УДК 519.63 DOI: 10.14529/mmph170405

БЫСТРОЕ РЕШЕНИЕ МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА

А.Л. Ушаков
Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация
E-mail: ushakoval@susu.ru

Рассматривается уравнение Пуассона в прямоугольной области при смешанных краевых условиях. Его численное решение с помощью итерационных факторизаций и фиктивного продолжения сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений с треугольными матрицами, в которых количество ненулевых элементов в каждой строке не более трех. При достаточно малой погрешности аппроксимации решаемой задачи задаваемая относительная погрешность численного метода достигается за несколько итераций. Предлагаемый итерационный метод является почти прямым методом, асимптотически оптимальным по количеству арифметических операций. Разработан итерационный метод для указанной модельной задачи. Эта задача получается в методах фиктивных компонент при решении краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений второго и четвертого порядков в плоских областях. Предложен алгоритм для реализации численного метода с автоматическим выбором итерационных параметров на основе метода скорейшего спуска. Задан критерий остановки итерационного процесса, при достижении заранее задаваемой относительной погрешности решения. Приводятся графические результаты вычислительных экспериментов, подтверждающие асимптотическую оптимальность метода по вычислительным затратам. Построение метода основывается на использовании комплексного анализа.

Ключевые слова: итерационные факторизации; фиктивное продолжение.

Введение

Рассматривается уравнение Пуассона в прямоугольнике, когда на двух смежных сторонах прямоугольника задано условие Дирихле, а на двух других сторонах выполняется условие Неймана. Для разностного аналога этой краевой задачи в виде системы линейных алгебраических уравнений строится факторизованный переобуславливатель попеременно треугольного вида. Такая краевая задача возникает при решении задач в работе [1]. Разработанная методика аналогична методам фиктивных компонент, но использует комплексный анализ.

Непрерывная задача для применения продолжения

Рассматривается задача

$$\breve{u}_1 \in \breve{W}_1 : A(\breve{u}_1, \breve{v}_1) = l_1(\breve{v}_1) \ \forall \breve{v}_1 \in \breve{W}_1, \ \ l_1 \in \breve{W}', \tag{1}$$

где

$$\breve{W} = \breve{W}(\Omega) = \left\{ \breve{v} \in W_2^1(\Omega) : \breve{v}\big|_{\Gamma_1} = 0 \right\}$$

пространство функций Соболева на прямоугольной области

$$\Omega = (0; b_1) \times (0; b_2), \ \text{с} \ \Gamma_1 = \{b_1\} \times (0; b_2) \cup (0; b_1) \times \{b_2\},$$

а

$$A(\breve{u}_1, \breve{v}_1) = \int_\Omega (\breve{u}_{1x}\breve{v}_{1x} + \breve{u}_{1y}\breve{v}_{1y}) d\Omega$$

билинейная форма, когда заданы константы $b_1, b_2 > 0.$ Решение задачи из (1) существует и единственно [2, 3].

При

$$l_1(\breve{v}_1) = \int_\Omega \breve{f}_1 \breve{v}_1 d\Omega,$$

где $\breve{f}_1$ – заданная суммируемая с квадратом функция, задача из (1) представляется в виде

$$-\Delta \breve{u}_1 = \breve{f}_1,\ \breve{u}_1\Big|_{\Gamma_1} = 0\,,\ \frac{\partial \breve{u}_1}{\partial \vec{n}}\Big|_{\Gamma_2} = 0\,, \qquad (2)$$

где $\Gamma_2 = \{0\}\times(0;b_2)\cup(0;b_1)\times\{0\}$, $\vec{n}$ – внешняя нормаль к $\partial\Omega$.

