УДК 517.956 DOI: 10.14529/mmph170403

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ФУНКЦИИ ИСТОЧНИКА В КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ С ТОЧЕЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЯ

С.Г. Пятков, В.В. Ротко
Югорский государственный университет, г. Ханты-Мансийск, Российская Федерация
E-mail: s_pyatkov@ugrasu.ru

Рассматривается вопрос о корректности в пространствах Соболева обратной задачи об определении функции источников в квазилинейной параболической системе второго порядка. Проблемы подобного вида возникают при описании процессов тепломассопереноса, диффузионных процессов, процессов фильтрации и во многих других областях. Главная часть оператора линейна. Неизвестные функции, зависящие от времени, входят в нелинейную правую часть. В том числе в этот класс задач входят и коэффициентные обратные задачи об определении младших коэффициентов в параболическом уравнении или системе. В качестве условий переопределения рассматриваются значения решения в некотором наборе внутренних точек. В качестве краевых условий берутся условия Дирихле или условия задачи с косой производной. Задача рассматривается в ограниченной области с гладкой границей. Однако результаты допускают обобщения и на случай неограниченных областей таких, в которых соответствующие теоремы о разрешимости прямой задачи имеют место. Приведены условия, гарантирующие локальную по времени корректность задачи в классах Соболева. Условия на данные задачи минимальны. Полученные результаты являются точными. Задача сводится к операторному уравнению, существование решения которого доказывается при помощи априорных оценок и теоремы о неподвижной точке. Полученное решение обладает всеми обобщенными производными, входящими в уравнение, принадлежащими пространству L_p с $p > n + 2$ и обладает необходимой дополнительной гладкостью в некоторой окрестности точек переопределения.

Ключевые слова: параболическое уравнение; обратная задача; тепломассоперенос; краевая задача; функция источников.

Введение

Мы рассматриваем вопрос об определении вместе с решением правой части специального вида или младших коэффициентов в параболических уравнениях и системах. Пусть G – область в R^n с границей Γ класса C^2 и $Q=(0,T)\times G$. Параболическое уравнение имеет вид

$$Lu = u_t + A(t,x,D)u = f(x,t,u,\nabla u,\vec{q}),\ (t,x)\in Q, \tag{1}$$

где A – матричный эллиптический оператор вида $A(t,x,D)u = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)u_{x_j x_j}$, a_{ij}, a_i – $r_0\times r_0$ матрицы, u – вектор длины r_0 и $\vec{q}(t)=(q_1(t),q_2(t),\ldots,q_m(t))$ – неизвестные функции, подлежащие определению вместе с решением u. Система (1) дополняется начальными и граничными условиями

$$u|_{t=0}=u_0,\ Bu|_S = g,\ S=(0,T)\times\Gamma, \tag{2}$$

где $Bu=\sum_{i=1}^{n}\gamma_i(t,x)u_{x_i}+\sigma(t,x)u$ или $Bu=u$, n_i – i-я координата внешней единичной нормали к Γ и $\gamma_i(t,x),\sigma(t,x)\in C^1(\overline{S})$. Условия переопределения записываются в виде

$$u(x_i,t)=\psi_i(t),\ i=1,2,\ldots,r. \tag{3}$$

Обратная задача состоит в нахождении решения u уравнения (1) и функций $q_i(t)$ ($i=1,2,\ldots,m$ ($m=rr_0$) по данным (2), (3).

Проблемы подобного вида возникают при описании процессов тепломассопереноса, диффузионных процессов, процессов фильтрации и во многих других областях (см. [1]). Прежде всего, мы сошлемся на работу [2], где получена теорема существования и единственности решений задачи (1)–(3) в пространствах Гельдера в случае $r_0 = 1$, $r = 1$ и линейной по своим аргументам u, ∇u функции f. В случае $n = 1$, $r = 1$ и $G = R$ аналогичный результат в получен в работах [3, 4]. В работах [5, 6] была рассмотрена также и задача об определении младшего коэффициента в параболическом уравнении. В работе [7] (см. также [8]) была рассмотрена линейная обратная задача об определении функции источников в случай задачи Коши для операторно-дифференциального уравнения первого порядка $u_t + Au = f(t)z$ с условием переопределения вида $\Phi(u) = \psi(t)$, где Φ – некоторый функционал. Задача вида (1)–(3) входит в класс таких задач, при определенном выборе функционального пространства в котором ищется решение и в случае линейности задачи. Более общие теоремы о разрешимости абстрактных задач такого вида в квазилинейном случае получены в монографии [9]. Однако стоит отметить, что результаты [9] применимы к задаче (1)–(3) в случае функции g, зависящей только от функции u, но не от ∇u, и в случае краевых условий таких, что область определения оператора L не зависит от времени. Кроме того, даже в этом случае использование этих результатов приводит к излишним условиям гладкости и согласования на данные задачи. Ряд задач, входящих в класс (1), был рассмотрен в работе [10]. Отметим, что численные методы решения различных модельных задач, входящих в класс (1)–(3), рассматривались, например, в работах [11, 12] и многих других. В частности, в работе [12] рассматривалась обратная задача (1)–(3) об определении функции источника для квазилинейной системы параболических уравнений.

