УДК 517.95 DOI: 10.14529/mmph180102

ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Р.К. Тагиев, Р.С. Касымова
Бакинский государственный университет, г. Баку, Азербайджан
E-mail: r.tagiyev@list.ru, rena.kasimova@list.ru

Одним из основных типов обратных задач для уравнений с частными производными являются задачи, в которых подлежат определению коэффициенты уравнений или величин, входящих в них, по некоторой дополнительной информации. Такие задачи называют коэффициентными обратными задачами для уравнений с частными производными. Обратные задачи для уравнений с частными производными могут быть поставлены в вариационной форме, т. е. как задачи оптимального управления соответствующими системами. Рассматривается вариационная постановка одной коэффициентной обратной задачи для двумерного эллиптического уравнения с дополнительным интегральным условием. При этом управляющая функция входит в коэффициент при решении уравнения состояния и является элементом пространства квадратично суммируемых по Лебегу функций. Целевой функционал составлен на основе дополнительного интегрального условия. Граничные условия для уравнения состояния являются смешанными, т. е. в одной части границы задано второе краевое условие, а в другой части первое краевое условие. Под решением краевой задачи при каждом фиксированном управляющем коэффициенте понимается обобщенное решение из пространства Соболева. Исследованы вопросы корректности рассматриваемой коэффициентной обратной задачи в вариационной постановки. Доказано, что рассматриваемая задача корректно поставлена в слабой топологии пространства управляющих функций, т. е. множество оптимальных управлений не пусто, слабо компактно и любая минимизирующая последовательность задачи слабо сходится к множеству оптимальных управлений. Кроме того, доказана дифференцируемость по Фреше целевого функционала и найдена формула для его градиента. Установлено необходимое условие оптимальности в виде вариационного неравенства.

Ключевые слова: эллиптическое уравнение; обратная задача; интегральное условие; вариационный метод.

Введение

Одной из постановок обратной задачи для уравнений математической физики является вариационная постановка, т. е. обратные задачи типа управления системами. В вариационной постановке обратных задач управляющие функции входят в коэффициенты уравнений состояния или граничные условия для них и целевые функционалы составляются на основе дополнительных условий [1].

В работах [2–8] и др. изучены вариационные постановки коэффициентных обратных задач. Однако такие постановки коэффициентных обратных задач с интегральными условиями мало изучены [9].

В статье изучается вариационная постановка обратной задачи для эллиптического уравнения с дополнительным интегральным условием. Исследованы вопросы корректности рассматриваемой задачи, выведена формула для градиента целевого функционала и установлено необходимое условие оптимальности.

1. Постановка задачи

Пусть $\Omega = \{x = (x_1, x_2) : 0 < x_i < 1,\ i = 1, 2\}$ – квадрат в R^2 с границей Γ, $\Gamma_{-1} = \{x = (x_1, x_2) : x_1 = 0, 0 < x_2 < 1\}$ – левая вертикальная сторона квадрата Ω. Пусть требуется минимизировать функционал

$$J(\upsilon)=\int_0^1\left|u(0,x_2;\upsilon)-\int_0^1 H(x_1,x_2)u(x_1,x_2;\upsilon)dx_1\right|^2 dx_2 \tag{1}$$

на решениях $u(x)=u(x_1,x_2)=u(x_1,x_2;\upsilon)$ краевой задачи

$$-\sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+\upsilon(x_2)u=f(x),\ x\in\Omega, \tag{2}$$

$$-k_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}=g(x),\ x\in\Gamma_{-1}, \tag{3}$$

$$u(x)=0,\ x\in\Gamma\backslash\Gamma_{-1}, \tag{4}$$

соответствующих всем допустимым управлениям $\upsilon=\upsilon(x_2)$ из множества

$$V=\left\{\upsilon=\upsilon(x_2)\in L_2(0,1):0<q_0\le\upsilon(x_2)\le q_1 \text{ п.в.на}(0,1)\right\}. \tag{5}$$

Здесь q_0,q_1 – заданные числа, $H(x)\equiv H(x_1,x_2)$, $k_i(x),i=1,2$, $f(x)$, $g(x)$ – заданные функции, удовлетворяющие условиям

$$H(x),\ k_i(x)\in L_\infty(\Omega), i=1,2,\ f(x)\in L_2(\Omega),\ g(x)\equiv g(x_2)\in L_2(0,1);$$
$$0<\nu\le k_i(x)\le\mu, i=1,2,\ \left|H(x)\right|\le d \text{ п.в. на } \Omega,$$

где $\mu\ge\nu>0,\ d>0$ – заданные числа.

