УДК 517.929.2 DOI: 10.14529/mmph170402

СРАВНЕНИЕ НЕСКОЛЬКИХ ПРИЗНАКОВ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

***Д.А. Комиссарова*[1], *М.М. Кипнис*[2]**
[1]*Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация*
E-mail: komissarovada@susu.ru
[2]*Южно-Уральский государственный гуманитарно-педагогический университет, г. Челябинск, Российская Федерация*
E-mail: mmkipnis@gmai.com

Сравниваются признаки асимптотической устойчивости линейных разностных уравнений авторов публикации и некоторые известные признаки других авторов. Достаточные условия авторов лучше, чем известные ранее признаки. Конкурирующими являются признаки авторов и китайских исследователей. Признаки Кипниса и Комисаровой содержат линейные ограничения на коэффициенты уравнения, а в работе китайских исследователей были найдены нелинейные условия асимптотической устойчивости. Существуют области в пространстве положительных коэффициентов уравнения, устойчивость в которых диагностируется с помощью признаков авторов, но не выявляется признаком китайских исследователей, и наоборот. Показаны области гарантированной устойчивости, которые выявляются различными признаками, на примере уравнения с двумя запаздываниями. Указаны классы разностных уравнений, в которых признаки Кипниса и Комиссаровой заведомо лучше. Доказаны соответствующие теоремы. Приведены примеры, иллюстрирующие возможности применения различных признаков.

Ключевые слова: устойчивость; разностные уравнения.

1. Основные известные результаты

Рассмотрим линейное разностное уравнение порядка k

$$x_n = x_{n-1} - \sum_{s=1}^{k} a_s x_{n-s}, \qquad (1)$$

где $a_s \in \mathbb{R}$, $a_s \ge 0 \ \left(1 \le s \le k\right)$. Мы называем уравнение (1) асимптотически устойчивым, если все его решения стремятся к нулю при $n \to \infty$. Цель работы – сравнить силу нескольких признаков устойчивости уравнения (1).

Авторы настоящей статьи опубликовали следующий результат [1].

Теорема 1.1. Если $a_s \ge 0 \ \left(1 \le s \le k\right)$ и

$$0 < \sum_{s=1}^{k} \frac{a_s}{2\sin\dfrac{\pi}{2(2s-1)}} < 1, \qquad (2)$$

то уравнение (1) асимптотически устойчиво.

Теорема 1 является многомерным обобщением известного результата Левина и Мэя [2]. Из теоремы 1.1 вытекает следующий результат.

Теорема 1.2 ([1]). Если $a_s \ge 0 \ \left(1 \le s \le k\right)$ и

$$0 < \sum_{s=1}^{k} s a_s \le \frac{\pi}{2}, \qquad (3)$$

то уравнение (1) асимптотически устойчиво.

Теорема 1.2 усиливает результаты работ [3] и [4], в которых вместо $\frac{\pi}{2}$ в неравенстве (3) были числа 1 и $1+\frac{1}{e}$ соответственно, а также результат статьи Танга и Джианга [5] с числом $\frac{3}{2}$ вместо $\frac{\pi}{2}$ в неравенстве (3).

Теорема 1.3 ([1]). Если $a_s \ge 0 \ \left(1 \le s \le k\right)$ и

$$0 < \sum_{s=1}^{k} s a_s < 2k \sin \frac{\pi}{2(2k-1)}, \qquad (4)$$

то уравнение (1) асимптотически устойчиво.

Признак устойчивости теоремы 1.3 сильнее признака теоремы 1.2, но обладает тем недостатком, что его правая часть зависит от порядка уравнения (1). В то же время признак теоремы 1.3 слабее признака теоремы 1.1. Теорема 1.1 в некотором смысле не может быть улучшена. Следующая теорема подтверждает это высказывание.

Теорема 1.4 ([1]). Пусть $A_s \ge 0 \ \left(1 \le s \le k\right)$, причем существует такое $s \ \left(1 \le s \le k\right)$, что $A_s > 2 \sin \frac{\pi}{2(2s-1)}$. Тогда найдется точка $\left(a_1, \ldots, a_k\right)$ такая, что $a_s \ge 0 \ \left(1 \le s \le k\right)$, $0 < \sum_{s=1}^{k} \frac{a_s}{A_s} < 1$ и уравнение (1) с коэффициентами $a_1, \ldots, a_k$ неустойчиво.