Мы получим локальную теорему о разрешимости задачи при минимальных (в определенном смысле) условиях на данные.

Опишем содержание работы. В первом параграфе описаны условия на данные задачи и сформулированы основные результаты. Во втором параграфе приведено их доказательство. Обозначения функциональных пространств стандартные (см., например, [13]).

1. Определения, обозначения и вспомогательные результаты

Пусть E – банахово пространство. Символом $L_p(G;E)$ (G – область в R^n) обозначаем пространство сильно измеримых функций, определенных на G, со значениями в E, наделенное нормой $\|\|u(x)\|_E\|_{L_p(G)}$ [13]. Мы также используем пространства Гельдера $C^{\alpha}(\overline{G})$. Обозначения $W_p^s(G;E)$, $W_p^s(Q;E)$ пространств Соболева являются стандартными (см. определения в [13, 14]). Если $E = C$ ($E = R$) или $E = C^n$ ($E = R^n$), тогда последнее пространство обозначается через $W_p^s(Q)$. Аналогично используем обозначения $W_p^s(G)$ или $C^{\alpha}(\overline{G})$ вместо $W_p^s(G;E)$ или $C^{\alpha}(\overline{G};E)$. Таким образом, включение $u \in W_p^s(G)$ (или $u \in C^{\alpha}(\overline{G})$) для данной вектор-функции $u = (u_1, u_2, \ldots, u_k)$ означает, что каждая из ее компонент u_i принадлежит $W_p^s(G)$ (или $C^{\alpha}(\overline{G})$). В этом случае норма вектора есть просто сумма норм координат. То же самое соглашение принимаем для матриц-функций. Для интервала $J = (0,T)$ положим $W_p^{s,r}(Q) = W_p^r(J; L_p(G)) \cap L_p(J; W_p^s(G))$. Соответственно, $W_p^{s,r}(S) = W_p^r(J; L_p(\Gamma)) \cap L_p(J; W_p^s(\Gamma))$. Аналогично определяем пространство Гельдера $C^{r,s}(\overline{Q})$.

Пусть $B_\delta(x_i)$ – шар радиуса δ с центром в точке x_i. Далее мы используем следующие обозначения: $Q^\tau = (0,\tau) \times G$, $S^\gamma = (0,\gamma) \times \Gamma$. Дан набор точек $\{x_j\}$ из (3), параметр $\delta > 0$ назовем допустимым, если $\overline{B_\delta(x_i)} \subset G$, $\overline{B_\delta(x_i)} \cap \overline{B_\delta(x_j)} = \varnothing$ для $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, r$. Пусть $G_\delta = \cup_i B_\delta(x_i)$, $Q_\delta = (0,T) \times G_\delta$, и $Q_\delta^\tau = (0,\tau) \times G_\delta$.

Рассмотрим задачу (1)–(2) и сформулируем один вспомогательный результат. Мы будем предполагать, что у нас выполнены **условия на коэффициенты** A:

$$a_{ij} \in C(\overline{Q}) \cap L_\infty(0,T; W_p^s(G_\delta)),\ p > n+2,\ \gamma_i, \sigma \in C^1(\overline{S}),\ i, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{4}$$

для некоторого допустимого $\delta > 0$ и $s \in (n/p, 1]$. Мы также предполагаем, что L – параболический оператор и выполнено условие Лопатинского. Сформулируем эти условия. Рассмотрим матрицу $A(t,x,\xi) = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j$ $(\xi \in R^n)$ и предположим, что найдется постоянная $\delta_1 > 0$, такая, что корни p полинома $\det(A(t,x,i\xi) + pE) = 0$ (E – единичная матрица) удовлетворяют условию

$$\operatorname{Re} p \le -\delta_1 |\xi|^2 \quad \forall \xi \in R^n \quad \forall (x,t) \in Q. \tag{5}$$

Пусть $B_0 u = u$ в случае условий Дирихле в (2) и $B_0 u = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \partial_{x_j} u$ в противном случае. Условие Лопатинского может быть записано в виде: для любой точки $(t_0, x_0) \in S$ и операторов $A(x,t,D)$ и $B_0(x,t,D)$, записанных в локальной системе координат y в этой точке (ось y_n направлена по нормали к S, и оси $y_1, \ldots, y_{n-1}$ лежат в касательной плоскости в точке (x_0, t_0)), система

$$(\lambda E + A_0(x_0, t_0, i\xi', \partial_{y_n}))v(z) = 0, \ B_0(x_0, t_0, i\xi', \partial_{y_n})v(0) = h_j, \tag{6}$$