Назовем обобщенным решением из $W_{2,0}^1(\Omega)$ задачи (2)–(4), соответствующим управлению $\upsilon\in V$, функцию $u=u(x)=u(x;\upsilon)$ из $W_{2,0}^1(\Omega)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_\Omega\left[\sum_{i=1}^2 k_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial\eta}{\partial x_i}+\upsilon(x_2)u\eta\right]dx=\int_\Omega f(x)\eta dx+\int_0^1 g(x_2)\eta(0,x_2)dx_2 \tag{6}$$

для всех $\forall\eta=\eta(x)\in W_{2,0}^1(\Omega)$.

При сделанных предположениях краевая задача (2)–(4) однозначно разрешима при каждом заданном $\upsilon\in V$ и справедлива априорная оценка [10, с. 200]

$$\|u\|_{2,\Omega}^{(1)}\le M\left[\|f\|_{2,\Omega}+\|g\|_{2,\Gamma_{-1}}\right]. \tag{7}$$

Отсюда и из ограниченности вложений $W_2^1(\Omega)\to L_{r_1}(\Omega)$, $W_2^1(\Omega)\to L_{r_2}(\Gamma)$ [11, с. 78] следует, что верна оценка

$$\|u\|_{r_1,\Omega}+\|u\|_{r_2,\Gamma_{-1}}\le M\left[\|f\|_{2,\Omega}+\|g\|_{2,\Gamma_{-1}}\right], \tag{8}$$

где $r_1,r_2\in[2,\infty)$ – произвольные числа. Здесь и ниже через M обозначаем положительные постоянные.

Задача (1)–(5) тесно связана с коэффициентной обратной задачей, заключающейся в определении функций $\left\{u(x;\upsilon),\upsilon(x_2)\right\}$, удовлетворяющих условиям (2)–(5) и дополнительному интегральному условию

$$u(0,x_2;\upsilon)=\int_0^1 H(x_1,x_2)u(x_1,x_2;\upsilon)dx_1, 0<x_2<1. \tag{9}$$

Целевой функционал (1) составлен на основе условия (9). Если в задаче (1)–(5) окажется, что существует управление $\upsilon_*=\upsilon_*(x_2)\in V$, доставляющее функционалу (1) нулевое значение, то пара $\left\{u(x;\upsilon_*),\upsilon_*(x_2)\right\}$ будет решением обратной задачи (2)–(5), (9).

2. Корректность постановки задачи

Теорема 1. В задаче (1)–(5) существует хотя бы одно оптимальное управление, т. е. множество $V_*=\left\{\upsilon_*\in V: J(\upsilon_*)=J_*\right\}$ непусто. Кроме того, множество V_* слабо компактно в $L_2(0,1)$ и любая минимизирующая последовательность слабо сходится в $L_2(0,1)$ к множеству V_*.

Доказательство. Пусть $\upsilon \in V$ – некоторый элемент и $\{\upsilon_n\} \subset V$ – произвольная последовательность, такая, что

$$\upsilon_n(x_2) \to \upsilon(x_2) \text{ слабо в } L_2(0,1), \tag{10}$$

и $u_n = u(x;\upsilon_n)$ решение задачи (2)–(4) из $W_{2,0}^1(\Omega)$ при $\upsilon = \upsilon_n$. Тогда в силу (7) и (8) справедливы оценки

$$\|u_n\|_{2,\Omega}^{(1)} + \|u_n\|_{r_1,\Omega} + \|u_n\|_{r_2,\Gamma_{-1}} \le M \ (n = 1,2,\ldots). \tag{11}$$

Кроме того, из (11) и компактности вложений $W_2^1(\Omega) \to L_{r_1}(\Omega)$, $W_2^1(\Omega) \to L_{r_2}(\Gamma)$ при любых $r_1, r_2 \ge 2$ [11, с. 78] следует, что существует подпоследовательность $\{u_{n_m}\}$, такая, что

$$u_{n_m}(x) \to u(x) \text{ слабо в } W_{2,0}^1(\Omega), \text{ сильно в } L_{r_1}(\Omega) \text{ и в } L_{r_2}(\Gamma_{-1}), \tag{12}$$

где $u = u(x) \in W_{2,0}^1(\Omega)$ – некоторый элемент.