Продолжаемая дискретная задача

Рассматривается система линейных алгебраических уравнений, которая получается при дискретизации (1), (2) по методу сумматорных тождеств

$$\bar{u}_1 \in \mathbb{R}^N :\ A\bar{u}_1 = \bar{f}_1\,,\ \bar{f}_1 \in \mathbb{R}^N\,, \qquad (3)$$

здесь векторы

$$\bar{v}_1 \in \mathbb{R}^N :\ \bar{v}_1 = (v_{1,1},...,v_{1,N})',\ N = m\cdot n\,,\ m\,,\ n \in \mathbb{N}\,,$$

полагается, что

$$v_{1,m(j-1)+i} = v_{1,i,j}\,,\ i = 1,...,m\,,\ j = 1,...,n\,,$$

а $v_{1,i,j}$ – значения функций дискретных аргументов соответствующих узлам сетки,

$$(x_i, y_j) = \big((i-0{,}5)h_1, (j-0{,}5)h_2\big),$$

когда выбираются следующие шаги сетки

$$h_1 = b_1/(n+0{,}5),\ \ h_2 = b_2/(n+0{,}5)\,,$$

которая состоит из указанных выше узлов, а матрица A размерности $N\times N$, определяется так:

$$\left\langle A\bar{u}_1,\bar{v}_1\right\rangle = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}((u_{1,i+1,j}-u_{1,i,j})(v_{1,i+1,j}-v_{1,i,j})h_1^{-2} + (u_{1,i,j+1}-u_{1,i,j})(v_{1,i,j+1}-v_{1,i,j})h_2^{-2})h_1h_2\,,$$

$$u_{1,i,n+1} = v_{1,i,n+1} = 0,\ \ i = 1,...,m,\ \ u_{1,m+1,j} = v_{1,m+1,j} = 0,\ \ j = 1,...,n\,,$$

здесь $\langle .,.\rangle$ – скалярное произведение векторов вида

$$\left\langle \bar{u}_1,\bar{v}_1\right\rangle = \sum_{k=1}^{N} u_{1,k}v_{1,k}h_1h_2\ \ \forall \bar{u}_1,\bar{v}_1 \in \mathbb{R}^N.$$

Если функция f_1 непрерывна на области Ω, то возможно положить

$$f_{1,i,j} = f(x_i, y_j),\ \ i = 1,...,m,\ \ j = 1,...,n.$$

Решение задачи в (3) существует, единственно, так как $A > 0$.

Фиктивно продолженная дискретная задача

Строится фиктивное продолжение задачи из (3)

$$\vec{u} \in \mathbb{R}^{2N} :\ D\vec{u} = \vec{f}\,,\ \vec{f} \in \mathbb{R}^{2N}\,,\ \vec{f}_2 = \vec{0}\,, \qquad (4)$$

здесь векторы

$$\vec{v} \in \mathbb{R}^{2N} :\ \vec{v} = (\bar{v}_1{}', \bar{v}_2{}')'\,,$$

где блочная, верхнетреугольная матрица D размерности $2N\times 2N$ такая, что

$$D_{11} = A\,,\ D_{12} = \theta\,,\ D_{21} = 0\,,\ D_{22} = A\,,$$

а матрицы

$$\theta = \nabla_x{}'\nabla_y - \nabla_y{}'\nabla_x\,,\ A = \nabla_x{}'\nabla_x + \nabla_y{}'\nabla_y\,,$$

матрицы ∇_x, ∇_y размерности $N\times N$ задаются по формулам:

$$\left\langle \nabla_x\bar{u}_1,\bar{v}_1\right\rangle = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(-(u_{1,i+1,j}-u_{1,i,j})h_1^{-1}v_{1,i,j})h_1h_2,\ \ u_{1,m+1,j} = v_{1,m+1,j} = 0,\ \ j = 1,...,n,$$

$$\left\langle \nabla_y\bar{u}_1,\bar{v}_1\right\rangle = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(-(u_{1,i,j+1}-u_{1,i,j})h_2^{-1}v_{1,i,j})h_1h_2,\ \ u_{1,i,n+1} = v_{1,i,n+1} = 0,\ \ i = 1,...,m.$$

Вводятся подпространства векторов в пространстве $\mathbb{R}^{2N}$:

$$\vec{W}_1 = \left\{ \bar{v} = (\bar{v}_1', \bar{v}_2')' : \bar{v}_2 = \bar{0} \right\}, \ \vec{W}_2 = \left\{ \bar{v} = (\bar{v}_1', \bar{v}_2')' : A\bar{v}_1 - \theta\bar{v}_2 = \bar{0} \right\}.$$