Замечание. Неулучшаемость констант в условии (2) теоремы 1.1 не свидетельствует о необходимости условия (2) устойчивости уравнения (1). Как показано в работе [6], для некоторых уравнений симплекс устойчивости, определенный неравенством (2), заполняет лишь малую часть области устойчивости.

Постоянная $\frac{\pi}{2}$ в теореме 1.2 и правая часть неравенства (4) в теореме 1.3 также не могут быть улучшены (см. [1]). Приведем теперь для сравнения результаты Кука, Дьери и Хартунга.

Теорема 1.5 (Кук–Дьери, [3]). Если $a_s \ge 0 \ \left(1 \le s \le k\right)$ и

$$0 < \sum_{s=1}^{k} s a_s < 1, \qquad (5)$$

то уравнение (1) асимптотически устойчиво.

Теорема 1.6 (Дьери–Хартунг, [4]). Если $a_s \ge 0 \ \left(1 \le s \le k\right)$ и

$$0 < \sum_{s=1}^{k} s a_s < 1 + \frac{1}{e}, \qquad (6)$$

то уравнение (1) асимптотически устойчиво.

Поскольку $1 < 1 + \frac{1}{e} < \frac{\pi}{2}$, теорема 1.2 сильнее теорем 1.5 и 1.6.

2. Сравнение с работой Танга и Джианга

Результаты работы [5] Танга и Джианга конкурируют с ранее указанными в настоящей статье признаками.

Теорема 2.1 (Танг–Джианг, [5]). Уравнение (1) асимптотически устойчиво, если

$$\sum_{s=1}^{k} s a_s < \begin{cases} 1 + \mu_0 \left(1 - \mu_0 / 4\right), & 1 < \mu_0 < 2; \\ 1 + 2\mu_0 - 5\mu_0^2 / 4, & 1/2 < \mu_0 \le 1; \\ 3/2 + \mu_0 \left(2 - \mu_0\right) / 4, & 0 < \mu_0 \le 1/2, \end{cases} \qquad (7)$$

где $\mu_0 = \sum_{s=1}^{k} a_s$.

Условие (7) выполняется, если $0 < \sum_{s=1}^{k} s a_s < \frac{3}{2}$, поэтому теорема 2.1 сильнее теорем 1.5 и 1.6. Сравним теперь результаты Танга–Джианга с результатами работы [1] авторов настоящей статьи.

Пример 1. Рассмотрим уравнение $x_n = x_{n-1} - 1{,}86 x_{n-1} - 0{,}01 x_{n-12}$. В этом случае $\sum_{s=1}^{k} s a_s = 1{,}98 > \frac{\pi}{2}$. Поэтому признак теоремы 1.2 не может быть применен. Теорема 1.1 также неприменима, поскольку $\sum_{s=1}^{k}\frac{a_s}{2\sin\frac{\pi}{2(2s-1)}}=1{,}003>1$. Рассмотрим признак Танга–Джианга. Согласно (7), $\mu_0=1{,}87$ и $1+\mu_0\left(1-\mu_0/4\right)=1{,}996>1{,}98$. Условие теоремы 2.1 выполнено, данное уравнение асимптотически устойчиво. Таким образом, для примера 1 теорема 2.1 оказалась эффективнее теоремы 1.1.

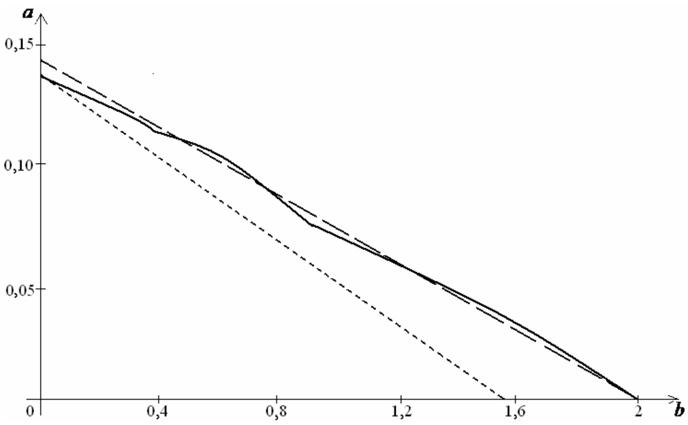
Рассмотрим разностное уравнение с двумя запаздываниями

$$x_n=x_{n-1}-ax_{n-m}-bx_{n-k}, \tag{8}$$

где $a,b\in\mathbb{R}$, запаздывания $m,k\in\mathbb{N}$, причем $m\le k$.