Из (6) следует, что

$$\int_\Omega \left[\sum_{i=1}^2 k_i(x) \frac{\partial u_{n_m}}{\partial x_i} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + \upsilon_{n_m}(x_2) u_{n_m} \eta \right] dx = \int_\Omega f(x) \eta dx + \int_0^1 g(x_2) \eta(0, x_2) dx_2 \ (m = 1,2,\ldots),$$

$$\forall \eta = \eta(x) \in W_{2,0}^1(\Omega). \tag{13}$$

Используя ограничение $0 < q_0 \le \upsilon(x_2) \le q_1$ п.в. на $L_2(0,1)$, неравенство Коши–Буняковского и соотношения (10), (12), получаем

$$\left| \int_\Omega \upsilon_{n_m}(x_2) u_{n_m} \eta dx - \int_\Omega \upsilon(x_2) u \eta dx \right| \le \left| \int_\Omega \upsilon_{n_m}(x_2) \left(u_{n_m} - u\right) \eta dx \right| + \left| \int_\Omega \left[\upsilon_{n_m}(x_2) - \upsilon(x_2) \right] u \eta dx \right| \le$$

$$\le q_1 \left\| u_{n_m} - u \right\|_{2,\Omega} \cdot \|\eta\|_{2,\Omega} + \left| \int_\Omega \left[\upsilon_{n_m}(x_2) - \upsilon(x_2) \right] u \eta dx \right| \to 0 \text{ при } m \to \infty. \tag{14}$$

Из (12)–(14) следует, что $u = u(x)$ удовлетворяет тождеству (6), т. е. $u(x) = u(x;\upsilon)$, $x \in \Omega$.

Используя единственность решения $u = u(x;\upsilon)$ задачи (2)–(4), можно показать, что соотношение (12) справедливо и для всей последовательности $\{u_n\}$, т. е.

$$u_n(x) = u(x;\upsilon_n) \to u(x) = u(x;\upsilon) \text{ слабо в } W_{2,0}^1(\Omega), \text{ сильно в } L_{r_1}(\Omega) \text{ и в } L_{r_2}(\Gamma_{-1}). \tag{15}$$

Покажем, что $J(\upsilon_n) \to J(\upsilon)$ при $n \to \infty$. Используя равенство (1), очевидное неравенство $(a+b)^2 \le 2\left(a^2 + b^2\right)$, неравенство Коши–Буняковского и условие $|H(x)| \le d$ п.в. на Ω, нетрудно убедиться, что справедливы следующие цепочки неравенств:

$$|J(\upsilon_n) - J(\upsilon)| \le \left\{ \int_0^1 \left[|u(0,x_2;\upsilon_n) - u(0,x_2;\upsilon)| + \int_0^1 |H(x_1,x_2)| \cdot |u(x_1,x_2;\upsilon_n) - u(x_1,x_2;\upsilon)| dx_1 \right]^2 dx_2 \right\}^{1/2} \times$$

$$\times \left\{ \int_0^1 \left[|u(0,x_2;\upsilon_n)| + |u(0,x_2;\upsilon)| + \int_0^1 |H(x_1,x_2)| \cdot |u(x_1,x_2;\upsilon_n)| dx_1 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_0^1 |H(x_1,x_2)| \cdot |u(x_1,x_2;\upsilon)| dx_1 \right]^2 dx_2 \right\}^{1/2} \le 2\sqrt{2} \left\{ \int_0^1 \left[|u(0,x_2;\upsilon_n) - u(0,x_2;\upsilon)|^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_0^1 H^2(x_1,x_2) dx_1 \cdot \int_0^1 |u(x_1,x_2;\upsilon_n) - u(x_1,x_2;\upsilon)|^2 dx_1 \right] dx_2 \right\}^{1/2} \times$$

$$\times\left\{\int_0^1\left[\left|u\left(0,x_2;\upsilon_n\right)\right|^2+\left|u\left(0,x_2;\upsilon\right)\right|^2+\int_0^1 H^2\left(x_1,x_2\right)dx_1\cdot\int_0^1 u^2\left(x_1,x_2;\upsilon_n\right)dx_1+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_0^1 H^2\left(x_1,x_2\right)dx_1\cdot\int_0^1 u^2\left(x_1,x_2;\upsilon\right)dx_1\right]dx_2\right\}^{1/2}\le 2\sqrt{2}\left[\left\|u_n-u\right\|_{2,\Gamma_{-1}}+d\left\|u_n-u\right\|_{2,\Omega}\right]\times$$

$$\times\left[\left\|u_n\right\|_{2,\Gamma_{-1}}+\left\|u\right\|_{2,\Gamma_{-1}}+d\left(\left\|u_n\right\|_{2,\Omega}+\left\|u\right\|_{2,\Omega}\right)\right]. \quad (16)$$

Используя оценки (7), (8), (11) и соотношения (15) из (16) получаем, что $J\left(\upsilon_n\right)\to J\left(\upsilon\right)$ при $n\to\infty$, т. е. функционал $J\left(\upsilon\right)$ слабо в $L_2\left(0,1\right)$ непрерывен на слабо компактном множестве V. Тогда из [12, с. 49] следует, что справедливы утверждения теоремы 1. Теорема 1 доказана.