Лемма 1. *Решение задачи из (4) $\vec{u} \in \vec{W}_1$ существует и единственно.*

Итерационные факторизации на фиктивном продолжении

Определяется блочная матрица C размерности $2N \times 2N$ так, что

$$C_{11} = C_{22} = A, \ C_{12} = -\theta, \ C_{21} = \theta.$$

Для решения задачи из (4) строится итерационный процесс:

$$\vec{u}^k \in \mathbb{R}^{2N}: \ C(\vec{u}^k - \vec{u}^{k-1}) = -\tau_k (D\vec{u}^{k-1} - \vec{f}), \ k \in \mathbb{N}, \ \tau_k > 0, \ \forall \vec{u}^0 \in \vec{W}_1. \quad (5)$$

В итерационном процессе из (5) получается задача с факторизующимся оператором следующего вида

$$\bar{U} \in \mathbb{C}^N: \ LL^*\bar{U} = \bar{F}, \ \bar{F} \in \mathbb{C}^N,$$

которая расщепляется на более простые задачи

$$\bar{Q} \in \mathbb{C}^N, \ L\bar{Q} = \bar{F}, \ \bar{F} \in \mathbb{C}^N,$$

$$\bar{U} \in \mathbb{C}^N, \ L^*\bar{U} = \bar{Q}, \ \bar{Q} \in \mathbb{C}^N,$$

здесь матрицы

$$L = \nabla_x{}' - i\nabla_y{}', \ L^* = \overline{L}' = \nabla_x + i\nabla_y, \ LL^* = (\nabla_x{}' - i\nabla_y{}')(\nabla_x + i\nabla_y) = A + i\theta,$$

поэтому

$$(A + i\theta)(\bar{u}_1 + i\bar{u}_2) = \bar{f}_1 + i\bar{f}_2$$

или

$$\begin{cases} A\bar{u}_1 - \theta\bar{u}_2 = \bar{f}, & \bar{u}_1 + i\bar{u}_2 = \bar{U}, \\ \theta\bar{u}_1 + A\bar{u}_2 = \bar{f}_2, & \bar{f}_1 + i\bar{f}_2 = \bar{F}, \end{cases}$$

т. е. на каждом шаге итерационного процесса из (5) действительно возникает задача вида

$$C\vec{u} = \vec{f}, \ \vec{u} = (\bar{u}_1', \bar{u}_2')', \ \vec{f} = (\bar{f}_1', \bar{f}_2')'.$$

Лемма 2. *Как только в итерационном процессе из (5) $\vec{u}^{k-1} = \vec{u}$, так сразу $\vec{u}^k = \vec{u}$ $\forall k \in \mathbb{N}$.*

Считается, что $\vec{u}^k = \vec{u} + \vec{\psi}^k$, $\forall k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$.

Лемма 3. *Для итерационного процесса из (5) выполняется*

$$A\bar{\psi}_1^k - \theta\bar{\psi}_2^k = (1 - \tau_k)\left(A\bar{\psi}_1^{k-1} - \theta\bar{\psi}_2^{k-1} \right),$$

а при $\tau_1 = 1$, получается, что $\vec{\psi}^k \in \vec{W}_2$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

Вводится норма

$$\|\bar{v}_1\|_A = \sqrt{\langle A\bar{v}_1, \bar{v}_1 \rangle}.$$

Лемма 4. *Выполняется следующее равенство*

$$\langle C\vec{\psi}, \vec{\psi} \rangle = \langle A\bar{\psi}_2, \bar{\psi}_2 \rangle - \langle A\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_1 \rangle \ \forall \vec{\psi} \in \vec{W}_2,$$

здесь

$$\langle \vec{\psi}, \vec{v} \rangle = \langle \bar{\psi}_1, \bar{v}_1 \rangle + \langle \bar{\psi}_2, \bar{v}_2 \rangle \ \ \vec{\psi}, \vec{v} \in \mathbb{R}^{2N}.$$

