция

$$q(t) = \operatorname{ch}\frac{\beta}{m}t - i\frac{\mu}{\beta}\operatorname{sh}\frac{\beta}{m}t, \tag{4}$$

где μ, β, m – действительные константы, $\beta, m \neq 0$, является целой функцией порядка 1.

Доказательство леммы 1. Для доказательства леммы 1 достаточно проверить условия Коши–Римана применительно к функции комплексной переменной $q(z)$ вида (4), которые справедливы на всей комплексной плоскости. Порядок целой функции $q(z)$ определяют функции $\operatorname{ch}\frac{\beta}{m}z$ и $\operatorname{sh}\frac{\beta}{m}z$, которые являются целыми функциями первого порядка.

Лемма 2. Задана функция

$$q(z) = \operatorname{ch}\frac{\beta}{m}z - i\frac{\mu}{\beta}\operatorname{sh}\frac{\beta}{m}z,$$

где μ, β, m – действительные константы, $\beta, m \neq 0$. Тогда *а*) $q(z)$ имеет лишь чисто мнимые нули; *б*) все нули функции $q(z)$ простые; *в*) $z = 0$ не является нулем функции $q(z)$.

Доказательство леммы 2. Положим, $q(z) = 0$. Решая указанное уравнение с использованием формулы $\operatorname{cth} z = i \operatorname{ctg} iz$, получаем $\operatorname{ctg} i\frac{\beta}{m}z = \frac{\mu}{\beta}$. Отсюда находим нули функции $q(z)$:

$$z_k = -\frac{im}{\beta}\left(\operatorname{arcctg}\frac{\mu}{\beta} + \pi k\right) \quad k \in Z. \tag{5}$$

Из (5) следует справедливость утверждений а) и б) леммы 2. Утверждение в) проверяется непосредственно. Лемма 2 доказана.

Переходим к доказательству теоремы 1. Для целой функции $q(z)$ вида (4) применим теорему Вейерштрасса о факторизации целых функций [8]:

$$q(z) = z^{S_0} e^{\eta(z)} \prod_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{z/z_k}\right]^{m_k}.$$

Упростим данное выражение, используя утверждения леммы 1: так как $z = 0$ не является нулем функции $q(z)$, то $S_0 = 0$; так как все корни z_k простые, то все m_k равны 1, $k \in \mathrm{Z}$.

Следовательно,

$$q(z) = e^{\eta(z)} \prod_{k=-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{z/z_k}.$$

Исходя из (5), обозначим $z_k = -\frac{i}{B_k}$, $k \in \mathrm{Z}$, где B_k – действительные и различные при разных k. Тогда

$$q(z) = e^{\eta(z)} \prod_{k=-\infty}^{+\infty} \left(1 - iB_k z\right) e^{iB_k z}. \tag{6}$$

Поскольку, согласно лемме 1, $q(z)$ – целая функция первого порядка, то $\eta(z)$ – многочлен степени не выше первой, а именно: $\eta(z) = az + b$. Из условия $q(0) = 1$ и из (6) следует, что $b = 0$.

Таким образом, (6) принимает вид

$$q(z) = e^{az} \prod_{k=-\infty}^{+\infty} \left(1 - iB_k z\right) e^{iB_k z}.$$

Перейдем к действительной переменной t, тогда

$$q(t) = e^{at} \prod_{k=-\infty}^{+\infty} \left(1 - iB_k t\right) e^{iB_k t}. \tag{7}$$

Для определения a продифференцируем функцию $q(t)$, заданную соотношением (7):

$$q'(t) = ae^{at} \left(\prod_{k=-\infty}^{+\infty} \left(1 - iB_k t\right) e^{iB_k t} \right) + e^{at} \left(\prod_{k=-\infty}^{+\infty} \left(1 - iB_k t\right) e^{iB_k t} \right)'. \tag{8}$$

Из (8) следует $q'(0) = a + iB$, где B – действительное число. Однако, из (4) получаем $q'(0) = -i\frac{\mu}{m}$. Два последних соотношения приводят к выводу, что a – чисто мнимое (возможно, $a = 0$). Положим, $a = iA$, где A – действительная постоянная.