Рисунок показывает, как теоремы 1.1, 1.2 и 2.1 обнаруживают области устойчивости уравнения (8) при $m=1$, $k=12$.

Рисунок показывает некоторые области в пространстве коэффициентов уравнения (8), устойчивость в которых гарантируется теоремой 1.1, но не теоремой 2.1, и наоборот. Далее мы намерены показать, что при $a_1=0$ признак теоремы 1.1 сильнее признака Танга–Джианга.



Области гарантированной устойчивости уравнения (8) при $m=1$, $k=12$. Пунктирная линия – граница симплекса (3), штриховая линия – граница симплекса (2), сплошная линия – граница области Танга–Джианга

Лемма 2.1. Для любых натуральных чисел $s\ge s_0$

$$\sin\frac{\pi}{2(2s-1)}\ge\frac{2\left(2s_0-1\right)\sin\frac{\pi}{2(2s_0-1)}}{2s-1}.$$

Доказательство. Ввиду выпуклости функции $\sin x$ на $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ верно неравенство $\sin x\ge\frac{\sin a}{a}x$ при $x\in[0;a]$, $0<a\le\frac{\pi}{2}$. Поэтому для всех $s\ge s_0$

$$\sin\frac{\pi}{2(2s-1)}\ge\frac{2\left(2s_0-1\right)\sin\frac{\pi}{2(2s_0-1)}}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2(2s-1)}=\frac{2\left(2s_0-1\right)\sin\frac{\pi}{2(2s_0-1)}}{2s-1}.$$

Лемма доказана.

Теорема 2.2. Если $a_1=0$, то из неравенства (7) следует неравенство (2).

Доказательство. По лемме 2.1 имеем

$$\sum_{s=2}^{k}\frac{a_s}{2\sin\frac{\pi}{2(2s-1)}}\le\sum_{s=2}^{k}\frac{a_s}{3}\left(2s-1\right)=\mu_0+\frac{2}{3}\sum_{s=2}^{k}\left(s-2\right)a_s. \tag{9}$$

Пусть $1<\mu_0<2$. Из (7) следует, что

$$2\mu_0+\sum_{s=3}^{k}\left(s-2\right)a_s<1+\mu_0\left(1-\frac{\mu_0}{4}\right).$$

Отсюда $\mu_0^2+4\mu_0-4<0$. Тогда $\mu_0<-2+2\sqrt{2}\approx 0{,}83<1$, противоречие. Остаются два случая.

Случай 1: $\frac{1}{2}<\mu_0\le 1$. Из (7) имеем

$$2\mu_0+\sum_{s=3}^{k}\left(s-2\right)a_s<1+2\mu_0-\frac{5}{4}\mu_0^2.$$

Отсюда

$$\sum_{s=3}^{k}(s-2)a_s<1-\frac{5}{4}\mu_0^2. \tag{10}$$

Ввиду (9) и (10) при любом μ_0 получаем

$$\sum_{s=2}^{k}\frac{a_s}{2\sin\frac{\pi}{2(2s-1)}}<\mu_0+\frac{2}{3}-\frac{5}{6}\mu_0^2<1.$$

Случай 2: $0<\mu_0\le\frac{1}{2}$. Из (7) имеем

$$2\mu_0+\sum_{s=3}^{k}(s-2)a_s<\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\mu_0-\frac{1}{4}\mu_0^2.$$

Отсюда

$$\sum_{s=3}^{k}(s-2)a_s<\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\mu_0-\frac{1}{4}\mu_0^2. \tag{11}$$

Ввиду (9) и (11) получаем

$$\sum_{s=2}^{k}\frac{a_s}{2\sin\frac{\pi}{2(2s-1)}}<\mu_0+1-\mu_0-\frac{1}{6}\mu_0^2=1-\frac{1}{6}\mu_0^2<1$$

при любом $\mu_0>0$. Теорема доказана.

Пример 2. Рассмотрим уравнение $x_n=x_{n-1}-0,9x_{n-1}-0,05x_{n-3}$.

В этом случае $\sum_{s=1}^{k}sa_s=1{,}95$. Так как $1{,}95>\frac{\pi}{2}$ и $1{,}95>6\sin\frac{\pi}{10}\approx1{,}854$, теоремы 1.2 и 1.3 неприменимы для исследования устойчивости этого уравнения. Поскольку $\sum_{s=1}^{k}\frac{a_s}{2\sin\frac{\pi}{2(2s-1)}}\approx0{,}981<1$, согласно теореме 1.1 данное уравнение асимптотически устойчиво.

