

О ЗАДАЧЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ НАЧАЛЬНОГО ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО УЧАСТКА ПРИ ЛАМИНАРНОМ ТЕЧЕНИИ НЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ В ГОРИЗОНТАЛЬНОМ КОЛЬЦЕВОМ КАНАЛЕ

А.В. Рязских

Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Российская Федерация
E-mail: ryazhskihav@bk.ru

В рамках физической линеаризации уравнений Навье–Стокса об однонаправленном аксиальном ламинарном течении ньютоновской жидкости найдено аналитическое решение задачи идентификации поля скоростей во входной области кольцевого канала, что позволило получить в явном виде соотношение для расчета длины начального гидродинамического участка.

Ключевые слова: кольцевой канал; ньютоновская жидкость; длина начального гидродинамического участка.

Кольцевая геометрия, наряду с цилиндрическими трубами и плоскими каналами, наиболее часто используется в различных технических системах [1]. В [2] показано, что проведение процесса теплопередачи в режиме начального гидродинамического участка является одним из способов интенсификации теплообмена. Поэтому выявление закономерностей формирования структуры поля скоростей на начальном участке и определение его длины в направлении течения жидкости актуально.

Впервые такая задача для кольцевого канала была рассмотрена в [3] на основе погранслоного приближения с применением линеаризации Лангхаара [4]. Детальный обзор последующих теоретических и экспериментальных исследований этой проблемы [5] показал, что различие в определении характеристик начального гидродинамического участка существенно. Уточнение длины начального гидродинамического участка на основе численного интегрирования уравнений Навье–Стокса, например [6], вызывает вопросы корректности используемых вычислительных процедур, связанных с существованием и единственностью решения самих уравнений. Предпринимаются также дальнейшие попытки отыскания аналитических решений, например, использующих идеализацию о «ползущем» течении [7].

В связи с этим в данной работе с позиций физической линеаризации уравнения пограничного слоя на основе гипотезы однонаправленности течения формулируется и аналитически анализируется задача отыскания длины начального гидродинамического участка в горизонтальном кольцевом канале.

Постановка задачи. Математическая формулировка задачи в цилиндрической системе координат имеет вид [8]:

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \eta \left[\frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) - \frac{2v_r}{r^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \right]; \quad (1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \right] + 2 \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right\}; \quad (2)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0; \quad (3)$$

$$v_r(r, z, 0) = v_z(r, z, 0) = 0, \quad v_r(r, 0, t) = 0, \quad v_z(r, 0, t) = v_0 = \text{const}; \quad (4)$$

$$\frac{\partial v_r(r, l, t)}{\partial z} = \frac{\partial v_z(r, l, t)}{\partial z} = 0, \quad v_r(r_1, z, t) = v_z(r_1, z, t) = 0, \quad v_r(r_2, z, t) = v_z(r_2, z, t) = 0, \quad (5)$$

где v_r , v_z – радиальная и аксиальная компоненты вектора скорости жидкости; p – избыточное давление; ρ, η – плотность и коэффициент динамической вязкости жидкости; t – время; r_1, r_2 – радиусы внутренней и внешней соосных цилиндрических труб, составляющих кольцевой канал; l – длина кольцевого канала ($l \gg r_2$).

Как правило, для замыкания системы (1)–(5) дополнительно рассматривается уравнение относительно давления [9]

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = -\rho \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[v_z \frac{\partial (r v_r)}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left(v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right\} + 2\eta \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial^3 v_z}{\partial z^3} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_r}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \left[r \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \right] \right\} \quad (6)$$

с краевыми условиями

$$p(r, 0, t) = p_0 = \text{const}, \quad \frac{\partial p(r, l, t)}{\partial z} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial p(r_1, z, t)}{\partial r} = \frac{\partial p(r_2, z, t)}{\partial r} = 0. \quad (8)$$

Пусть течение по всей длине канала является однонаправленным, т. е. $v_r \equiv 0$, тогда из (3) следует, что $v_z = v_z(r, t)$, причем (1) вырождается в $\partial p / \partial r = 0$, а (2) трансформируется в

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\eta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \quad (9)$$

с граничными условиями

$$v_z(r, 0) = v_0, \quad v_z(r_1, t) = v_z(r_2, t) = 0 \quad (10)$$

и выполнением балансового соотношения

$$\frac{2}{r_2^2 - r_1^2} \int_{r_1}^{r_2} r v_z(r, t) dr = v_0. \quad (11)$$

При этом из (6) следует постоянство аксиального градиента давления, т. е. $\partial p / \partial z = \text{const}$.