Подставив это значение в (7), приходим к выражению

$$q(t) = e^{iAt} \prod_{k=-\infty}^{+\infty} \left(1 - iB_k t\right) e^{iB_k t}.$$

Тогда

$$\frac{1}{q(t)} = e^{-iAt} \prod_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{1 - iB_k t} \right) e^{-iB_k t}. \tag{9}$$

Функции-сомножители в правой части (9) являются характеристическими функциями:

$e^{-iAt}, e^{-iB_k t}$ – характеристические функции вырожденного распределения,

$\frac{1}{1 - iB_k t}$ – характеристическая функция гамма-распределения при $B_k > 0$ и характеристическая функция распределения, сопряженного с гамма-распределением при $B_k < 0$.

Введем функцию $h_n(t)$ следующим образом

$$h_n(t) = e^{-iAt} \prod_{k=-n}^{n} \left(\frac{1}{1 - iB_k t} \right) e^{-iB_k t}. \tag{10}$$

Согласно известному свойству произведения характеристических функций, функция $h_n(t)$ при любом конечном n является характеристической. Из (9), (10) следует, что

$$\frac{1}{q(t)} = \lim_{n \to \infty} h_n(t). \tag{11}$$

По следствию из теоремы непрерывности характеристических функций ([9], следствие 2 теоремы 3.6.1) предельная функция $\frac{1}{q(t)}$ также является характеристической функцией. Таким образом, теорема 1 доказана. Отметим, что соотношения (10), (11) представляют структуру характеристических функций вида (3).

Исследуем найденное распределение на безграничную делимость.

Теорема 2. Функция

$$\frac{1}{q(t)}=\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{\beta}{m}t-i\frac{\mu}{\beta}\operatorname{sh}\frac{\beta}{m}t}$$

является безгранично делимой характеристической функцией.

Доказательство теоремы 2. Согласно теореме 1, функция $\frac{1}{q(t)}$ является характеристической функцией. Обратимся к доказательству теоремы 1.

Из (10) следует, что характеристическая функция $h_n(t)$ является произведением конечного числа безгранично делимых характеристических функций гамма-распределения и вырожденного распределения. Следовательно ([9], теорема 5.3.2), $h_n(t)$ также безгранично делима.

Характеристическая функция $\frac{1}{q(t)}$ безгранично делима, поскольку, согласно (11), является пределом последовательности безгранично делимых характеристических функций $h_n(t)$ ([9], теорема 5.3.3).

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Функция $f(t)=\left(\operatorname{ch}\frac{\beta}{m}t-i\frac{\mu}{\beta}\operatorname{sh}\frac{\beta}{m}t\right)^{-m}$ при любом $m>0$ является безгранично делимой характеристической функцией.

Доказательство теоремы 3. Поскольку любая положительная степень безгранично делимой характеристической функции сама является характеристической функцией ([9], следствие теоремы 5.3.3), а функция $\frac{1}{q(t)}$ безгранично делима, согласно теореме 2, то $f(t)=\left(\frac{1}{q(t)}\right)^m$, $m>0$ также является характеристической функцией, причем безгранично делимой. Теорема 3 доказана.

Вывод соотношений для плотности распределения вероятностей

Плотность распределения $p_m(x)$ как обратное преобразование Фурье характеристической функции $f(t)$ вида (1) при $\beta>0$ имеет вид [10]:

$$p_m(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-itx}f(t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-itx}dt}{(\operatorname{ch}\beta t-i\frac{\mu}{\beta}\operatorname{sh}\beta t)^m}=$$

$$=\frac{2^{m-2}m\beta^{m-1}}{\pi(\beta^2+\mu^2)^{\frac{m}{2}}}\left(\frac{\beta-i\mu}{\beta+i\mu}\right)^{\frac{imx}{2\beta}}B\left(\frac{m}{2}-\frac{imx}{2\beta};\frac{m}{2}+\frac{imx}{2\beta}\right), \tag{12}$$