3. Дифференцируемость целевого функционала и условие оптимальности

Для задачи (1)–(5) введем сопряженную краевую задачу:

$$-\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_i\left(x\right)\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)+\upsilon\left(x_2\right)\psi=-2H\left(x_1,x_2\right)\left[u\left(0,x_2;\upsilon\right)-\int_0^1 H\left(\xi_1,x_2\right)u\left(\xi_1,x_2;\upsilon\right)d\xi_1\right],\ x\in\Omega, \quad (17)$$

$$-k_1\left(x\right)\frac{\partial\psi}{\partial x_1}=2\left[u\left(0,x_2;\upsilon\right)-\int_0^1 H\left(\xi_1,x_2\right)u\left(\xi_1,x_2;\upsilon\right)d\xi_1\right],\ x\in\Gamma_{-1}, \quad (18)$$

$$\psi\left(x;\upsilon\right)=0,\ x\in\Gamma\backslash\Gamma_{-1}. \quad (19)$$

Назовем обобщенным решением из $W_{2,0}^1\left(\Omega\right)$ задачи (17)–(19), соответствующим управлению $\upsilon\left(x_2\right)\in L_2\left(0,1\right)$, функцию $\psi=\psi\left(x\right)=\psi\left(x;\upsilon\right)$ из $W_{2,0}^1\left(\Omega\right)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_\Omega\left[\sum_{i=1}^{2}k_i\left(x\right)\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\frac{\partial\eta}{\partial x_i}+\upsilon\left(x_2\right)\psi\eta\right]dx=-2\int_\Omega H\left(x_1,x_2\right)\left[u\left(0,x_2;\upsilon\right)-\int_0^1 H\left(x_1,x_2\right)u\left(x_1,x_2;\upsilon\right)dx_1\right]\eta dx+$$

$$+2\int_0^1\left[u\left(0,x_2;\upsilon\right)-\int_0^1 H\left(x_1,x_2\right)u\left(x_1,x_2;\upsilon\right)dx_1\right]\eta\left(0,x_2\right)dx_2 \quad (20)$$

при любой $\eta=\eta\left(x\right)\in W_{2,0}^1\left(\Omega\right)$.

Используя очевидное неравенство $\left(a+b\right)^2\le 2\left(a^2+b^2\right)$, неравенство Коши–Буняковского и условие $\left|H\left(x\right)\right|\le d$ п.в. на Ω, имеем:

$$\int_\Omega H^2\left(x_1,x_2\right)\left[u\left(0,x_2;\upsilon\right)-\int_0^1 H\left(\xi_1,x_2\right)u\left(\xi_1,x_2;\upsilon\right)d\xi_1\right]^2dx\le$$

$$\le 2\int_\Omega H^2\left(x_1,x_2\right)\left[\int_0^1 u^2\left(0,x_2;\upsilon\right)+\int_0^1 H^2\left(\xi_1,x_2\right)dx_1\cdot\int_0^1 u^2\left(\xi_1,x_2;\upsilon\right)d\xi_1\right]dx\le 2d^2\left[\left\|u\right\|_{2,\Gamma_{-1}}^2+d^2\left\|u\right\|_{2,\Omega}^2\right],$$

$$\int_0^1\left[u\left(0,x_2;\upsilon\right)-\int_0^1 H\left(x_1,x_2\right)u\left(x_1,x_2;\upsilon\right)dx_1\right]^2dx_2\le$$

$$\le 2\int_0^1\left[u^2\left(0,x_2;\upsilon\right)+\int_0^1 H^2\left(x_1,x_2\right)dx_1\cdot\int_0^1 u^2\left(x_1,x_2;\upsilon\right)dx_1\right]dx_2\le\left[\left\|u\right\|_{2,\Gamma_{-1}}^2+d^2\left\|u\right\|_{2,\Omega}^2\right].$$