В безразмерном виде система (9)–(11) запишется

$$\frac{\partial V}{\partial Z} = C + \frac{1}{Re} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial V}{\partial R} \right); \quad (12)$$

$$V(R, 0) = 1; \quad V(R_1, Z) = V(R_2, Z) = 0; \quad (13)$$

$$\frac{2}{R_2^2 - R_1^2} \int_{R_1}^{R_2} R V(R, Z) dR = 1, \quad (14)$$

где $T = v_0 t / d = z / d = Z$; $R = r / d$; $V = v_z / v_0$; $P = p / (\rho v_0^2)$; $R_{1,2} = r_{1,2} / d$; $Re = v_0 d \rho / \eta$ – число Рейнольдса; $d = 2(r_2 - r_1)$ – гидравлический диаметр; $C = -dP/dZ$.

Решение. Применим к (12), (13) одностороннее интегральное преобразование Лапласа по переменной Z [10]:

$$\frac{d^2 V_L}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{dV_L}{dR} - s Re V_L + \left(\frac{C}{s} + 1 \right) Re = 0; \quad (15)$$

$$V_L(R_1, s) = V_L(R_2, s) = 0, \quad (16)$$

где s, V_L – изображение Z и V соответственно. Решение (15), (16) есть

$$V_L(R, s) = (C + s) / s^2 + \varphi(R, s) / \psi(s), \quad (17)$$

где

$$\varphi(R, s) = (C + s) \left\{ \left[K_0(R_1 \sqrt{s Re}) - K_0(R_2 \sqrt{s Re}) \right] I_0(R \sqrt{s Re}) + \left[I_0(R_2 \sqrt{s Re}) - I_0(R_1 \sqrt{s Re}) \right] K_0(R \sqrt{s Re}) \right\};$$

$$\psi(s) = s^2 \gamma(s), \quad \gamma(s) = I_0(R_1 \sqrt{s Re}) K_0(R_2 \sqrt{s Re}) - I_0(R_2 \sqrt{s Re}) K_0(R_1 \sqrt{s Re}),$$

I_0, K_0 – функции Бесселя и Макдональда мнимого аргумента [11].

Оригинал первого слагаемого правой части (17) равен [12]

$$L^{-1}[(C+s)/s^2] = CZ + 1, \quad (18)$$

где L^{-1} – обратный оператор преобразования Лапласа.

Для нахождения оригинала второго слагаемого правой части (17) применим вторую теорему Ватченко–Захарченко [13]. Корни знаменателя $\psi(s) = 0$ таковы: 1) $s = 0$ – кратности два; 2) бесконечное счетное множество однократных корней s_n уравнения $\gamma(s_n) = 0$. Для корня $s = 0$

$$\frac{\varphi(R, 0)}{\psi'(0)} = \lim_{s \rightarrow 0} \left[Z \exp(sZ) \frac{\varphi(R, s)}{\gamma(s)} + \exp(sZ) \frac{\varphi'_s(R, s)}{\gamma(s)} - \exp(sZ) \frac{\varphi(R, s) \gamma'(s)}{\gamma^2(s)} \right].$$