где $i=\sqrt{-1}$, $B(p;q)$ – бета-функция, а сомножитель с мнимой единицей имеет вид:

$$A\equiv\left(\frac{\beta-i\mu}{\beta+i\mu}\right)^i=\begin{cases} e^{\operatorname{arctg}\frac{2\beta\mu}{\beta^2-\mu^2}} & \text{при}\quad \beta^2-\mu^2>0,\\ e^{\operatorname{arctg}\frac{2\beta\mu}{\beta^2-\mu^2}+\pi\operatorname{sign}\mu} & \text{при}\quad \beta^2-\mu^2<0,\\ e^{\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}\mu} & \text{при}\quad \beta^2-\mu^2=0.\end{cases} \tag{13}$$

При целых m функцию плотности в (12) можно выразить в элементарных функциях.

Теорема 4. При $m=1$ функция плотности $p_m(x)$ имеет вид:

$$p_1(x)=\frac{A^{\frac{x}{2\beta}}}{2\sqrt{\beta^2+\mu^2}\,\mathrm{ch}\frac{\pi x}{2\beta}}. \quad (14)$$

Справедливость (14) следует из (12) при использовании известных соотношений:

$$B\left(\frac{1}{2}-z;\frac{1}{2}+z\right)=\frac{\pi}{\cos\pi z},\ \cos iz=\mathrm{ch}\,z.$$

Теорема 5. При $m=2$ функция плотности $p_m(x)$ имеет вид:

$$p_2(x)=\frac{2xA^{\frac{x}{\beta}}}{(\beta^2+\mu^2)\,\mathrm{sh}\frac{\pi x}{\beta}}. \quad (15)$$

Справедливость (15) следует из (12) при использовании известных соотношений

$$B(1+z;1-z)=\frac{\pi z}{\sin\pi z},\ \sin iz=i\,\mathrm{sh}\,z.$$

Также отметим, что при целых m случайная величина X с характеристической функцией вида (1) представляет собой сумму m независимых случайных величин $X_1+X_2+...+X_m$, каждая из которых обладает характеристической функцией

$$f(t)=\left(\mathrm{ch}\frac{\beta}{m}t-i\frac{\mu}{\beta}\mathrm{sh}\frac{\beta}{m}t\right)^{-1}.$$

Следовательно, функция $p_2(x)$ вида (15) как плотность вероятностей распределения суммы независимых одинаково распределенных случайных величин X_1, X_2 является сверткой:

$$p_2(x)=\int_{-\infty}^{\infty}p_1(y)p_1(x-y)dy\text{, где } p_1(y)=p_1\left(y\,\middle|\,\frac{\mu}{2},\frac{\beta}{2}\right).$$

Теорема 6. При $m=3,5,7,...$ функция плотности $p_m(x)$ имеет вид:

$$p_m(x)=\frac{m}{2(\beta^2+\mu^2)^{\frac{m}{2}}(m-1)!}\ \frac{A^{\frac{mx}{2\beta}}}{\mathrm{ch}\frac{\pi mx}{2\beta}}\ \prod_{n=1}^{\frac{m-1}{2}}\left[(2n-1)^2\beta^2+m^2x^2\right]. \quad (16)$$

Доказательство теоремы 6. Итак, полагаем $m=2k+1$ $(k=1,2,...)$. Тогда

$$B\left(\frac{m}{2}-\frac{imx}{2\beta};\frac{m}{2}+\frac{imx}{2\beta}\right)=B\left(k+\frac{1}{2}-\frac{imx}{2\beta};k+\frac{1}{2}+\frac{imx}{2\beta}\right)=$$

$$=\frac{\Gamma\left(k+\left(\frac{1}{2}-\frac{imx}{2\beta}\right)\right)\Gamma\left(k+\left(\frac{1}{2}+\frac{imx}{2\beta}\right)\right)}{\Gamma(2k+1)}=\frac{\Gamma(k+z)\,\Gamma(k+\overline{z})}{(2k)!},$$

где $\Gamma(...)$ – гамма-функция, $z=\frac{1}{2}-\frac{imx}{2\beta}$, z и $\overline{z}$ – комплексно-сопряженные величины.