Доказательство. Так как

$$A\bar{\psi}_1 - \theta\bar{\psi}_2 = 0, \ \theta' = -\theta,$$

имеем

$$\langle C\vec{\psi}, \vec{\psi} \rangle = \langle \theta\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2 \rangle + \langle A\bar{\psi}_2, \bar{\psi}_2 \rangle = \langle \bar{\psi}_1 \theta' \bar{\psi}_2 \rangle + \langle A\bar{\psi}_2 \bar{\psi}_2 \rangle =$$
$$= \langle A\bar{\psi}_2 \bar{\psi}_2 \rangle - \langle \theta\bar{\psi}_2 \bar{\psi}_1 \rangle = \langle A\bar{\psi}_2 \bar{\psi}_2 \rangle - \langle A\bar{\psi}_1 \bar{\psi}_1 \rangle.$$

Предположение 1. *(О продолжении мнимой части на действительную часть). Имеет место неравенство*

$$\exists \alpha_1 \in (0;1): \ \langle A\bar{v}_1, \bar{v}_1 \rangle \le \alpha_1 \langle A\bar{v}_2, \bar{v}_2 \rangle \ \ \forall v \in \vec{W}_2.$$

Заметим ($\gamma=(1-\alpha_1)^{-1}$ или $\alpha_1=1-\gamma^{-1}$), что

$$\exists\gamma\in(1;+\infty):\ \left\langle A\bar{v}_2,\bar{v}_2\right\rangle\le\gamma\left\langle C\vec{v},\vec{v}\right\rangle=\gamma\left(\left\langle A\bar{v}_2,\bar{v}_2\right\rangle-\left\langle A\bar{v}_1,\bar{v}_1\right\rangle\right)\quad\forall v\in\vec{W}_2,$$

потому, что матрица $A>0$ и матрица $C>0$. Последнее можно получить

$$(C\vec{\psi},\vec{\psi})=(\nabla_x\bar{\psi}_1-\nabla_y\bar{\psi}_2)^2+(\nabla_y\bar{\psi}_1+\nabla_x\bar{\psi}_2)^2>0\ \forall\,\vec{\psi}\ne\vec{0},$$

учитывая, что

$$(\nabla_x+i\nabla_y)(\bar{\psi}_1+i\bar{\psi}_2)\ne\bar{0}\ \forall\,\vec{\psi}\ne\vec{0}.$$

Заметим, что

$$\exists\lambda_0^{-1}\in(0;+\infty):\ 0\le\left\langle A\bar{v}_1,\bar{v}_1\right\rangle=\left\langle\theta\bar{v}_2,\bar{v}_1\right\rangle=\left\langle A^{-1}\theta\bar{v}_2,\theta\bar{v}_2\right\rangle\le\lambda_0^{-1}\left\langle\theta\bar{v}_2,\theta\bar{v}_2\right\rangle\to 0,\ \text{при}\ h_1,h_2\to 0,$$

тогда

$$\left\langle A\bar{v}_1,\bar{v}_1\right\rangle\to 0,\ \bar{v}_1\to\bar{0},\ \text{при}\ h_1,h_2\to 0,$$

потому что

$$\theta\bar{v}_2=\left(\nabla_x{}'\nabla_y-\nabla_y{}'\nabla_x\right)\bar{v}_2\to\bar{0},\ \text{при}\ h_1,h_2\to 0\quad\forall\vec{v}\in\vec{W}_2,$$

из формулы Тейлора, когда $\bar{v}_2$ – дискретные аналоги дифференцируемых необходимое число раз функций.

Лемма 5. *Выполняются неравенства*

$$\frac{1-\alpha_1}{\alpha_1}\left\langle A\bar{\psi}_1,\bar{\psi}_1\right\rangle\le(1-\alpha_1)\left\langle A\bar{\psi}_2,\bar{\psi}_2\right\rangle\le\left\langle C\vec{\psi},\vec{\psi}\right\rangle,\ \forall\,\vec{\psi}\in\vec{W}_2.$$

Доказательство. Используя, что

$$\left\langle A\bar{\psi}_1,\bar{\psi}_1\right\rangle\le\alpha_1\left\langle A\bar{\psi}_2,\bar{\psi}_2\right\rangle,\forall\,\vec{\psi}\in\vec{W}_2,$$