где $\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$, $y_n \in R^+$, имеет единственное решение из $C(\overline{R}^+)$, ограниченное на бесконечности при всех $\xi' \in R^{n-1}$, $|\arg \lambda| \le \pi/2$, и $h_j \in C$ таких, что $|\xi'| + |\lambda| \ne 0$. Мы также предполагаем, что

$$u_0(x) \in W_p^{2-2/p}(G), \ g \in W_p^{2k_0, k_0}(S), \ B(x,0)u_0(x)|_\Gamma = g(x,0) \ \forall x \in \Gamma, \tag{7}$$

где $k_0 = 1 - 1/2p$ в случае условия Дирихле и $k_0 = 1/2 - 1/2p$ в противном случае,

$$u_0(x) \in W_p^{2+s-2/p}(G_\delta) \text{ для некоторого допустимого } \delta > 0 \ u \ s \in (n/p, 1]. \tag{8}$$

Даны постоянные $\delta_1 < \delta_2 < \delta$. Построим вспомогательную функцию $\varphi \in C_0^\infty(G_\delta)$ такую, что $\varphi \equiv 1$ в области G_{δ_1} и $\varphi \equiv 0$ в $G_\delta \setminus G_{\delta_2}$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (4)–(8) для некоторого допустимого* $\delta > 0$ *и* $s \in (n/p, 1]$, $f \in L_p(Q^\tau)$, $f\varphi \in L_p(0,\tau; W_p^s(G_\delta))$ *и* $\tau \in (0,T]$. *Тогда существует единственное решение* $u \in W_p^{2,1}(Q^\tau)$ *задачи*

$$Lu = f \ \ ((x,t) \in Q), \ u|_{t=0} = u_0(x), \ Bu|_S = g. \tag{9}$$

Причем $\varphi u_t \in L_p(0,\tau; W_p^s(G_\delta))$, $\varphi u \in L_p(0,\tau; W_p^{2+s}(G_\delta))$. *Если* $g \equiv 0$, $u_0 \equiv 0$, *то справедлива оценка*

$$\|u\|_{W_p^{2,1}(Q^\tau)} + \|\varphi u_t\|_{L_p(0,\tau;W_p^s(G_\delta))} + \|\varphi u\|_{L_p(0,\tau;W_p^{2+s}(G_\delta))} \le c[\|f\|_{L_p(Q^\tau)} + \|\varphi f\|_{L_p(0,\tau;W_p^s(G_\delta))}], \tag{10}$$

где постоянная c *не зависит от* f, *решения* u *и* $\tau \in (0,T]$.

Доказательство. Основное утверждение теоремы известно, см., например, [15]. Дополнительная гладкость по существу вытекает из известных результатов о внутренней гладкости решений параболических и эллиптических задач (см. [15]).

2. Основные результаты

В этом параграфе мы приведем и докажем основные результаты этой работы. Предположим, что условия (4)–(8) выполнены для некоторого допустимого параметра δ>0. Положим $R_1 = 2(\|u_0\|_{C(\overline{G})} + \|\nabla u_0\|_{C(\overline{G})})$. Определим шар $B_1 = \{(u,p) : |u| + |p| \le R_1\}$, где u – вектор длины r_0 и p – $r_0 \times n$ –матрица. В качестве величин $|u|, |p|$ соответственно берем сумму модулей координат и модулей элементов матрицы. Опишем условия на функцию f в (1). Мы будем требовать, что

1. $f(x,t,u,p,q) \in C(B_1 \times R^m; L_p(Q))$.

2. Найдутся функции $\Phi_0 \in L_p(Q), \Phi_1, \Phi_2 \in L_\infty(0,T;L_p(G))$ такие, что $| f(x,t,u_1,p_1,q_1) - f(x,t,u_2,p_2,q_2)| \le (|\Phi_0| + (|q_1| + |q_2|)|\Phi_1|)(|u_1 - u_2| + |p_1 - p_2|) + |\Phi_2||q_1 - q_2|$ для всех $(u_i, p_i) \in B_1, q_i \in R^m$ $(i = 1,2)$.

3. для некоторого допустимого $\delta > 0$ функция $f(x,t,u,p,q)$ непрерывна в области $Q_\delta \times B_1 \times R^m$, дифференцируема по переменным u,p,q при всех $(x,t) \in Q_\delta$, имеет первые обобщенные производные f_{x_i} $i = 1,\dots,n$ при всех $(u,p,q) \in B_1 \times R^m$; $f_{x_l}, f_{u_i}, f_{p_{ij}}, f_{q_k} \in C(B_1 \times R^m; L_p(Q_\delta))$ и найдутся функции $\Phi_3 \in L_p(Q_\delta), \Phi_4, \Phi_5 \in L_\infty(0,T;L_p(G_\delta))$ такие, что каждая из вектор-функций $f_{x_l}, f_{u_i}, f_{p_{ij}}, f_{q_k}$ $(i = 1,\dots,h,\ j = 1,\dots,n,\ k = 1,\dots,m)$ удовлетворяет условию Липшица в следующем смысле: если $g(x,t,u,p,q)$ одна из этих функций, то

$$| g(x,t,u_1,p_1,q_1) - g(x,t,u_2,p_2,q_2)| \le (|\Phi_3| + (|q_1| + |q_2|)|\Phi_4|)(|u_1 - u_2| + |p_1 - p_2|) + |\Phi_5||q_1 - q_2|.$$