Так как $I'_0(z) = I_1(z)$ и $K'_0(z) = -K_1(z)$, то

$$\begin{aligned} \varphi'_s(R, s) = & \left[K_0(R_1 \sqrt{sRe}) - K_0(R_2 \sqrt{sRe}) \right] I_0(R \sqrt{sRe}) + \left[I_0(R_2 \sqrt{sRe}) - I_0(R_1 \sqrt{sRe}) \right] K_0(R \sqrt{sRe}) + \\ & + (C+s) \sqrt{Re} \left\{ \left[R_2 K_1(R_2 \sqrt{sRe}) - R_1 K_1(R_1 \sqrt{sRe}) \right] I_0(R \sqrt{sRe}) + \right. \\ & + \left. \left[K_0(R_1 \sqrt{sRe}) - K_0(R_2 \sqrt{sRe}) \right] R I_1(R \sqrt{sRe}) + \left[R_2 I_1(R_2 \sqrt{sRe}) - R_1 I_1(R_1 \sqrt{sRe}) \right] K_0(R \sqrt{sRe}) + \right. \\ & \left. + \left[I_0(R_1 \sqrt{sRe}) - I_0(R_2 \sqrt{sRe}) \right] R K_1(R \sqrt{sRe}) \right\} / (2\sqrt{s}), \\ \gamma'(s) = & \sqrt{Re} \left[R_1 I_1(R_1 \sqrt{sRe}) K_0(R_2 \sqrt{sRe}) - R_2 I_0(R_1 \sqrt{sRe}) K_1(R_2 \sqrt{sRe}) - \right. \\ & \left. - R_2 I_1(R_2 \sqrt{sRe}) K_0(R_1 \sqrt{sRe}) + R_1 I_0(R_2 \sqrt{sRe}) K_1(R_1 \sqrt{sRe}) \right] / (2\sqrt{s}), \end{aligned}$$

тогда

$$\frac{\varphi(R, 0)}{\psi'(0)} = -1 - CZ + \frac{1}{4} CRe \left[-(R^2 - R_1^2) + (R_2^2 - R_1^2) \ln(R/R_1) / \ln(R_2/R_1) \right]. \quad (19)$$

Для корней s_n имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(R, s_n)}{\psi'(s_n)} \exp(s_n Z), \quad (20)$$

откуда следует, что физическому смыслу задачи удовлетворяют чисто мнимые корни, поэтому $\sqrt{s_n Re} = \mu_n i$ или $s_n = -\mu_n^2 / Re$.

Так как $I_0(iz) = J_0(z)$; $K_0(iz) = i \frac{\pi}{2} N_0(z)$; $I_1(iz) = i J_1(z)$; $K_1(iz) = \frac{\pi}{2} N_1(z)$, где $J_0(z)$, $J_1(z)$ – функции Бесселя первого рода; $N_0(z)$, $N_1(z)$ – функции Неймана [14], то

$$\begin{aligned} \varphi\left(R, -\frac{\mu_n^2}{Re}\right) = & \left(C - \frac{\mu_n^2}{Re} \right) i \frac{\pi}{2} \left\{ \left[N_0(R_1 \mu_n) - N_0(R_2 \mu_n) \right] J_0(R \mu_n) + \left[J_0(R_2 \mu_n) - J_0(R_1 \mu_n) \right] N_0(R \mu_n) \right\}; \quad (21) \\ \psi'\left(-\frac{\mu_n^2}{Re}\right) = & -\frac{\mu_n^3}{Re} i \frac{\pi}{4} \left[-R_1 J_1(R_1 \mu_n) N_0(R_2 \mu_n) - R_2 J_0(R_1 \mu_n) N_1(R_2 \mu_n) + \right. \\ & \left. + R_2 J_1(R_2 \mu_n) N_0(R_1 \mu_n) + R_1 J_0(R_2 \mu_n) N_1(R_1 \mu_n) \right]. \quad (22) \end{aligned}$$