По свойствам гамма-функции

$$\Gamma(k+z)=(k-1+z)(k-2+z)\ ...\ z\Gamma(z),\quad \Gamma\left(\frac{1}{2}-\omega\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\omega\right)=\frac{\pi}{\cos\pi\omega}$$

получаем

$$\Gamma(k+z)\Gamma(k+\overline{z})=\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{imx}{2\beta}\right)\left(\frac{3}{2}-\frac{imx}{2\beta}\right)...\left(\frac{2k-1}{2}-\frac{imx}{2\beta}\right)\right]\times$$

$$\times\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{imx}{2\beta}\right)\left(\frac{3}{2}+\frac{imx}{2\beta}\right)\ldots\left(\frac{2k-1}{2}+\frac{imx}{2\beta}\right)\right]\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{imx}{2\beta}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{imx}{2\beta}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{4}+\frac{m^2x^2}{4\beta^2}\right)\left(\frac{9}{4}+\frac{m^2x^2}{4\beta^2}\right)\ldots\left(\frac{(2k-1)^2}{4}+\frac{m^2x^2}{4\beta^2}\right)\frac{\pi}{\cos\frac{i\pi mx}{2\beta}}.$$

В последнем выражении перейдем к функции гиперболического косинуса, $\cos i\omega=\operatorname{ch}\omega$, заменим значение k на $\frac{m-1}{2}$ и вынесем общие множители слагаемых в скобках. Тогда

$$B\left(\frac{m}{2}-\frac{imx}{2\beta};\frac{m}{2}+\frac{imx}{2\beta}\right)=\frac{\pi(\beta^2+m^2x^2)(9\beta^2+m^2x^2)\ldots((m-2)^2\beta^2+m^2x^2)}{2^{m-1}\beta^{m-1}(m-1)!\operatorname{ch}\frac{\pi mx}{2\beta}}. \qquad (17)$$

Следовательно, исходя из выражения (12) и соотношений (13), (17), для функции плотности вероятностей при $m=3,5,7,\ldots$ приходим к формуле (16). Теорема 6 доказана.

Теорема 7. При $m=4,6,8,\ldots$ функция плотности $p_m(x)$ имеет вид:

$$p_m(x)=\frac{m^2x}{2(\beta^2+\mu^2)^{\frac{m}{2}}(m-1)!}\;\frac{A^{\frac{mx}{2\beta}}}{\operatorname{sh}\frac{\pi mx}{2\beta}}\;\prod_{n=1}^{\frac{m}{2}-1}\left(4n^2\beta^2+m^2x^2\right). \qquad (18)$$

Доказательство теоремы 7. Полагаем $m=2k \quad (k=2,4,\ldots)$. Тогда

$$B\left(\frac{m}{2}-\frac{imx}{2\beta};\frac{m}{2}+\frac{imx}{2\beta}\right)=B\left(k-\frac{ikx}{\beta};k+\frac{ikx}{\beta}\right)=$$

$$=\frac{\Gamma\left(k-\frac{ikx}{\beta}\right)\Gamma\left(k+\frac{ikx}{\beta}\right)}{\Gamma(2k)}=\frac{\Gamma(k-z)\Gamma(k+z)}{(2k-1)!},\text{ где } z=\frac{ikx}{\beta},\ k=\frac{m}{2}.$$

Вновь используем свойства гамма-функции:

$$\Gamma(k+z)=(k-1+z)(k-2+z)\ \ldots\ (1+z)\Gamma(1+z),\ \Gamma(k-z)=(k-1-z)(k-2-z)\ \ldots\ (1-z)\Gamma(1-z),$$

$$\Gamma(1-z)\Gamma(1+z)=\frac{\pi z}{\sin\pi z}$$

и получаем

$$\Gamma(k-z)\Gamma(k+z)=\left((k-1)^2-z^2\right)\left((k-2)^2-z^2\right)\ldots\left(1^2-z^2\right)\Gamma(1-z)\Gamma(1+z)=$$

$$\left(1-z^2\right)\left(4-z^2\right)\ldots\left((k-1)^2-z^2\right)\frac{\pi z}{\sin\pi z}=\left(1+\frac{k^2x^2}{\beta^2}\right)\left(4+\frac{k^2x^2}{\beta^2}\right)\ldots\left((k-1)^2+\frac{k^2x^2}{\beta^2}\right)\frac{\pi\frac{ikx}{\beta}}{\sin\pi\frac{ikx}{\beta}}.$$