Построим вспомогательную функцию Φ, которая есть решение задачи

$$L\Phi = f(x,t,u_0,\nabla u_0,0)\ \ ((x,t) \in Q),\ \Phi|_{t=0} = u_0(x),\ B\Phi|_S = g, \tag{11}$$

такое, что $\Phi \in W_p^{2,1}(Q)$, $\varphi\Phi_t \in L_p(0,T;W_p^s(G_\delta))$, $\varphi\Phi \in L_p(0,T;W_p^{2+s}(G_\delta))$. Условия на данные и условия 1–3 гарантируют, что $f(x,t,u_0,\nabla u_0,0) \in L_p(Q)$, $\varphi f(x,t,u_0,\nabla u_0,q_0) \in L_p(0,T;W_p^s(G_\delta))$ и поэтому теорема 1 применима. Ниже при доказательстве теоремы 3 мы фактически это покажем. По теореме Фубини, $\varphi\Phi_t \in W_p^s(G_\delta;L_p(0,T))$ и, таким образом, $\varphi\Phi_t \in C^{s-n/p}(\overline{G_\delta};L_p(0,T))$ (см. соотношения (3.1)–(3.3) в [16]). В частности, $\Phi(x_j,t) \in W_p^1(0,T)$. Пусть u решение задачи (1)–(3), тогда функция $w = u - \Phi$ есть решение задачи

$$Lw = f(x,t,w+\Phi,\nabla(w+\Phi),\vec{q}) - f(x,t,u_0,\nabla u_0,0) = F(x,w,\vec{q}),\ w|_{t=0} = 0,\ Bw|_S = 0, \tag{12}$$

$$w(x_j,t) = \tilde{\psi}_j(t) = \psi_j(t) - \Phi(x_j,t) \in W_p^1(0,T),\ j = 1,2,\dots,r. \tag{13}$$

Таким образом, мы свели задачу к эквивалентной задаче с однородными условиями.

Рассмотрим систему уравнений

$$f(x_j,t,u_0(x_j),\nabla u_0(x_j),\vec{q}(t)) - f(x_j,t,u_0(x_j),\nabla u_0(x_j),0) = g_{0j},\ g_{0j} = \psi_{jt} - \Phi_t(x_j,t),\ j = 1,2,\dots,r,$$

которую также можно записать в виде

$$F(\vec{q}) = \vec{g}_0,\ \vec{g}_0 = (g_{01},\dots,g_{0r}) \tag{14}$$

Фиксируем $R_2 = 2\|\vec{g}_0\|_{L_p(0,T)}$. Запишем условие корректности.

4. Система $F(\vec{q}) = \vec{g},\ \vec{g} = (g_1,\dots,g_r)$ имеет единственное решение $\vec{q}$ для всех $\vec{g} \in L_p(0,T)$ таких, что $\vec{g} \in B_2 = \{\vec{g} : \|\vec{g} - \vec{g}_0\|_{L_p(0,T)} \le R_2\}$ и обратное отображение $\vec{q} = F^{-1}(\vec{g}), F^{-1} : B_2 \to L_p(0,T)$ удовлетворяет условию Липшица в B_2.

Теорема 2. *Предположим, что условия (4)–(8), 1–4 выполнены для некоторого допустимого* $\delta > 0$, $1 \ge s > n/p$ *и функция* φ *обладает свойствами, указанными перед теоремой 1. Пусть кроме того выполнены условия согласования* $\psi_j(0) = u_0(x_j)$ $(j = 1,2,\dots,r)$. *Тогда найдется промежуток* $[0,\tau_0]$, *на котором существует единственное решение* $(u,q_1,q_2,\dots,q_m)$ *обратной задачи (1)–(3) такое, что* $u \in W_p^{2,1}(Q^{\tau_0})$, $q_i(t) \in L_p(0,\tau_0)$, $i = 1,\dots,m$. *Кроме того,* $\varphi u \in L_p(0,T;W_p^{2+s}(G_\delta))$, $\varphi u_t \in L_p(0,T;W_p^s(G_\delta))$.

Доказательство. Основной метод доказательства – теорема о неподвижной точке. Положим $\vec{q}_0 = F^{-1}\vec{g}_0$, $R_3 = 2\|\vec{q}_0\|_{L_p(0,T)}$. Зафиксируем $\tau \le T$ и вектор $\vec{q} \in B_3 = \{\vec{q} \in L_p(0,\tau) : \|\vec{q}\|_{L_p(0,\tau)} \le R_3\}$. Разрешимость задачи (12) при фиксированном $\vec{q}$ вытекает из стандартных теорем о разрешимости нелинейных параболических уравнений. Схема рассуждений следующая. Используя теорему 1, сведем задачу (12) к уравнению вида

$$w=L^{-1}(f(x,t,w+\Phi,\nabla(w+\Phi),\vec{q})-f(x,t,u_0,\nabla u_0,0))=L^{-1}(F(x,w,\vec{q})). \tag{15}$$