Отсюда и из оценок (7), (8) следует, что правые части уравнения (17) и граничного условия (18) являются элементами пространств $L_2\left(\Omega\right)$ и $L_2\left(\Gamma_{-1}\right)$ соответственно. Тогда для каждого заданного $\upsilon \in V$ задача (17)–(19) имеет единственное обобщенное решение из $W_{2,0}^1(\Omega)$ и справедлива оценка [10, с. 200]

$$\|\psi\|_{2,\Omega}^{(1)} \le M\left[\|u\|_{2,\Omega} + \|u\|_{2,\Gamma_{-1}}\right].$$

Учитывая здесь оценки (7), (8), получаем

$$\|\psi\|_{2,\Omega}^{(1)} \le M\left[\|f\|_{2,\Omega} + \|g\|_{2,\Gamma_{-1}}\right]. \tag{21}$$

Отсюда и из ограниченности вложений $W_2^1(\Omega) \to L_{r_1}(\Omega)$, $W_2^1(\Omega) \to L_{r_2}(\Gamma)$ при произвольных $r_1, r_2 \in [2,\infty)$ получаем оценку

$$\|\psi\|_{r_1,\Omega} + \|\psi\|_{r_2,\Gamma_{-1}} \le M\left[\|f\|_{2,\Omega} + \|g\|_{2,\Gamma_{-1}}\right]. \tag{22}$$

Теорема 2. Функционал $J(\upsilon)$ непрерывно дифференцируем по Фреше на V и для его градиента справедливо равенство

$$J'(v) = \int_0^1 u(x_1, x_2; \upsilon)\psi(x_1, x_2; v)\,dx_1,\ x_2 \in (0,1). \tag{23}$$

Доказательство. Пусть $\upsilon, \upsilon + \Delta\upsilon \in V$ – произвольные управления, $\Delta\upsilon \in L_2(0,1)$ и $\Delta u = \Delta u(x) = u(x; \upsilon + \Delta\upsilon) - u(x; \upsilon)$, $x \in \Omega$. Из условий (2)–(4) следует, что Δu является обобщенным решением из $W_{2,0}^1(\Omega)$ краевой задачи:

$$-\sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_i(x)\frac{\partial \Delta u}{\partial x_i}\right) + (\upsilon + \Delta\upsilon)\Delta u = -\Delta\upsilon u,\ x \in \Omega, \tag{24}$$

$$-k_1(x)\frac{\partial \Delta u}{\partial x_1} = 0,\ x \in \Gamma_{-1}, \tag{25}$$

$$\Delta u(x) = 0,\ x \in \Gamma \backslash \Gamma_{-1}. \tag{26}$$

Можно показать [10, с. 200], что при сделанных предположениях для функции Δu справедлива оценка

$$\|\Delta u\|_{2,\Omega}^{(1)} \le M\|\Delta\upsilon u\|_{6/5,\Omega}. \tag{27}$$

Используя неравенство (1.7) из [11, с. 75], ограниченность вложения $W_2^1(\Omega) \to L_3(\Omega)$ [11, с. 78] и оценки (7), получаем

$$\|\Delta\upsilon u\|_{6/5,\Omega} \le \|\Delta\upsilon\|_{2,(0,1)} \cdot \|u\|_{3,\Omega} \le M\|u\|_{2,\Omega}^{(1)} \cdot \|\Delta\upsilon\|_{2,(0,1)} \le M\|\Delta\upsilon\|_{2,(0,1)}.$$

Учитывая это неравенство в (27), имеем

$$\|\Delta u\|_{2,\Omega}^{(1)} \le M\|\Delta\upsilon\|_{2,(0,1)}. \tag{28}$$

Кроме того, из ограниченности вложений $W_2^1(\Omega) \to L_{r_1}(\Omega)$, $W_2^1(\Omega) \to L_{r_2}(\Gamma)$ при произвольных $r_1, r_2 \in [2,\infty)$ и из (28) следует, что верна оценка

$$\|\Delta u\|_{r_1,\Omega} + \|\Delta u\|_{r_2,\Gamma_{-1}} \le M\|\Delta\upsilon\|_{2,(0,1)}. \tag{29}$$