В последнем выражении перейдем к функции гиперболического синуса, $\sin i\omega=i\operatorname{sh}\omega$, и вынесем общие множители слагаемых в скобках. Тогда

$$B\left(\frac{m}{2}-\frac{imx}{2\beta};\frac{m}{2}+\frac{imx}{2\beta}\right)=\frac{(\beta^2+k^2x^2)(4\beta^2+k^2x^2)\ldots((k-1)^2\beta^2+k^2x^2)\pi kx}{\beta^{2k-1}(2k-1)!\operatorname{sh}\frac{\pi kx}{\beta}}. \qquad (19)$$

Таким образом, согласно соотношениям (13), (19), для функции плотности вероятностей, заданной (12), при $m=4,6,8,\ldots$ приходим к формуле (18). Теорема 7 доказана.

Можно доказать, что в общем случае

$$E(X)=\mu;\quad \sigma^2=\frac{\beta^2+\mu^2}{m};\quad \gamma_1=\frac{2\mu}{m\sigma};\quad \gamma_2=\frac{2}{m}+\left(\frac{2\mu}{m\sigma}\right)^2=\frac{2}{m}+\gamma_1^2,$$

где $\sigma^2 = V(X)$, $\gamma_1 = As(X)$, $\gamma_2 = Ex(X)$. Исходя из указанных соотношений, легко найти зависимость параметров μ, β, m от первых моментов:

$$\mu = E(X); \qquad m = \frac{2\mu}{\gamma_1\sigma} = \frac{2}{\gamma_2 - \gamma_1^2}; \quad \beta^2 = m\sigma^2 - \mu^2.$$

В статистическом анализе данных найденные соотношения позволяют использовать метод моментов. При обработке реальных данных из области медицины и здравоохранения (различные показатели физического состояния и показатели заболеваемости населения) с помощью разработанного программного обеспечения установлено согласие многих из них с распределением типа гиперболического косинуса [11].

Заключение

Можно найти примеры применения указанного распределения кроме вероятностных. В частности, в [12, 13] представлено множество нетривиальных интегралов, вычисляемых на основе моментов распределения при различных параметрах. В [14] также из найденных взаимосвязи и структуры моментов распределения типа гиперболического косинуса сформировано структурированное множество в виде бесконечной числовой призмы, исследован ряд её сечений, в частности, в связи с числами Стирлинга первого рода и коэффициентами полиномов Бесселя. В [15] в качестве сечений числовой призмы представлены и систематизированы как широко известные классические, так и числовые треугольники, и числовые последовательности, ранее в литературе не встречавшиеся. Для них найдены многие интересные свойства и соотношения.

Работа выполнена при финансовой поддержке проектной части государственного задания в сфере научной активности Министерства образования и науки Российской Федерации, проект № 1.949.2014/К.

Литература

1. Токмачев, М.С. Характеризация распределения типа гиперболического косинуса свойством постоянства регрессии / М.С. Токмачев // Деп. в ВИНИТИ 21.06.94. – № 1542-В94. – 11 с.

2. Токмачев, М.С. Постоянство регрессии квадратичной статистики на линейную статистику / М.С. Токмачев // Вестник НовГУ. – 1995. – № 1. – С. 139–141.

3. Каган, А.М. Характеризационные задачи математической статистики / А.М. Каган, Ю.В. Линник, С.Р. Рао. – М.: Наука, 1972. – 656 с.

4. Клебанов, Л.Б. Когда квадратичная статистика имеет постоянную регрессию на выборочное среднее? / Л.Б. Клебанов // Теория вероятн. и её примен. – 1979. – XXIV, 3 – С. 646–648.

5. Lai, C.D. Meixner classes and Meixner hypergeometric distributions / C.D. Lai // Australian & New Zealand Journal of Statistics. – 1982. – Vol. 24. – P. 221–233.