получаем

$$\frac{1-\alpha_1}{\alpha_1}\left\langle A\bar{\psi}_1,\bar{\psi}_1\right\rangle\le(1-\alpha_1)\left\langle A\bar{\psi}_2,\bar{\psi}_2\right\rangle=\left\langle A\bar{\psi}_2,\bar{\psi}_2\right\rangle-\alpha_1\left\langle A\bar{\psi}_2,\bar{\psi}_2\right\rangle\le$$

$$\le\left\langle A\bar{\psi}_2,\bar{\psi}_2\right\rangle-\left\langle A\bar{\psi}_1,\bar{\psi}_1\right\rangle=\left\langle C\vec{\psi},\vec{\psi}\right\rangle,\ \forall\,\vec{\psi}\in\vec{W}_2.$$

Лемма 6. *В итерационном процессе из (5) при* $k=1$, $\tau_1=1$ *выполняются оценки*

$$\left\langle C\vec{\psi}^1,\vec{\psi}^1\right\rangle\le\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}\left\langle A\bar{\psi}_1^0,\bar{\psi}_1^0\right\rangle=(\gamma-1)\left\langle C\vec{\psi}^0,\vec{\psi}^0\right\rangle,$$

$$\left\|\bar{\psi}_1^1\right\|_A\le\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}\left\|\bar{\psi}_1^0\right\|_A=(\gamma-1)\left\|\bar{\psi}_1^0\right\|_A.$$

Доказательство. Для итерационного процесса выполняется

$$C(\vec{\psi}^1-\vec{\psi}^0)=-D\vec{\psi}^0,$$

$$\left\langle C(\vec{\psi}^1-\vec{\psi}^0),\vec{\psi}^1\right\rangle=\left\langle C\vec{\psi}^1,\vec{\psi}^1\right\rangle=-\left\langle D\vec{\psi}^0,\vec{\psi}^1\right\rangle=-\left\langle A\bar{\psi}_1^0,\bar{\psi}_1^1\right\rangle\le\left\|\bar{\psi}_1^0\right\|_A\left\|\bar{\psi}_1^1\right\|_A,$$

тогда

$$\left\langle C\vec{\psi}^1,\vec{\psi}^1\right\rangle\le\frac{\left\langle A\bar{\psi}_1^1,\bar{\psi}_1^1\right\rangle}{\left\langle C\vec{\psi}^1,\vec{\psi}^1\right\rangle}\left\langle A\bar{\psi}_1^0,\bar{\psi}_1^0\right\rangle\le\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}\left\langle A\bar{\psi}_1^0,\bar{\psi}_1^0\right\rangle=\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}\left\langle C\vec{\psi}^0,\vec{\psi}^0\right\rangle,$$

учитывая, что

$$\left\langle A\bar{\psi}_1^1,\bar{\psi}_1^1\right\rangle\le\alpha_1\left\langle A\bar{\psi}_2^1,\bar{\psi}_2^1\right\rangle,$$

$$\left\langle C\vec{\psi}^1,\vec{\psi}^1\right\rangle=\left\langle A\bar{\psi}_2^1,\bar{\psi}_2^1\right\rangle-\left\langle A\bar{\psi}_1^1,\bar{\psi}_1^1\right\rangle\ge(1-\alpha_1)\left\langle A\bar{\psi}_2^1,\bar{\psi}_2^1\right\rangle.$$

По лемме 5

$$\frac{1-\alpha_1}{\alpha_1}\left\langle A\bar{\psi}_1^1,\bar{\psi}_1^1\right\rangle\le\left\langle C\vec{\psi}^1,\vec{\psi}^1\right\rangle=\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}\left\langle C\vec{\psi}_1^0,\vec{\psi}_1^0\right\rangle,$$

так получается вторая оценка.