Приращение функционала (1) имеет вид

$$\Delta J(\upsilon) = J(\upsilon + \Delta\upsilon) - J(\upsilon) = 2\int_0^1 \left\{\left[u(0, x_2; \upsilon) - \int_0^1 H(x_1, x_2)u(x_1, x_2; \upsilon)\,dx_1\right] \cdot \left[\Delta u(0, x_2) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \int_0^1 H(x_1, x_2)\Delta u(x_1, x_2)\,dx_1\right]\right\}dx_2 + \int_0^1 \left|\Delta u(0, x_2) - \int_0^1 H(x_1, x_2)\Delta u(x_1, x_2)\,dx_1\right|^2 dx_2. \tag{30}$$

С помощью решений краевых задач (17)–(19) и (24)–(26) преобразуем правую часть равенства (30). Для решения краевой задачи (24)–(26) справедливо равенство

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^{2} k_i(x) \frac{\partial \Delta u}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + (\upsilon + \Delta\upsilon)\Delta u \psi \right\} dx = -\int_\Omega \Delta\upsilon u \psi dx . \tag{31}$$

Полагая в тождестве (20) $\eta = \Delta u$ и вычитая полученное равенство из (31), имеем

$$2\int_0^1 \left\{ \left[u(0,x_2;\upsilon) - \int_0^1 H(x_1,x_2) u(x_1,x_2;\upsilon) dx_1 \right] \cdot \left[\Delta u(0,x_2) - \int_0^1 H(x_1,x_2) \Delta u(x_1,x_2) dx_1 \right] \right\} dx_2 =$$

$$= \int_\Omega (u\psi\Delta\upsilon + \Delta u \psi \Delta\upsilon) dx .$$

Учитывая это равенство в (30), имеем

$$\Delta J(\upsilon) = \int_\Omega u\psi\Delta\upsilon dx + R , \tag{32}$$

где

$$R = \int_0^1 \left| \Delta u(0,x_2;v) - \int_0^1 H(x_1,x_2) \Delta u(x_1,x_2;v) dx_1 \right|^2 dx_2 + \int_\Omega \Delta u \psi \Delta\upsilon dx . \tag{33}$$

Проведем оценку остаточного члена R. Используя равенство (33), неравенство $(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)$, неравенство Коши–Буняковского и оценки (29), имеем

$$R \le 2\int_0^1 \left[\Delta u^2(0,x_2) + \left(\int_0^1 H(x_1,x_2) \Delta u(x_1,x_2) dx_1 \right)^2 \right] dx_2 +$$

$$+ \|\Delta u\|_{4,\Omega} \cdot \|\psi\|_{4,\Omega} \cdot \|\Delta\upsilon\|_{2,(0,1)} \le 2\left[\|\Delta u\|^2_{2,\Gamma_{-1}} + d^2 \|\Delta u\|^2_{2,\Omega} \right] +$$

$$+ \|\Delta u\|^{(1)}_{2,\Omega} \cdot \|\psi\|^{(1)}_{2,\Omega} \|\Delta\upsilon\|_{2,(0,1)} \le M \|\Delta\upsilon\|^2_{2,(0,1)} . \tag{34}$$

Учитывая в (32) эту оценку, заключаем, что функционал (1) дифференцируем по Фреше в $L_2(0,1)$ и справедлива формула (23).

Теперь покажем, что отображение $\upsilon \to J'(\upsilon)$, определяемое равенством (23), непрерывно действует из $L_2(0,1)$ в $L_2(0,1)$. Пусть

$$\Delta\psi = \Delta\psi(x) = \psi(x;\upsilon+\Delta\upsilon) - \psi(x;\upsilon) ,\ \psi = \psi(x) = \psi(x;\upsilon), x \in \Omega .$$

Рассуждая аналогично выводу оценок (22) и (29), выведем оценку

$$\|\Delta\psi\|_{r_1,\Omega} + \|\Delta\psi\|_{r_2,\Gamma_{-1}} \le M \|\Delta\upsilon\|_{2,(0,1)} . \tag{35}$$

Кроме того, используя равенство (23), применяя неравенство Коши–Буняковского и учитывая оценки (29), (35), имеем

$$\|J'(\upsilon+\Delta\upsilon) - J'(\upsilon)\|^2_{2,(0,1)} = \int_0^1 \left\{ \int_0^1 (u\Delta\psi + \Delta u \psi + \Delta u \Delta\psi) dx_1 \right\}^2 dx_2 \le$$

$$4\int_0^1 \left[\left(\int_0^1 u\Delta\psi dx_1 \right)^2 + \left(\int_0^1 \Delta u \psi dx_1 \right)^2 + \left(\int_0^1 \Delta u \Delta\psi dx_1 \right) \right] dx_2 \le$$