6. Lai, C.D. A characterization of gamma, Meixner hypergeometric and negative binomial distributions based on canonical measures / C.D. Lai // Annals of the Institute of Statistical Mathematics. – 1982. – Vol. 34. – Issue 1. – P. 359–363.

7. Вадзинский, Р.Н. Справочник по вероятностным распределениям / Р.Н. Вадзинский. – СПб.: Наука, 2001. – 295 с.

8. Смирнов, В.И. Курс высшей математики / В.И. Смирнов – М.: Наука, 1974. – Т. 3, Ч. 2. – 672 с.

9. Лукач, Е. Характеристические функции / Е. Лукач. – М.: Наука, 1979. – 424 с.

10. Токмачев, М.С. Распределение типа гиперболического косинуса / М.С. Токмачев, А.М. Токмачев // Вестник НовГУ. – 2001. – № 17. – С. 85–88.

11. Токмачев, М.С. Прикладной аспект обобщенного распределения гиперболического косинуса / М.С. Токмачев // Вестник НовГУ. Сер.: Техн. науки. – 2005. – № 34. – С. 96–99.

12. Токмачев, М.С. Некоторые интегралы, связанные с распределением типа гиперболического косинуса / М.С. Токмачев // Математика в вузе и в школе: Труды XXIV Международной научно-методической конференции. – СПб.: Петербургский гос. ун-т путей сообщения, 2012. – С. 185–186.

13. Токмачев, М.С. Вычисление интегралов от функций некоторого класса с вероятностной интерпретацией / М.С. Токмачев // Вестник НовГУ. Сер.: Физико-математические науки. – 2014. – № 80. – С. 42–46.

14. Токмачев, М.С. О числовых множествах и последовательностях в связи с распределением типа гиперболического косинуса / М.С. Токмачев // Вестник НовГУ. Сер.: Физико-математические науки. – 2015. – № 3-2(86). – С. 35–39.

15. Токмачев, М.С. Множество подмножеств в структуре некоторой числовой призмы: монография / М.С. Токмачев // Деп. В ВИНИТИ 09.06.2016. – № 91-В2016. – 90 с.

Поступила в редакцию 30 ноября 2016 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2017, vol. 9, no. 3, pp. 18–26

DOI: 10.14529/mmph170303

THE STUDY OF PROBABILITY DISTRIBUTIONS OF THE HYPERBOLIC COSINE TYPE

M.S. Tokmachev
Yaroslav-the-Wise Novgorod State University, Veliky Novgorod, Russian Federation
E-mail: mtokm@yandex.ru

Probability distribution, obtained earlier by the author in a result of the characterization of distributions by the property of the constant regression of quadratic statistics on a linear form and called the hyperbolic cosine type distribution, is considered. Along with the classic normal distribution, gamma distribution, negative binomial and some other distributions, the given three-parameter distribution is related to the class of probability distributions, united by a common characterization condition. The obtained distribution is a generalization of the famous two-parameter Meixner distribution.

In the article, a proof that a function appeared in the result of given characterization is indeed characteristic is given. The structure of this function, in connection with gamma distribution and the corresponding distribution conjugated with the gamma distribution, along with the constant distribution, is presented. Infinite decomposability of distribution is proved.

Based on characteristic function, the probability density function, expressed through the beta function of complex conjugate arguments is recovered in general terms. Along with a unified formula, correlations in elementary functions are deduced for the distribution density functions at integer values of parameter *m*. Density formulas at odd and even values of the parameter are similar on the structure of cofactors: exponent function, hyperbolic secant or cosecant correspondingly, and polynomial factors.

The distribution under study has multiple applications, not only in probability problems. Moments of distribution at specified parameters change as polynomials of some class with corresponding coefficients. These coefficients can be constructed as number sets (number triangles and number sequences), both known and new with setting of a row of functional relationships.

Keywords: distribution of the hyperbolic cosine type; characteristic function; infinitely divisible distribution; beta function.