Лемма 7. *Имеют место оценки*

$$\exists\gamma\in(1;+\infty):\ \left\langle C\vec{\psi},\vec{\psi}\right\rangle\le\left\langle D\vec{\psi},\vec{\psi}\right\rangle\le\gamma\left\langle C\vec{\psi},\vec{\psi}\right\rangle\quad\forall\,\vec{\psi}\in\vec{W}_2\,.$$

Доказательство. Отметим, что

$$(1-\alpha_1)\left\langle D\vec{\psi},\vec{\psi}\right\rangle\le(1-\alpha_1)\left\langle A\vec{\psi}_2,\vec{\psi}_2\right\rangle\le\left\langle C\vec{\psi},\vec{\psi}\right\rangle=$$

$$=\left\langle A\vec{\psi}_2,\vec{\psi}_2\right\rangle-\left\langle A\vec{\psi}_1,\vec{\psi}_1\right\rangle\le\left\langle \mathrm{A}\,\vec{\psi}_2,\vec{\psi}_2\right\rangle=\left\langle D\vec{\psi},\vec{\psi}\right\rangle\quad\forall\,\vec{\psi}\in\vec{W}_2\ ,$$

а это позволяет завершить доказательство.

Лемма 8. *Если в итерационном процессе из (5)* $k>1$,

$$0<\tau_k=\tau=\frac{2}{1+\gamma},\ q=\frac{\alpha_1}{2-\alpha_1}=\frac{\gamma-1}{\gamma+1}<1\,,$$

то

$$\left\langle C\vec{\psi}^{k},\vec{\psi}^{k}\right\rangle\le q^2\left\langle C\vec{\psi}^{k-1},\vec{\psi}^{k-1}\right\rangle,\ k\in\mathbb{N}\,.$$

Доказательство. Из итерационного процесса

$$C(\vec{\psi}^{k}-\vec{\psi}^{k-1})=-\tau D\vec{\psi}^{k-1},\ \vec{\psi}^{k}=T\vec{\psi}^{k-1},\ T=E-\tau C^{-1}D\,,\ T=T'>0\,,$$

тогда

$$\left\langle C\vec{\psi}^{k},\vec{\psi}^{k}\right\rangle=\left\langle CT\vec{\psi}^{k-1},T\vec{\psi}^{k-1}\right\rangle\le\sup_{\vec{\psi}\in\vec{V}_2}\frac{\left\langle CT\vec{\psi},T\vec{\psi}\right\rangle}{\left\langle C\vec{\psi},\vec{\psi}\right\rangle}\left\langle C\vec{\psi}^{k-1},\vec{\psi}^{k-1}\right\rangle=$$

$$=\sup_{\vec{\psi}\in\vec{V}_2}\left(\frac{\left\langle CT\vec{\psi},\vec{\psi}\right\rangle}{\left\langle C\vec{\psi},\vec{\psi}\right\rangle}\right)^2\left\langle C\vec{\psi}^{k-1},\vec{\psi}^{k-1}\right\rangle=\sup_{\vec{\psi}\in\vec{V}_2}\left(\frac{\left\langle (C-\tau DT)\vec{\psi},\vec{\psi}\right\rangle}{\left\langle C\vec{\psi},\vec{\psi}\right\rangle}\right)^2\left\langle C\vec{\psi}^{k-1},\vec{\psi}^{k-1}\right\rangle=$$

$$=\sup_{\vec{\psi}\in\vec{V}_2}\left(1-\tau\frac{\left\langle D\vec{\psi},\vec{\psi}\right\rangle}{\left\langle C\vec{\psi},\vec{\psi}\right\rangle}\right)^2\left\langle C\vec{\psi}^{k-1},\vec{\psi}^{k-1}\right\rangle=\max\left\{\left|1-\tau\right|^2\left|1-\tau\gamma\right|^2\right\}\left\langle C\vec{\psi}^{k-1},\vec{\psi}^{k-1}\right\rangle=q^2\left\langle C\vec{\psi}^{k-1},\vec{\psi}^{k-1}\right\rangle.$$

Теорема 1. *Для итерационного процесса из (5)*

$$\left\|\bar{u}_1^{\,k}-\bar{u}_1\right\|_A\le\varepsilon_1\left\|\bar{u}_1^{\,0}-\bar{u}_1\right\|_A,$$

если

$$\tau_1=1,\ \tau_k=\tau=2/(1+\gamma)\,,\ k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}\,,$$