$$4\int_0^1 \left[\int_0^1 u^2 dx_1 \int_0^1 \Delta\psi^2 dx_1 + \int_0^1 \Delta u^2 dx_1 \int_0^1 \psi^2 dx_1 + \int_0^1 \Delta u^2 dx_1 \int_0^1 \Delta\psi^2 dx_1 \right] dx_2 \le$$

$$4\left(\|u\|^2_{4,\Omega} \cdot \|\Delta\psi\|^2_{4,\Omega} + \|\Delta u\|^2_{4,\Omega} \cdot \|\psi\|^2_{4,\Omega} + \|\Delta u\|^2_{4,\Omega} \cdot \|\Delta\psi\|^2_{4,\Omega} \right) \le M \left(\|\Delta\upsilon\|^2_{2,(0,1)} + \|\Delta\upsilon\|^4_{2,(0,1)} \right) .$$

Отсюда следует, что отображение $\upsilon \to J'(\upsilon)$ непрерывно действует из $L_2(0,1)$ в $L_2(0,1)$. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Пусть $\upsilon_* \in V$ – оптимальное управление в задаче (1)–(5). Тогда для любого $\upsilon \in V$ выполняется неравенство

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 u(x_1, x_2; \upsilon_*) \psi(x_1, x_2; \upsilon_*) dx_1 \right] \left[\upsilon(x_2) - \upsilon_*(x_2) \right] dx_2 \geq 0 . \qquad (36)$$

Справедливость неравенства (36) следует из теоремы 5 работы [12, с. 28] с использованием формулы (23).

Литература

1. Тихонов, А.Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации / А.Н. Тихонов // ДАН СССР. – 1963. – Т. 151, № 3. – С. 501–504.

2. Искендеров, А.Д. О вариационных постановках многомерных обратных задач математической физики / А.Д. Искендеров // ДАН СССР. – 1984. – Т. 274, № 3. – С. 531–533.

3. Алифанов, О.А. Экстремальные методы решения некорректных задач / О.А. Алифанов, Е.А. Артюхин, С.В. Румянцев. – М.: Наука, 1988. – 285 с.

4. Karchevsky, A.L. Properties the misfit functional for a nonlinear one – dimensional coefficient hyperbolic inverse problem / A.L. Karchevsky // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. – 1997. – Vol. 5, no. 2. – P. 139–165.

5. Кабанихин, С.И. Обоснование метода наискорейшего спуска в интегральной постановке обратной задачи гиперболического уравнения / С.И. Кабанихин, К.Т. Искаков // Сиб. матем. журн. – 2001. – Т. 42, № 3. – С. 567–584.

6. Тагиев, Р.К. Вариационный метод решения обратной задачи об определении коэффициентов эллиптических уравнений / Р.К. Тагиев // Международная конференция «Обратные задачи теоретической и математической физики», Азербайджан, Сумгаит, 5–6 мая 2003 г. – С. 29–31.

7. Искендеров, А.Д. Оптимальная идентификация коэффициентов эллиптических уравнений / А.Д. Искендеров, Р.А. Гамидов // Автоматика и телемеханика. – 2011. – № 12. – С. 144–155.

8. Iskenderov, A.D. Variational method solving the problem of identification of the coefficients of quasilinear parabolic problem / A.D. Iskenderov, R.K. Tagiyev // The 7th International Conference «Inverse Problems: modelling and Simulation» (IPMS – 2014), May 26–31. – 2014. – P. 31.

9. Тагиев, Р.К. Об оптимизационной постановке коэффициентной обратной задачи для параболического уравнения с дополнительным интегральным условием / Р.К. Тагиев, Р.А. Касумов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2017. – № 45. – С. 49–59.

10. Ладыженская, О.А. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа / О.А. Ладыженская, Н.Н. Уральцева. – М.: Наука, 1973. – 576 с.

11. Ладыженская, О.А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уральцева. – М.: Наука, 1967. – 736 с.

12. Васильев, Ф.П. Методы решения экстремальных задач / Ф.П. Васильев. – М.: Наука, 1981. – 400 с.