По определению пространство H_p^τ состоит из функций $w\in W_p^{2,1}(Q^\tau)$, удовлетворяющих однородным краевым и начальным условиям в (12), и таких, что $\varphi w_t\in L_p(0,\tau;W_p^s(G_\delta))$, $\varphi w\in L_p(0,\tau;W_p^{2+s}(G_\delta))$. Рассмотрим вспомогательную задачу

$$Lw_0=f(x,t,u_0,\nabla u_0,\vec{q})-f(x,t,u_0,\nabla u_0,0)=F_0,\ w_0|_{t=0}=0,\ Bw_0|_S=0, \vec{q}\in B_3. \tag{16}$$

В силу наших условий на данные и теорем вложения $u_0\in C^{2-(n+2)/p}(\overline{G})$, $\varphi u_0\in C^{2+s-(n+2)/p}(\overline{G_\delta})$. Легко проверить, используя условия 1–4, что $F_0\in L_p(Q)$, $\varphi F_0\in L_p(0,T;W_p^s(G_\delta))$ и более того справедлива оценка

$$\|F_0\|_{L_p(Q^\tau)}+\|F_0\|_{L_p(0,\tau;W_p^s(G_\delta))}\le c(R_3).$$

Тогда в силу теоремы 1 решение w_0 задачи (16) допускает оценку

$$\|w_0\|_{H_p^\tau}=\|w_0\|_{W_p^{2,1}(Q^\tau)}+\|\varphi w_{0t}\|_{L_p(0,\tau;W_p^s(G_\delta))}+\|\varphi w_0\|_{L_p(0,\tau;W_p^{2+s}(G_\delta))}\le c_1(R_3). \tag{17}$$

Возьмем в качестве параметра R_4 величину $2c_1(R_3)$ (без ограничения общности считаем, что эта постоянная не зависит от $\tau\le T$). Ищем решение w в шаре $B_4=\{w\in H_p^\tau:\|w\|_{H_p^\tau}\le R_4\}$. Имеем, используя теоремы вложения, что при $\alpha<1-(n+2)/2p$

$$\|w+\Phi-u_0\|_{C(\overline{Q^\tau})}\le\tau^\alpha\sup_{\substack{t_1\neq t_2,\\ x\in G}}\frac{|(w+\Phi)(x,t_1)-(w+\Phi)(x,t_2)|}{|t_1-t_2|^\alpha}\le c\tau^\alpha(\|w\|_{W_p^{2,1}(Q^\tau)}+\|\Phi\|_{W_p^{2,1}(Q)})=c(R_4)\tau^\alpha.$$

Аналогично (при $\alpha<1/2-(n+2)/2p$)

$$\|\nabla(w+\Phi-u_0)\|_{C(\overline{Q^\tau})}\le\tau^\alpha\sup_{\substack{t_1\neq t_2,\\ x\in G}}\frac{|\nabla((w+\Phi)(x,t_1)-(w+\Phi)(x,t_2))|}{|t_1-t_2|^\alpha}\le\tau^\alpha(\|w\|_{W_p^{2,1}(Q^\tau)}+\|\Phi\|_{W_p^{2,1}(Q)})=c_1(R_4)\tau^\alpha.$$

Из этих двух неравенств вытекает, что найдется $\tau_1\le T$ такое, что при $\tau\le\tau_1$ выполнено, что $c(R_4)\tau^\alpha\le R_1/4$, $c_1(R_4)\tau^\alpha\le R_1/4$ и значит при $w\in B_4$ будет выполнено, что

$$\|w+\Phi\|_{C(\overline{Q^\tau})}+\|\nabla(w+\Phi)\|_{C(\overline{Q^\tau})}\le R_1. \tag{18}$$

Далее, нетрудно показать, что найдется параметр $\tau_2\le T$ такой, что для любой $\vec{q}\in B_3$ и $\tau\le\tau_2$ уравнение (15) имеет решение в шаре B_4, причем построенное отображение $\vec{q}\to w(\vec{q})$ удовлетворяет условию Липшица. Чтобы получить утверждение, мы показываем, что отображение $L^{-1}(F(x,w,\vec{q}))$ переводит шар B_4 в себя и является в нем сжимающим. Покажем, например, сжимаемость. Рассмотрим наиболее сложный случай $s<1$. В силу теоремы 1

$$\|L^{-1}(F(x,w_1,\vec{q})-F(x,w_2,\vec{q}))\|_{H_p^\tau}\le c(\|F(x,w_1,\vec{q})-F(x,w_2,\vec{q})\|_{L_p(Q^\tau)}+$$
$$\|\varphi(F(x,w_1,\vec{q})-F(x,w_2,\vec{q}))\|_{L_p(0,\tau;W_p^s(G_\delta))}).$$

Первое слагаемое оценивается с использованием 1–4 и теорем вложения через

$$(c_1+c_2R_2)\|w_1-w_2\|_{C^1(\overline{Q^\tau})}\le c(R_3,R_4)\tau^\gamma\|w_1-w_2\|_{W_p^{2,1}(Q^\tau)},$$