получается, что

$$\varepsilon_1\le(\gamma-1)q^{k-1}=(\gamma-1)\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^k.$$

Доказательство. По лемме 5 получается

$$\frac{1-\alpha_1}{\alpha_1}\left\langle A\vec{\psi}_1,\vec{\psi}_1\right\rangle\le\left\langle C\vec{\psi},\vec{\psi}\right\rangle\quad\forall\,\vec{\psi}\in\vec{W}_2\,,$$

по лемме 6 имеем

$$\left\langle C\vec{\psi}^{1},\vec{\psi}^{1}\right\rangle\le\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}\left\langle A\vec{\psi}_1^{\,0},\vec{\psi}_1^{\,0}\right\rangle=(\gamma-1)\left\langle A\vec{\psi}_1^{0},\vec{\psi}_1^{0}\right\rangle.$$

Вывод. Исходя из вида матриц $L,\ L^*$, нужно сказать, что задача из (3) при N неизвестных, по теореме 1, построенным итерационным процессом из (5), решается с относительной погрешностью ε_1 за $O(N\ln\varepsilon_1^{-1})$ арифметических операций. Можно отметить, что при достаточно малых параметрах дискретизации для решения требуется $O(N)$ операций, т. е. итерационный процесс, сходится за несколько итераций и превращается в почти прямой метод.

Эксперименты при вычислении решения модельной задачи для уравнения Пуассона

Решается задача, если заданы компоненты правой части системы линейных алгебраических уравнений

$$f_{1,m(i-1)+j}=f_{1,i,j}=(b_1^2+b_2^2-((i-0{,}5)h_1)^2-((j-0{,}5)h_2)^2)/2,\ i=1,...,m,\ j=1,...,n,\ m=n=2,...,125,$$

где

$$h_1 = b_1/(m+0,5),\ h_2 = b_2/(n+0,5),\ b_1 = b_2 = 2,5$$

итерационным процессом из (5). Для выбора итерационных параметров используется метод скорейшего спуска [4]. Тогда для решаемых задач в итерационном процессе применяется следующий алгоритм вычислений:

1. Ищется первое приближение $\vec{u}^1 \in \mathbb{R}^{2N}:\ C\vec{u}^1 = \vec{f}$;
2. Задается первая невязка $\vec{r}^1 : \overline{r}_1^1 = \overline{0},\ \overline{r}_2^1 = A\overline{u}_2^1$;
3. Определяется квадрат нормы ошибки $\mathrm{E}_1 = \left\|\overline{\psi}_2^1\right\|_A^2 = \left\langle A\overline{\psi}_2^1, \overline{\psi}_2^1\right\rangle = \left\langle \overline{r}_2^1, \overline{u}_2^1\right\rangle$;
4. Ищется поправка $\vec{w}^{k-1} \in \mathbb{R}^{2N}:\ C\vec{w}^{k-1} = \vec{r}^{k-1},\ k \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$;
5. Определяется итерационный параметр
$$\tau_k = \frac{\left\langle \vec{r}^{k-1}, \vec{w}^{k-1}\right\rangle}{\left\langle D\vec{w}^{k-1}, \vec{w}^{k-1}\right\rangle} = \frac{\left\langle \overline{r}_2^{k-1}, \overline{w}_2^{k-1}\right\rangle}{\left\langle A\overline{w}_2^{k-1}, \overline{w}_2^{k-1}\right\rangle}\ k \in \mathbb{N}\setminus\{1\};$$
6. Определяется новое приближение $\vec{u}^k = \vec{u}^{k-1} - \tau_k \vec{w}^{k-1}\ k \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$;
7. Задается новая невязка $\vec{r}^k : \overline{r}_1^k = \overline{0},\ \overline{r}_2^k = A\overline{u}_2^k,\ k \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$;
8. Определяется квадрат нормы новой ошибки
$$\mathrm{E}_k = \left\|\overline{\psi}_2^k\right\|_A^2 = \left\langle A\overline{\psi}_2^k, \overline{\psi}_2^k\right\rangle = \left\langle \overline{r}_2^k, \overline{u}_2^k\right\rangle\ k \in \mathbb{N}\setminus\{1\};$$
9. Ставится условие остановки итераций $\mathrm{E}_k/\mathrm{E}_1 < \mathrm{E}^2,\ \mathrm{E} \in (0;1),\ k \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$.