Поступила в редакцию 18 мая 2017 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2018, vol. 10, no. 1, pp. 12–20

DOI: 10.14529/mmph180102

VARIATIONAL METHOD OF SOLVING A COEFFICIENT INVERSE PROBLEM FOR AN ELLIPTIC EQUATION

R.K. Tagiev, R.S. Kasymova
Baku State University, Baku, Azerbaijan
E-mail: r.tagiyev@list.ru, rena.kasimova@list.ru

One of the main types of inverse problems for equations with partial derivatives are the problems in which coefficients of equations or included values have to be determined based on some additional information. Such problems are called coefficient inverse problems for equations with partial derivatives. Inverse problems for equations with partial derivatives can be set in a variational form, i. e. like problems of optimal control by corresponding systems. Variational setting of one coefficient inverse problem for a two-dimensional elliptic equation with additional integral condition is considered. At that, the control function gets included in the coefficient when solving the equation of state, and is an element of a space of quadric totalized functions in the sense of Lebeg. Objective functional is set on the basis of an additional integral condition. Boundary conditions for equation of the state are mixed, i.e. the second boundary condition is given in one part of the boundary, and the first boundary condition is given in another part. Solving the boundary problem at each fixed control coefficient intends a generalized solution from the Sobolev space. The questions of correctness of the considered coefficient inverse problem in variational setting are studied. It is proved that the considered problem is correctly set in the weak topology of control functions' space. I. e. the multitude of optimal controls is nonvacuous and weakly compact; and any minimizing sequence of the problem weakly converges to the multitude of optimal controls. Besides, differentiability of objective functional in the sense of Frechet is proved, and a formula for its gradient is obtained. The necessary optimum condition in the form of variational inequality is determined.

Keywords: elliptic equation; inverse problem; integral condition, variational method.

References

1. Tikhonov A.N. *DAN SSSR*, 1963, Vol. 151, no. 3, pp. 501–504. (in Russ.).
2. Iskenderov A.D. *DAN SSSR*, 1984, Vol. 274, no. 3, pp. 531–533. (in Russ.).
3. Alifanov O.A., Artiukhin E.A., Rumiantsev S.V. *Extreme methods for solving ill-posed problems* (Ekstremalnye metody resheniia nekorrektnykh zadach). Moscow, Nauka Publ., 1988, 285 p. (in Russ.).
4. Karchevsky, A.L. Properties of the misfit functional for a nonlinear one-dimensional coefficient hyperbolic inverse problem. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 2009, Vol. 5, no. 2, pp. 139–164. DOI: 10.1515/jiip.1997.5.2.139
5. Kabanikhin S.I., Iskakov K.T. Justification of the Steepest Descent Method for the Integral Statement of an Inverse Problem for a Hyperbolic Equation. *Siberian Mathematical Journal*, 2001, Vol. 42, no. 3, pp. 478–494. DOI: 10.1023/A:1010471125870
6. Tagiev R.K. Variatsionnyi metod resheniia obratnoi zadachi ob opredelenii koeffitsientov ellipticheskikh uravnenii (A Variational Method for Solving the Inverse Problem of Determining the Coefficients of Elliptic Equations). *Mezhdunarodnaia konferentsiia "Obratnye zadachi teoreticheskoi i matematicheskoi fiziki"* (International Conference "Inverse Problems of Theoretical and Mathematical Physics"), Azerbaijan. Sumgait, May 5–6, 2003, pp. 29–31. (in Russ.).
7. Iskenderov A.D., Gamidov R.A. Optimal identification of coefficients of elliptic equations. *Automation and Remote Control*, 2011, Vol. 72, no. 12, pp. 2553–2562. DOI: 10.1134/S0005117911120101
8. Iskenderov A.D., Tagiyev R.K. Variational method solving the problem of the quasilinear parabolic problem. *7th International Conference "Inverse Problems: modelling and Simulation" (IPMS – 2014),* May 26–31, 2014, p. 31.

9. Tagiyev R.K., Kasumov R.A. On the optimization formulation of the coefficient inverse problem for a parabolic equation with an additional integral condition. *Bulletin of Tomsk State University. Mathematics and mechanics*, 2017, no. 45, pp. 49–59. DOI: 10.17223/19988621/45/4

10. Ladyzhenskaya O.A., Ural'tseva N.N. *Lineynye i kvazilineynye uravneniya ellipticheskogo tipa* (Linear and quasilinear equations of elliptic type). Moscow, Nauka Publ., 1973, 576 p. (in Russ.).

11. Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N. *Lineynye i kvazilineynye uravneniya parabolicheskogo tipa* (Linear and quasilinear equations of parabolic type). Moscow, Nauka Publ., 1967, 736 p. (in Russ.).

12. Vasil'ev F.P. *Metody resheniya ekstremal'nykh zadach*. Moscow, Nauka Publ., 1981, 400 p. (in Russ.).

Received May 18, 2017