для некоторого $\gamma<1/2-(n+2)/2q$. Пусть $\Delta_h v=v(x+h)-v(x)$. Чтобы оценить второе слагаемое, используем ($k=1,2$) представления

$$\Delta_h\varphi(F(w_k,\vec{q}))=$$

$$\int_0^1\frac{\partial}{\partial\eta}\varphi(x+\eta h)f(x+\eta h,(w_k+\Phi)(x)+\eta\Delta_h(w_k+\Phi),\nabla((w_k+\Phi)(x)+\eta\Delta_h(w_k+\Phi)),\vec{q})\,d\eta=$$

$$\int_0^1 \sum_{i=1}^n \varphi_{x_i}(x+\eta h) f(x+\eta h,(w_k+\Phi)(x)+\eta\Delta_h(w_k+\Phi),\nabla((w_k+\Phi)(x)+\eta\Delta_h(w_k+\Phi)),\vec{q})+$$

$$+\sum_{i=1}^n \varphi(x+\eta h)[f_{x_i}(x+\eta h,(w_k+\Phi)(x)+\eta\Delta_h(w_k+\Phi),\nabla((w_k+\Phi)(x)+\eta\Delta_h(w_k+\Phi)),\vec{q})+$$

$$+f_u(x+\eta h,(w_k+\Phi)(x)+\eta\Delta_h(w_k+\Phi),\nabla((w_k+\Phi)(x)+\eta\Delta_h(w_k+\Phi)),\vec{q})\Delta_h(w_k+\Phi)+$$

$$+\sum_{i=1}^n f_{p_i}(x+\eta h,(w_k+\Phi)(x)+\eta\Delta_h(w_k+\Phi),\nabla((w_k+\Phi)(x)+\eta\Delta_h(w_k+\Phi))\Delta_h(w_{kx_i}+\Phi_{x_i})]d\eta$$

и следующую эквивалентную норму в пространстве $W_p^s(B_\delta(x_j))$ (см. [13]):

$$\|v\|^p_{W_p^s(B_\delta(x_j))}=\int_{B_{\delta_0}(0)}\frac{1}{|h|^{n+sp}}\int_{B_{j,h}}|\Delta_h v|^p\,dx\,dh,\ \Delta_h v=v(x+h)-v(x),$$

где $B_{j,h}=\{x\in B_j : x+h\in B_\delta(x_j)\}$ и $\delta_0=(\delta-\delta_2)/2$. Берем $h<\delta_0$. Далее мы должны вычесть эти представления при $k=1$, $k=2$ и учесть условия 1–4 и теоремы вложения при оценке интегралов. Пусть $w(\vec{q})$ – решение задачи (12) при некотором $\vec{q}\in B_3$. Полагая $x=x_j$ в (12), получим

$$\tilde{\psi}_{jt}+Aw(x_j,t)=f(x_j,t,(w+\Phi)(x_j),\nabla(w+\Phi)(x_j),\vec{q})-f(x_j,t,u_0(x_j),\nabla u_0(x_j),0),\ j\le r. \quad (19)$$

Это уравнение можно переписать в виде

$$f(x_j,t,u_0(x_j),\nabla u_0(x_j),\vec{q})-f(x_j,t,u_0(x_j),\nabla u_0(x_j),0)=\tilde{\psi}_{jt}+$$
$$f(x_j,t,u_0(x_j),\nabla u_0(x_j),\vec{q})-f(x_j,t,(w+\Phi)(x_j),\nabla(w+\Phi)(x_j),\vec{q})+Aw(x_j,t)=g_j(t)$$

и воспользоваться условием 4. Используя условие 4, сведем задачу к уравнению

$$\vec{q}=F^{-1}(\vec{g}(\vec{q})),\ \vec{g}=(g_1,g_2,\ldots,g_r).$$

Используя 4 и условия на данные легко показать, что оператор $F^{-1}(\vec{g}(\vec{q}))$ переводит шар B_3 в себя и является в нем сжимающим, если параметр τ достаточно мал. Покажем, что условия переопределения (13) выполнены. Полагая $x=x_j$ в (12), мы получим систему

$$w_t(x_j,t)+Aw(x_j,t)=f(x_j,t,(w+\Phi)(x_j),\nabla(w+\Phi)(x_j),\vec{q})-f(x_j,t,u_0(x_j),\nabla u_0(x_j),0),\ j\le r.$$

Вычитая (19) из этого равенства, получим $w_t(x_j,t)-\tilde{\psi}_{jt}=0$. Интегрируя это равенство по t и учитывая условия согласования, получим $w(x_j,t)=\tilde{\psi}_j$ для всех $j=1,2,\ldots,r$. Ч.т.д.

Пример. Рассмотрим линейную задачу об определении правой части: $f(x,t,u,\nabla u,\vec{q})=\sum_{i=1}^n a_i u_{x_i}+a_0 u+\sum_{i=1}^m b_i(x,t)q_i$.