References

1. Tokmachev M.S. *Dep. in VINITI* 21.06.94, no. 1542-B94, 11 p. (in Russ.).

2. Tokmachev M.S. Postoyanstvo regressii kvadratichnoy statistiki na lineynuyu statistiku (Constancy of regression of quadratic statistics with linear statistics). *Bulletin of the Novgorod state University*, 1995, no. 1, pp. 139–141 (in Russ.).

3. Kagan A.M., Linnick Y.V., Rao S.R. *Kharakterizatsionnye zadachi matematicheskoj statistiki* (Characterization problems of mathematical statistics), Moscow, Nauka Publ., 1972, 656 p. (in Russ.).

4. Klebanov L.B. *Kogda kvadratichnaya statistika imeet postoyannuyu regressiyu na vyborochnoe srednee? (When the quadratic statistic has constant regression on the sample mean?).* Teoriya veroyatnostey i eye primenenie (Theory of probability and its applications), 1979, XXIV, 3. pp. 646–648. (in Russ.).

5. Lai C.D. Meixner classes and Meixner hypergeometric distributions. *Aust. J. Stat.*, 1982, Vol. 24, pp. 221–233. DOI: 10.1111/j.1467-842X.1982.tb00828.x

6. Lai C.D. A characterization of gamma, Meixner hypergeometric and negative binomial distributions based on canonical measures. *Ann. Inst. Stat. Math.*, 1982, Vol. 34, Issue 1, pp. 359–363. DOI: 10.1007/BF02481035

7. Vadzinskiy R.N. *Spravochnik po veroyatnostnym raspredeleniyam* (Handbook of Probabilistic Distributions), St. Petersburg, Nauka Publ., 2001, 295 p. (in Russ.).

8. Smirnov V.I. *Kurs vysshey matematiki* [Course of Higher Mathematics], Moscow, Nauka Publ., 1974, Vol. 3, part 2, 672 p. (in Russ.).

9. Lukacs E. *Characteristic functions.* Hafner Publishing Co., New York, 1970, 350 p.

10. Tokmachev M.S., Tokmachev A.M. Raspredelenie tipa giperbolicheskogo kosinusa (Distribution type hyperbolic cosine). *Bulletin of the Novgorod state University*, 2001, no. 17, pp. 85–88. (in Russ.).

11. Tokmachev M.S. Prikladnoj aspekt obobshhennogo raspredelenija giperbolicheskogo kosinusa (Applied aspect of the generalized hyperbolic cosine distribution). *Bulletin of the Novgorod state University*, 2005, no. 34, p. 96–99 (in Russ.).

12. Tokmachev M.S. Nekotorye integraly, svyazannye s raspredeleniem tipa giperbolicheskogo kosinusa (Some integrals associated with the distribution type hyperbolic cosine). *Matematika v vuze i v shkole: Trudy XXIV Mezhdunarodnoy nauchno-metodicheskoy konferentsii* (Mathematics in high school and in school: Proceedings of the XXIV International Scientific and Methodical Conference), St. Petersburg, Peterburgskiy gos. universitet putey soobshcheniya Publ., 2012, pp. 185–186. (in Russ.).

13. Tokmachev M.S. Vychislenie integralov ot funkcij nekotorogo klassa s verojatnostnoj interpretaciej (Evaluation of integrals for some class of functions with probabilistic interpretation). *Vestnik NovGU. Ser.: Fiziko-matematicheskie nauki (Bulletin of the Novgorod state University. Ser.: Physical and mathematical Sciences)*, 2014, no. 80, pp. 42–46 (in Russ.).

14. Tokmachev M.S. O chislovyh mnozhestvah i posledovatel'nostyah v svyazi s raspredeleniem tipa giperbolicheskogo kosinusa (About number sets and sequences in connection with a distribution of the hyperbolic cosine type). *Vestnik NovGU. Ser.: Fiziko-matematicheskie nauki (Bulletin of the Novgorod state University. Ser.: Physical and mathematical Sciences)*, 2015, no. 3-2 (86), pp. 35–39. (in Russ.).

15. Tokmachev M.S. *Dep. in VINITI* 09. 06. 2016, no. 91-B2016, 90 p. (in Russ.).

Received November 30, 2016