Суммируя (18)–(20), с учетом (21) и (22), получим

$$\begin{aligned} V(R, Z) = & \frac{1}{4} CRe \left[-(R^2 - R_1^2) + \frac{(R_2^2 - R_1^2)}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \ln \frac{R}{R_1} \right] - 2 \sum_{n=1}^{\infty} (CRe - \mu_n^2) \left\{ \left[N_0(R_1 \mu_n) - N_0(R_2 \mu_n) \right] J_0(R \mu_n) + \right. \\ & \left. + \left[J_0(R_2 \mu_n) - J_0(R_1 \mu_n) \right] N_0(R \mu_n) \right\} \exp\left(-\frac{\mu_n^2}{Re} Z\right) / \\ & / \left\{ \mu_n^3 \left[-R_1 J_1(R_1 \mu_n) N_0(R_2 \mu_n) - R_2 J_0(R_1 \mu_n) N_1(R_2 \mu_n) + \right. \right. \\ & \left. \left. + R_2 J_1(R_2 \mu_n) N_0(R_1 \mu_n) + R_1 J_0(R_2 \mu_n) N_1(R_1 \mu_n) \right] \right\}, \quad (23) \end{aligned}$$

где μ_n – корни уравнения

$$J_0(R_1\mu_n)N_0(R_2\mu_n) - J_0(R_2\mu_n)N_0(R_1\mu_n) = 0,$$

$R_1 = \frac{1}{2}\bar{R}/(1-\bar{R}), R_2 = \frac{1}{2}/(1-\bar{R}), \bar{R} = r_1/r_2$; константа C определена из (14) при $Z \rightarrow \infty$

$$C = \frac{32}{Re}(1-\bar{R})^2 / \left[1 + \bar{R} + (1-\bar{R}^2)/\ln \bar{R} \right], \tag{24}$$

совпадающая с результатом в [15].

Анализ. Характерная структура гидродинамического поля безразмерных скоростей на входном участке (рис. 1) показывает, что при малых значениях \bar{R} наблюдается асимметрия профиля скорости со сдвинутым максимальным значением в сторону поверхности соосного цилиндра

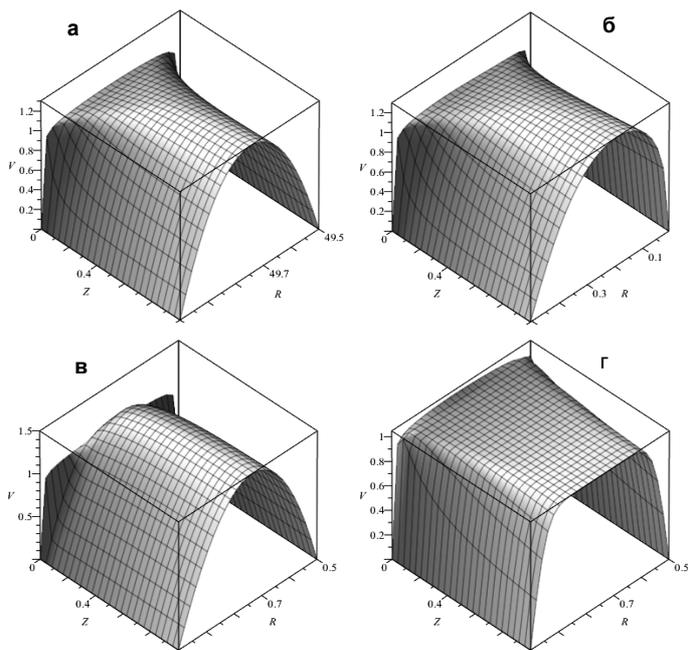


Рис. 1. Поля скоростей, примыкающих ко входному сечению кольцевого канала при различных числах Re и отношениях радиусов внутренней и внешней соосных цилиндрических труб \bar{R} : а) $Re = 100, \bar{R} = 0,99$; б) $Re = 100, \bar{R} = 0,01$; в) $Re = 10, \bar{R} = 0,5$; г) $Re = 1000, \bar{R} = 0,5$

меньшего радиуса, а увеличение числа Re практически линейно увеличивает длину гидродинамического начального участка.