Приведем условия на данные, гарантирующие выполнение условий 1–4.

Условия 1–3 сводятся к условиям

$$a_k\in L_p(Q)\cap L_p(0,T;W_p^1(G_\delta)),\ b_i\in L_\infty(0,T;L_p(G))\cap L_\infty(0,T;W_p^1(G_\delta)) \quad (20)$$

для некоторого допустимого параметра $\delta>0$, где $k=0,1,\ldots,n, i=1,2,\ldots,m.$ Построим матрицу $B(t)$ размерности $m\times m$ ($m=rr_0$) строки которой с номерами от $(j-1)r_0+1$ до jr_0 заняты столбцами $(b_1(x_j,t),b_2(x_j,t),\ldots,b_m(x_j,t))$. Тогда условие 4 выполнено, если найдется $\delta>0$ такое, что

$$|\det B(t)|\ge\delta_0 \text{ п.в.на } (0,T). \quad (21)$$

Авторы поддержаны РФФИ и правительством ХМАО-ЮГРЫ (Грант 15-41-00063, р_урал_а).

Литература

1. Marchuk, G.I. Mathematical Models in Environmental Problems / G.I. Marchuk // Studies in Mathematics and its Applications. – 1986. – Vol. 16. – P. 5–6.

2. Прилепко, А.И. Теоремы разрешимости и метод Ротэ в обратных задачах для уравнения параболического типа. I / А.И. Прилепко, В.В. Соловьев // Дифференциальные уравнения. – 1987. – Т. 23, № 10. – С. 1791–1799.

3. Afinogenova, O.A. Stabilization of the solution to the identification problem of the source function for a one-dimensional parabolic equation / O.A. Afinogenova, Yu.Ya. Belov, I.V. Frolenkov // Doklady Mathematics. – 2009. – Vol. 79, Issue 1. – P. 70–72.

4. Белов, Ю.Я. О задаче идентификации функции источника для уравнения типа Бюргерса / Ю.Я. Белов, К.В. Коршун // Журнал Сибирского федерального университета. Серия «Математика и физика». – 2012. – Т. 5, № 4. – С. 497–506.

5. Кулиев, М.А. Многомерная обратная задача для параболического уравнения в ограниченной области / М.А. Кулиев // Нелинейные граничные задачи. – 2004. – В. 14. – С. 138–145.

6. Прилепко, А.И. О разрешимости обратных краевых задач определения коэффициента перед младшей производной в параболическом уравнении / А.И. Прилепко, В.В. Соловьев // Дифференц. уравнения. – 1987. – Т. 23, № 1. – С. 136–143.

7. Guidetti, D. Asymptotic expansion of solutions to an inverse problem of parabolic type / D. Guidetti // Advances in Difference Equations. – 2008. – Vol. 13, № 5-6. – P. 399–426.

8. Guidetti, D. Convergence to a stationary state of solutions to inverse problems of parabolic type / D. Guidetti // Discrete and continuous dynamical systems. Series S. – 2013. – Vol. 6, Issue 3. – P. 711–722.

9. Prilepko, A. I. Methods for solving inverse problems in Mathematical Physics / A.I. Prilepko, D.G. Orlovsky, I.A. Vasin. – New-York: Marcel Dekker, Inc, 1999. – 709 c.

10. Пятков, С. Г. О некоторых классах коэффициентных обратных задач для параболических систем уравнений / С.Г. Пятков, М.Л. Самков // Математические труды. – 2012. – Т. 15, № 1. – С. 155–177.

11. Ozisik, M.N. Inverse Heat Transfer: Fundamentals and Applications / M.N. Ozisik, H.R.B. Orlande. – New York: Taylor & Francis. – 2000. – 314 p.

12. Mamonov, A. V. Point source identification in nonlinear advection-diffusion-reaction systems / A.V. Mamonov, Y-H. R. Tsai // Inverse Problems. – 2013. – Vol. 29, no. 3. – p. 035009.

13. Трибель, Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы / Х. Трибель. – М.: Мир, 1980. – 664 с.

14. Denk, R. Optimal L^p–L^q-estimates for parabolic boundary value problems with inhomogeneous data / R. Denk, M. Hieber, J. Prüss // Math. Z. – 2007. – Vol. 257, Issue 1. – P. 193–224.

15. Ладыженская, О.А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уральцева. – М.: Наука. – 1967. – 736 с.

16. Amann, H. Compact embeddings of vector-valued Sobolev and Besov spaces / H. Amann // Glasnik matematicki. – 2000. – III. Ser. 35, no.1. – P. 161–177.