Имеем $\mu_0=0{,}95$ и $1+2\mu_0-5\mu_0^2/4=1{,}77<1{,}95$, условие (7) не выполняется. Значит, с помощью признака Танга–Джианга нельзя сделать выводов об устойчивости.

Укажем класс уравнений, для которых признаки теорем 1.2 и 1.3 сильнее признака Танга–Джианга.

Теорема 2.3. Если $a_1=a_2=\ldots=a_{10}=0$, то из неравенства (7) следует неравенство (3).

Доказательство. Предположим, что $1<\mu_0<2$. Из (7) получаем

$$11\mu_0+\sum_{s=12}^{k}(s-11)a_s<1+\mu_0\left(1-\frac{\mu_0}{4}\right).$$

Отсюда $\mu_0^2+40\mu_0-4<0$. Тогда $\mu_0<-20+2\sqrt{101}\approx0{,}1<1$, противоречие.

Теперь предположим, что $\frac{1}{2}<\mu_0\le1$. Из (7) получим

$$11\mu_0+\sum_{s=12}^{k}(s-11)a_s<1+2\mu_0-\frac{5}{4}\mu_0^2.$$

Отсюда $5\mu_0^2+36\mu_0-4<0$. Тогда $\mu_0<\frac{-18+\sqrt{344}}{5}\approx0{,}11<\frac{1}{2}$, противоречие.

Остается случай $0<\mu_0\le\frac{1}{2}$. Из (7) имеем

$$11\mu_0+\sum_{s=12}^{k}(s-11)a_s<\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\mu_0-\frac{1}{4}\mu_0^2.$$

Отсюда $\mu_0^2 + 42\mu_0 - 6 < 0$. Тогда $\mu_0 < -21 + \sqrt{447} \approx 0{,}142$.

Поскольку функция $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\mu_0 - \frac{1}{4}\mu_0^2$ возрастает на $\left(0; \frac{1}{2}\right]$, из (7) получаем

$$\sum_{s=11}^{k} sa_s < \frac{3}{2} + \frac{1}{4}\left(-21 + \sqrt{447}\right)\left(23 - \sqrt{447}\right) \approx 1{,}556 < \frac{\pi}{2}.$$

Теорема доказана.

Так как $\frac{\pi}{2} < 2k \sin\frac{\pi}{2(2k-1)}$ при любом натуральном k, получаем следствие:

Следствие теоремы 2.3. Если $a_1 = a_2 = \ldots = a_{10} = 0$, то из неравенства (7) следует неравенство (4).

Теорема 2.3 и следствие из нее фиксируют преимущество любой из теорем 1.1, 1.2, 1.3 перед признаком Танга–Джианга для разностных уравнений с большими запаздываниями.

Следующий пример показывает, что теорема 2.3 в некотором смысле неулучшаема.

Пример 3. Рассмотрим уравнение $x_n = x_{n-1} - 1572{,}4 \cdot 10^{-4} x_{n-10} - 0{,}0007 \cdot 10^{-4} x_{n-480}$.

Это уравнение асимптотически устойчиво, поскольку (см. (7)) $\mu_0 = 1572{,}4007 \cdot 10^{-4}$ и $\frac{3}{2} + \mu_0(2 - \mu_0)/4 \approx 15724{,}3893 \cdot 10^{-4} > \sum_{s=1}^{k} sa_s = 15724{,}336 \cdot 10^{-4}$. Но неравенство (3) не выполнено, так как $\sum_{s=1}^{k} sa_s = 15724{,}336 \cdot 10^{-4} > \frac{\pi}{2}$.

Замечание. Признак Танга–Джианга и теорема 1.1 требуют для устойчивости уравнения (1), чтобы сумма коэффициентов, обозначенная посредством μ_0, была меньше 2. Но следующий пример показывает, что уравнение (1) может быть устойчивым и при $\mu_0 \geq 2$.

Пример 4. Рассмотрим уравнение

$$x_n = x_{n-1} - \left(1{,}9x_{n-1} + 0{,}8x_{n-2} + 0{,}7x_{n-3} + 0{,}6x_{n-4}\right). \quad (12)$$

В данном случае $\mu_0 = 3$. Согласно результатам Энестрема–Какейа 1892 г. [7], уравнение $x_n + \sum_{s=1}^{k} a_s x_{n-s} = 0$ устойчиво, если $1 \geq a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_k > 0$. Уравнение (12) удовлетворяет этому условию, поэтому оно асимптотически устойчиво.

Работа выполнена при поддержке ФГБОУ ВО «Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева», договор № 16-746.