Предполагая, что дрейфом радиальной координаты максимальной скорости на начальном гидродинамическом участке можно пренебречь и считать ее постоянной и равной

$$R^* = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\bar{R}+1}{\bar{R}-1}} / \ln \bar{R}, \text{ найденной из условия } 1 - V(R^*, Z) / V(R^*, \infty) = \varepsilon,$$

где относительная точность ε принимается, как правило, равной 0,02 [16], и ограничиваясь регулярным режимом (в решении (23) учитывается только первое слагаемое ряда), найдено выражение длины начального гидродинамического участка в кольцевом канале:

$$Z_L = f(\bar{R}) Re, \tag{25}$$

где $f(\bar{R}) = \ln \left\{ \varphi(\mu_1) / \left[\varepsilon V(R^*, \infty) \right] \right\};$

$$\varphi(\mu_1) = 2(CRe - \mu_1^2) \left\{ \left[N_0(R_1\mu_1) - N_0(R_2\mu_1) \right] J_0(R^*\mu_1) + \left[J_0(R_2\mu_1) - J_0(R_1\mu_1) \right] N_0(R^*\mu_1) \right\} / \left\{ \mu_1^3 \left[-R_1 J_1(R_1\mu_1) N_0(R_2\mu_1) - R_2 J_0(R_1\mu_1) N_1(R_2\mu_1) + R_2 J_1(R_2\mu_1) N_0(R_1\mu_1) + R_1 J_0(R_2\mu_1) N_1(R_1\mu_1) \right] \right\}.$$

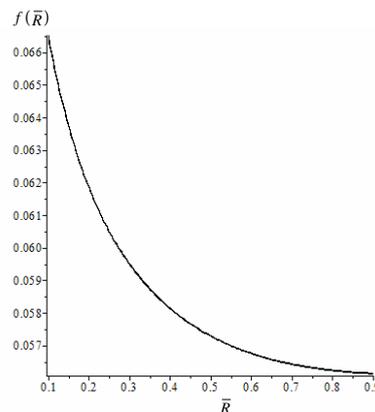


Рис. 2. Вид функции $f(\bar{R})$

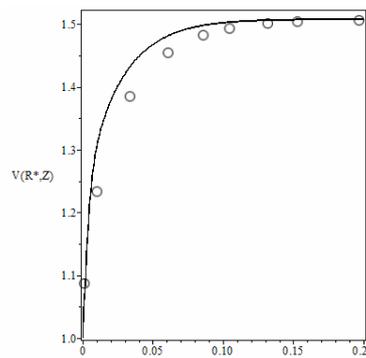


Рис. 3. Изменение максимальной безразмерной скорости вдоль кольцевого канала при $Re = 1$: \square – расчет; \circ – эксперимент

Как следует из (25), длина начального участка пропорциональна числу Re (константа C обратно пропорциональна Re), что согласуется с оценками [17]. Отметим, что при $\bar{R} \rightarrow 0$ и $\bar{R} \rightarrow \infty$ получаем частные случаи для круглой трубы и плоского канала соответственно (рис. 2). Количественное сравнение полученных результатов проведено с классическими экспериментальными данными [3] (рис. 3). Различие рассчитанных и экспериментальных значений скорости в области, примыкающей ко входному сечению, может быть объяснено тем, что в модели не учитывается расход кинетической энергии потока жидкости на нивелирование неоднородности давления по сечению канала. Тем не менее, это не оказывает существенного влияния на длину гидродинамического участка.

Заключение. Синтезированная модель гидродинамики во входной области кольцевого канала характеризуется качественной и количественной адекватностью и может быть применена для расчета длины начального гидродинамического участка при ламинарном течении вязких несжимаемых жидкостей.