Поступила в редакцию 21 сентября 2017 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series “Mathematics. Mechanics. Physics”
2017, vol. 9, no. 4, pp. 19–26

DOI: 10.14529/mmph170403

ON THE SOURCE FUNCTION RECOVERING IN QUAZILINEAR PARABOLIC PROBLEMS WITH POINTWISE OVERDETERMINATION CONDITIONS

S.G. Pyatkov, V.V. Rotko
Yugra State University, Khanty-Mansyisk, Russian Federation
E-mail: s_pyatkov@ugrasu.ru

In the article we examine the question of well-posedness in the Sobolev spaces of the inverse source problem in the case of a quasilinear parabolic system of the second order. These problems arise when describing heat and mass transfer, diffusion, filtration, and in many other fields. The main part of the operator is linear. The unknown functions depending on time occur in the nonlinear right-hand side. In particular, this class of problems includes the coefficient inverse problems on determination of the lower order coefficients in a parabolic equation or a system. The overdetermination conditions are the values of the solution at some collection of points lying inside the spacial domain. The Dirichlet and oblique derivative problems are taken as boundary conditions. The problems are studied in a bounded domain with a smooth boundary. However, the results can be generalized to the case of unbounded domains as well for which the corresponding solvability theorems hold. The conditions ensuring local in time well-posedness of the problem in the Sobolev classes are exposed. The conditions on the data are minimal. The results are sharp. The problem is reduced to an operator equation whose solvability is proven with the use of a priori bounds and the fixed point theorem. The solution possesses all generalized derivatives occurring in the system which belong to the space L_p with $p > n + 2$ and some additional necessary smoothness in some neighborhood about the overdetermination points.

Keywords: parabolic equation; inverse problem; heat-and-mass transfer; boundary value problem; source function.

References

1. Marchuk G.I. Mathematical Models in Environmental Problems. Studies in Mathematics and its Applications. *Studies in Mathematics and its Applications*, 1986, Vol. 16, pp. 5–6. DOI: 10.1016/S0168-2024(08)70234-0

2. Prilepko A.I., Solov'ev V.V. Solvability theorems and the Rothe method in inverse problems for an equation of parabolic type. I. *Differ. Uravn*, 1987, Vol. 23, no. 10, pp. 1791–1799. (in Russ.).

3. Afinogenova O.A., Belov Yu.Ya., Frolenkov I.V. Stabilization of the solution to the identification problem of the source function for a one-dimensional parabolic equation. *Doklady Mathematics*, 2009, Vol. 79, Issue 1, pp. 70–72. DOI: 10.1134/S1064562409010207

4. Belov Yu.Ya., Kirshun K.V. On recovering the source function for the Burgers-type equation. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*, 2012, Vol. 5, no. 4, pp. 497–506. (in Russ.).

5. Kuliev M.A. Mnogomernaya obratnaya zadacha dlya parabolicheskogo uravneniya v ogranichennoy oblasti (A multidimesional inverse problem for a parabolic equation in a bounded domain). *Nelineynye granichnye zadachi*, 2004, Vol. 14, pp. 138–145. (in Russ.).

6. Prilepko A.I., Solov’ev V.V. Solvability of the inverse boundary-value problem of finding a coefficient of a lower-order derivative in a parabolic equation. *Differ. Equations*, 1987, V. 23, no.1, pp. 101–107.

7. Guidetti D. Asymptotic expansion of solutions to an inverse problem of parabolic type. *Advances in Difference Equations*, 2008, Vol. 13, no. 5-6, pp. 399–426.

8. Guidetti D. Convergence to a stationary state of solutions to inverse problems of parabolic type. *Discrete and continuous dynamical systems. Series S*, 2013, Vol. 6, Issue 3, pp. 711–722. DOI:10.3934/dcdss.2013.6.711

9. Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. Methods for solving inverse problems in Mathematical Physics, New-York: Marcel Dekker, Inc, 1999, 709 p.

10. Pyatkov S.G., Samkov M.L. On some classes of coefficient inverse problems for parabolic systems of equations. *Siberian Advances in Mathematics*, 2012, Vol. 22, Issue 4, pp. 287–302. DOI: 10.3103/S1055134412040050

11. Ozisik M.N., Orlande H.R.B. *Inverse Heat Transfer: Fundamentals and Applications*, New York: Taylor & Francis, 2000, 314 p.

12. Mamonov A.V., Tsai Y-H.R. Point source identification in nonlinear advection-diffusion-reaction systems. *Inverse Problems,* 2013, Vol. 29, no. 3, p. 035009. DOI: 10.1088/0266-5611/29/3/035009

13. Triebel H. *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*. Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1978, 528 p.

14. Denk R., Hieber M., Prüss J. Optimal L^p–L^q-estimates for parabolic boundary value problems with inhomogeneous data. *Math. Z*, 2007, Vol. 257, Issue 1, pp. 193–224. DOI 10.1007/s00209-007-0120-9

15. Ladyženskaja O.A., Solonnikov V.A., Ural'ceva N.N. *Linear and quasi-linear equations of parabolic type*. *Translations of Mathematical Monographs.* Providence, RI: American Mathematical Society, 1968, Vol. 23, 648 p.

16. Amann H. Compact embeddings of vector-valued Sobolev and Besov spaces. *Glasnik matematicki*, 2000, III. Ser. 35, no.1, pp. 161–177.

Received September 21, 2017