Заметим, что в условии остановки итерационного процесса $\mathrm{E} \in (0;1)$ – задаваемая относительная погрешность. Можно отметить, что вычисления, при реализации на ЭВМ, экспериментально подтверждают асимптотическую независимость k – числа итераций от $m(n)$ – числа узлов сетки по направлениям осей $0x(0y)$ для достижения E – заданной относительной погрешности при решении систем линейных алгебраических уравнений (см. рисунок).

График функции k – числа итераций от $m(n)$ – числа узлов сетки по направлениям осей $0x(0y)$ при заданной относительной погрешности вычислений $\mathrm{E} = 0{,}001$

Статья выполнена при поддержке Правительства РФ (Постановление № 211 от 16.03.2013 г.), соглашение № 02.A03.21.0011

Литература

1. Ушаков, А.Л. О моделировании деформаций пластин / А.Л. Ушаков // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2015. – Том. 8, № 2. – С. 138–142.

2. Оганесян, Л.А. Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений / Л.А. Оганесян, Л.А. Руховец. – Ереван: изд-во АН АрмССР, 1979. – 235 с.

3. Обен, Ж.-П. Приближённое решение эллиптических краевых задач / Ж.-П. Обен. – М.: Мир, 1977. – 383 с.

4. Самарский, А.А. Методы решения сеточных уравнений / А.А. Самарский, Е.С. Николаев. – М.: Наука, 1978. – 592 с.

Поступила в редакцию 31 августа 2017 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2017, vol. 9, no. 4, pp. 36–42

DOI: 10.14529/mmph170405

FAST SOLUTION OF THE MODEL PROBLEM FOR POISSON'S EQUATION

A.L. Ushakov
South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E-mail: ushakoval@susu.ru

Poisson's equation in rectangular area under the mixed regional conditions is considered. Its numerical solution by means of iterative factorizations and fictitious continuation amounts to the solution of the systems of linear algebraic equations with triangular matrixes, in which the quantity of nonzero elements in every line is less than three. At rather insignificant error of approximation of the problem under consideration the set relative error of a numerical method is reached by some iterations. The given iterative method is almost a direct method, asymptotically optimum by the number of arithmetic operations. The iterative method is developed for the specified model problem. This problem turns out to be in the methods of fictitious components at the solution of boundary problems for elliptic differential equations of the second and fourth orders in flat areas. The algorithm for realization of a numerical method with an automatic choice of iterative parameters on the basis of a method of the fastest descent is offered. The criterion to stop an iterative process is set at the achievement of the set relative error of the solution. The graphic results of computing experiments confirming an asymptotic optimality of the method on computing expenses are given. The developing of the method is based on the use of the complex analysis.

Keywords: iterative factorizations; fictitious continuation.

References

1. Ushakov A.L. About Modelling of Deformations of Plates. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software*, 2015, Vol. 8, no. 2, pp. 138–142. (in Russ.). DOI: 10.14529/mmp150213

2. Oganesyan L.A., Rukhovets L.A. *Variatsionno-raznostnye metody resheniya ellipticheskikh uravneniy* (Variation-difference methods for solving elliptic equations), Erevan: izd-vo AN ArmSSR Publ., 1979, 235 p. (in Russ.).

3. Oben Zh.-P. *Priblizhyennoe reshenie ellipticheskikh kraevykh zadach* (Approximate solution of elliptic boundary value problems). Moscow, Mir Publ., 1977, 383 p. (in Russ.). [Aubin J.-P. Approximation of elliptic boundary-value problems. New York, Wiley-Interscience, 1972. 360 p.]

4. Samarskiy A.A., Nikolaev E.S. *Metody resheniya setochnykh uravneniy* (Methods for solving grid equations), Moscow, Nauka Publ., 1978, 592 p. (in Russ.).

Received August 31, 2017