Литература

1. Massoud, M. Engineering thermofluids: thermodynamics, fluid mechanics and heat transfer / M. Massoud. – Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005. – 1120 p.
2. Jiji, Latif M. Heat convection / Latif M. Jiji. – Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009. – 543 p.
3. Heaton, H.S. Heat transfer in annular passages-simultaneous development of velocity and temperature fields in laminar flow / H.S. Heaton, W.C. Reynolds, W.M. Kays // Int. J. Heat and Mass Transfer. – 1964. – Vol. 7, № 7. – P. 763–781.
4. Кэйс, В.М. Конвективный тепло- и массообмен / В.М. Кэйс. – М.: Энергия, 1972. – 448 с.
5. The development lengths of laminar pipe and channel flows / F. Durst, S. Ray, B. Ünsal, O.A. Bayoumi // Journal of Fluids Engineering. – 2005. – Vol. 127, no. 6. – P. 1154–1160.
6. Shaker, A.A. A numerical study of low Reynolds number incompressible flow of entrance and disturbed regions of concentric circular pipes / A.A. Shaker // J. of Engineering and Development. – 2012. – Vol. 16, no. 2. – P. 16–33.
7. Ryazhskikh, A.V. Hydrodynamic entrance length for high-viscosity Newtonian fluid flow in an annular channel / A.V. Ryazhskikh, S.V. Ryabov // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 2013. – Vol. 86. – Issue 2. – P. 396–401.
8. Poole, R.J. Development length requirements for fully developed laminar flow in concentric annuli / R.J. Poole // Journal of Fluids Engineering. – 2010. – Vol. 132, № 6. – P. 501–504.
9. Берд, Р. Явления переноса / Р. Берд, В. Стьюарт, Е. Лайтфут. – М.: Химия, 1974. – 688 с.
10. Дёч, Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и z-преобразования / Г. Дёч. – М.: Физматгиз, 1971. – 288 с.
11. Янке, Е. Специальные функции / Е. Янке, Ф. Эйде, Ф. Лещ. – М.: Наука, 1968. – 344 с.
12. Диткин, В.А. Справочник по операционному исчислению / В.А. Диткин, А.П. Прудников. – М.: Высшая школа, 1965. – 465 с.
13. Беляев, Н.М. Методы теории теплопроводности. В 2 ч. Ч.1. / Н.М. Беляев, А.А. Рядно – М.: Высшая школа, 1982. – 327 с.
14. Korenev, V.G. Bessel functions and their applications / V.G. Korenev. – NY: Taylor & Francis, 2002. – 288 p.
15. Идельчик, И.Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям / И.Е. Идельчик. – М.: Машиностроение, 1992. – 672 с.
16. Слезкин, Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости / Н.А. Слезкин. – М.: ГИТТЛ, 1955. – 519 с.
17. McComas, S.T. Hydrodynamic entrance length for ducts of arbitrary cross section / S.T. McComas // J. Basic Eng. – 1967. – Vol. 89, no. 4. – P. 847–850.

Поступила в редакцию 26 февраля 2017 г.

ON THE IDENTIFICATION OF ENTRANCE HYDRODYNAMIC REGION IN CASE OF LAMINAR FLOW OF NEWTONIAN FLUID IN HORIZONTAL ANNULAR CHANNEL**A. V. Ryazhskikh**

Voronezh State Technical University, Voronezh, Russian Federation

E-mail: ryazhskihav@bk.ru

In the frameworks of physical linearization of the Navier-Stokes equations in a cylindrical coordinates system on the one-way axial force-feed laminar flow of Newtonian fluid, a mathematical model of the flow development in the entrance region of a horizontal annular channel is formulated. The unknown constant gradient of pressure along the channel is connected with the equation of continuity written in an integral form of stability of liquid flow in any cross section of a channel. Use of the one-way integral Laplace transformation along the longitudinal coordinate allowed to obtain an analytical expression of the local hydrodynamic field at the entrance region and determine pressure losses coincided with the classic data. Analysis of the characteristic structure of the hydrodynamic field of dimensionless velocities at the entrance region showed that for small values of the ratio of the radii of the inner and outer coaxial cylindrical tubes constituting the annular channel, asymmetry of the longitudinal velocity profile is observed with a shift of the maximum value towards the surface of a coaxial cylinder of smaller radius, and an increase in the Reynolds number practically linearly increases the length of the hydrodynamic entrance region. Assumption about the absence of drift of the radial coordinate of the maximum velocity in the entrance hydrodynamic region, limited to the so-called "regular" regime, made it possible to identify the length of the entrance hydrodynamic region in the annular channel by the completed expression in an explicit form that correlates with the classical estimates obtained as a result of computational experiments. It is noted that when the ratio of the radii of the inner and outer coaxial cylinders approaches zero or infinity (corresponding to particular cases of a circular tube and a flat channel), the known results for the lengths of the entrance hydrodynamic regions are obtained. Difference between velocity values calculated by the proposed model and experimental values in the region adjacent to the entry section is explained by the fact that kinetic energy of the liquid flow is not accounted for by leveling the pressure inhomogeneity along the channel cross-section. Nonetheless, it is shown that it does not have a significant influence on the length of hydrodynamic entrance region.