Литература

1. Kipnis, M.M. A note on explicit stability conditions for autonomous higher order difference equations / M.M. Kipnis, D.A. Komissarova // Journal of Difference Equations and Applications. – 2007. – Vol. 13, № 5. – P. 457–461.

2. Levin, S.A note on difference-delay equations / S. Levin, R. May // Theoret. Popul. Biol. – 1976. – Vol. 9, № 2. – P. 178–187.

3. Cooke, K.L. Numerical approximation of the solutions of delay differential equations on an infinite interval using piesewise constant arguments / K.L. Cooke, I. Gyori // Computers & Mathematics with Applications. – 1994. – Vol. 28. – Issue 1-3. – P. 81–92.

4. Győri, I. Stability in delay perturbed differential and difference equations / I. Győri, F. Hartung // Fields Institute Communications. – 2001. – Vol. 29. – P. 181–194.

5. Tang, X.H. Asymptotic behavior of Volterra difference equations / X.H. Tang, Z. Jiang // Journal of Difference Equations and Applications. – 2007. – Vol. 13, № 1. – P. 25–40.

6. Левицкая, И.С. Область устойчивости линейного разностного уравнения с двумя запаздываниями / И.С. Левицкая // Известия Челябинского научного центра. – 2004. – Вып. 3(24). – С. 12–16.

7. Прасолов, В.В. Многочлены / В.В. Прасолов. – М.: МЦ МНО, 2001. – 336 с.

Поступила в редакцию 4 июля 2017 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2017, vol. 9, no. 4, pp. 13–18

DOI: 10.14529/mmph170402

COMPARISON OF SEVERAL STABILITY CONDITIONS FOR LINEAR DIFFERENCE EQUATIONS

***D.A. Komissarova*[1], *M.M. Kipnis*[2]**
[1] *South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation*
E-mail: komissarovada@susu.ru
[2] *South Ural State Pedagogical University for Humanities, Chelyabinsk, Russian Federation*
E-mail: mmkipnis@gmai.com

The paper compares the asymptotic stability criteria for linear difference equations, and some other well-known criteria found by the authors of the publication. Sufficient conditions given by the authors are better than the known ones. Criteria by the authors compete with the criteria of the Chinese researchers. The criteria of Kipnis and Komisarova consist of the linear constraints on the coefficients of the equations, while in the work of the Chinese researchers nonlinear conditions for asymptotic stability were found. There are domains in the space of positive coefficients of an equation, stability of which is revealed by the authors' criteria, but is not detected by the Chinese researchers test, and vice versa. The areas of guaranteed stability, which are revealed by different conditions, are shown for the linear difference equation with two delays. The classes of the difference equations are given in which the Kipnis and Komissarova criteria are certainly better. The corresponding theorems are proved. Examples illustrating the possibilities of using various criteria are given.

Keywords: stability; difference equations.

References

1. Kipnis M.M., Komissarova D.A. A note on explicit stability conditions for autonomous higher order difference equations. *J. Difference Equ. Appl.*, 2007, Vol. 13, no. 5, pp. 457–461. DOI: 10.1080/10236190601132933

2. Levin S., May R. A note on difference-delay equations. *Theoret. Popul. Biol*., 1976, Vol. 9, no. 2, pp. 178–187. DOI: 10.1016/0040-5809(76)90043-5

3. Cooke K.L., Gyori I. Numerical approximation of the solutions of delay differential equations on an infinite interval using piesewise constant arguments. *Comp. Math. Appl.*, 1994, Vol. 28, Issue 1-3, pp. 81–92. DOI: 10.1016/0898-1221(94)00095-6

4. Győri I., Hartung F. Stability in delay perturbed differential and difference equations. *Fields Institute Communications*, 2001, Vol. 29, pp. 181–194. http://www.ams.org/books/fic/029/14 DOI: 10.1090/fic/029

5. Tang X.H., Jiang Z. Asymptotic behavior of Volterra difference equations. *J. Difference Equ. Appl.*, 2007, Vol. 13, no. 1, pp. 25–40. DOI: 10.1080/10236190601008810

6. Levitskaya I.S. *Izvestiya Chelyabinskogo nauchnogo tsentra*, 2004, no. 3(24), pp. 12–16. (in Russ). http://csc.ac.ru/news/2004_3/2004_3_1_3.zip

7. Prasolov V.V. *Polynomials*. Springer Berlin Heidelberg, 2004, 301 p. DOI: 10.1007/978-3-642-03980-5

Received July 4, 2017