Keywords: annular channel; Newtonian fluid; length of the entrance hydrodynamic region.

References

1. Massoud M. *Engineering termofluids: thermodynamics, fluid mechanics and heat transfer*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005, 1120 p. DOI: 10.1007/b138870
2. Jiji Latif M. *Heat convection*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009, 543 p. DOI: 10.1007/978-3-642-02971-4
3. Heaton H.S., Reynolds W.C., Kays W.M. Heat transfer in annular passages-simultaneous development of velocity and temperature fields in laminar flow. *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 1964, Vol. 7, no. 7, pp. 763–781. DOI: 10.1016/0017-9310(64)90006-7
4. Kays W.M. *Convective heat and mass transfer*. McGraw-Hill Science, 1993, 480 p.
5. Durst F., Ray S., Ünsal B., Bayoumi O.A. The development lengths of laminar pipe and channel flows. *J. Fluids Eng.*, 2005, Vol. 127, no. 6, pp. 1154–1160. DOI: 10.1115/1.2063088
6. Shaker A.A. A numerical study of low Reynolds number incompressible flow of entrance and disturbed regions of concentric circular pipes. *J. of Engineering and Development*, 2012, Vol. 16, no. 2, pp. 16–33. (<http://www.iasj.net/iasj?func=fulltext&aId=67504>)

7. Ryazhskikh A.V., Ryabov S.V. Hydrodynamic entrance length for high-viscosity Newtonian fluid flow in an annular channel. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2013, Vol. 86, Issue 2, pp. 396–401. DOI: 10.1007/s10891-013-0847-6
8. Poole R.J. Development length requirements for fully developed laminar flow in concentric annuli. *J. Fluids Eng.*, 2010, Vol. 132, no. 6, pp. 501–504. DOI: 10.1115/1.4001694
9. Bird R.B., Stewart W.E., Lightfoot E.N. *Transport phenomena*. New York, John Wiley, 2007, 928 p.
10. Doetsch, G. *Anleitung zum praktischen gebrauch der Laplace-transformation und der Z-transformation*. München-Wien: R. Oldenbourg Verlag, 1967, 256 p.
11. Janke E., Emde F., Lösch F. *Tafeln höherer Funktionen*. Stuttgart, B.G.Teubner Verlagsgesellschaft, 1960, 318 p.
12. Ditkin V.A., Prudnikov A.P. *Spravochnik po operatsionnomu ischisleniyu* (Reference book on operational calculus). Moscow, Vysshaya shkola, 1965, 465 p. (in Russ.).
13. Belyaev N.M., Ryadno A.A. *Metody teorii teploprovodnosti. V 2 ch. Ch.1.* (Heat conductivity theory techniques. In two parts. Part 2). Moscow, Vysshaya shkola, 1982, 327 p. (in Russ.).
14. Korenev B.G. *Bessel functions and their applications*. NY: Taylor & Francis, 2002, 288 p.
15. Idel'chik I.E. *Spravochnik po gidravlicheskim soprotivleniyam* (Reference book on hydraulic resistance). Moscow, Mashinostroenie Publ., 1992, 672 p. (in Russ.).
16. Slezkin N.A. *Dinamika vyazkoy neszhimaemoy zhidkosti* (Dynamics of viscous incompressible liquid). Moscow, GITTL publ., 1955, 519 p. (in Russ.).
17. McComas S.T. Hydrodynamic entrance length for ducts of arbitrary cross section. *J. Basic Eng.*, 1967, Vol. 89, no. 4, pp.847–850. DOI: 10.1115/1.3609713

Received February 26, 2017