УДК 517.928 DOI: 10.14529/mmph180103

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ СО СЛАБОЙ ОСОБОЙ ТОЧКОЙ

Д.А. Турсунов, К. Алымкулов, Б.А. Азимов
Ошский государственный университет, г. Ош, Кыргызская Республика
E-mail: tdaosh@gmail.com

Рассматривается задача Дирихле для сингулярно возмущенного, линейного, однородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с негладким коэффициентом в действительной оси. Подобные задачи встречаются в физике, технике, механике сплошной среды, гидродинамике и др. Целью исследования является развитие асимптотического метода пограничных функций Вишика–Люстерника–Васильевой–Иманалиева для сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений, в случае, когда соответствующее невозмущенное уравнение имеет негладкое решение в рассматриваемой области. По терминологии А.М. Ильина подобные задачи называют бисингулярными. В работе доказывается возможность применения обобщенного метода пограничных функций к построению полного, равномерного асимптотического разложения решения краевой задачи для сингулярно возмущенного, линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка со слабой особой точкой или интегрируемой особой точкой. Построенное разложение решения является асимптотическим в смысле Эрдей. При построении равномерного асимптотического разложения решения задачи Дирихле использованы: метод малого параметра, метод математической индукции, классический метод пограничных функций, обобщенный метод пограничных функций и принцип максимума. С помощью принципа максимума получена оценка для остаточного члена асимптотического разложения, т. е. равномерное, полное асимптотическое разложение решения по малому параметру обосновано. Приведен конкретный пример.

Ключевые слова: асимптотическое решение; бисингулярная задача; задача Дирихле; малый параметр; пограничные функции.

Постановка задачи. Исследуем задачу Дирихле

$$\varepsilon y''(x) + x^{\alpha} y'(x) - y(x) = 0,\ \ 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$y(0) = a,\ y(1) = b, \tag{2}$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, a, b – const, $\alpha = m/(m+1)$, m – фиксированное натуральное число.

Задача (1)–(2) при $\alpha = 1/2$ рассмотрена в монографии Коула [1, с. 32] и с помощью метода сращивания построено асимптотическое решение до первого порядка по малому параметру, но без обоснования. В работе [2] методом структурного сращивания исследована задача (1)–(2) при $\alpha = 1/m$, $m \in \mathbf{N}$, $y(0) = 0$ и оценка для остаточного члена получена неточно. В работе [3] обобщенным методом пограничных функций исследована задача (1)–(2) при $\alpha = 1/2$.

В данной работе мы обобщаем ранее рассмотренные случаи и предлагаем более оптимальный способ построения равномерного асимптотического разложения решения задачи (1)–(2) до любого порядка по малому параметру, чем в предыдущих работах.

Требуется построить полное асимптотическое разложение решения задачи (1)–(2) при $\varepsilon \to 0$.

Основной результат. Рассмотрим внешнее асимптотическое разложение решения задачи (1)–(2), которое ищем в виде

$$y(x) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \dots. \tag{3}$$

После подстановки ряда (3) в уравнение (1) и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях малого параметра ε, учитывая граничное условие $y(1) = b$, получаем следующие задачи:

$$x^{\alpha} y_0'(x) - y_0(x) = 0, \qquad y_0(1) = b\,,$$

$$x^{\alpha} y_k'(x) - y_k(x) = -y_{k-1}''(x), \qquad y_k(1) = 0\,,\ k = 1, 2, \dots$$

Отсюда определяем неизвестные функций $y_k(x)$:

$$y_0(x) = be^{(x^\beta - 1)/\beta}, \quad \text{где } \beta = 1 - \alpha = \frac{1}{m+1}, \ \frac{1}{\beta} = m+1, \ y_k(x) = -e^{\frac{1}{\beta}x^\beta} \int_1^x e^{-\frac{1}{\beta}s^\beta} \frac{y''_{k-1}(s)}{s^\alpha} ds, \ k \in \mathrm{N}.$$

При $x \to 0$ имеем:

$$y_0(x) = be^{\frac{1}{\beta}(x^\beta - 1)} = O(1), \ y'_0(x) = O\left(x^{-\alpha}\right), \ y''_0(x) = O\left(x^{-1-\alpha}\right), \ x \to 0,$$

$$y_1(x) = -e^{\frac{1}{\beta}x^\beta} \int_1^x e^{-\frac{1}{\beta}s^\beta} \frac{y''_0(s)}{s^\alpha} ds = O\left(x^{-2\alpha}\right), x \to 0.$$

Методом математической индукции докажем, что

$$y_n(x) = O\left(x^{-(n-1)(\alpha+1)-2\alpha}\right), x \to 0, \ \forall n \in N.$$

Действительно, при $n = 1$ верно: $y_1(x) = O(x^{-2\alpha}), x \to 0$.

Пусть при $n = k$ справедливо соотношение: $y_k(x) = O(x^{-(k-1)(\alpha+1)-2\alpha}), \ x \to 0$, тогда при $n = k + 1$ имеем

$$y_{k+1}(x) = -e^{\frac{1}{\beta}x^\beta} \int_1^x e^{-\frac{1}{\beta}s^\beta} s^{-\alpha} y''_k(s) ds = -e^{\frac{1}{\beta}x^\beta} \int_1^x \frac{\tilde{y}_k(s)}{s^\alpha s^{2\alpha+(k-1)(\alpha+1)+2}} ds = O\left(x^{-k(\alpha+1)-2\alpha}\right), x \to 0,$$

где $\tilde{y}_k \in C^\infty[0,1]$.

Следовательно, ряд (3) представим в виде

$$y(x) \sim y_0(x) + \frac{\varepsilon}{x^{2\alpha}} \left[y_1^{(0)}(x) + \left(\frac{\varepsilon}{x^{1+\alpha}}\right) y_2^{(0)}(x) + \ldots + \left(\frac{\varepsilon}{x^{1+\alpha}}\right)^{n-1} y_n^{(0)}(x) + \ldots \right], \quad x \to 0, \qquad (4)$$

где $y_k^{(0)} \in C[0,1]$.

Очевидно, что ряд (3) или (4) является асимптотическим рядом на отрезке $\Omega(\varepsilon) = [\varepsilon^\gamma, 1]$, где $0 < \gamma < \frac{1}{1+\alpha} = \frac{m+1}{2m+1}$. Точку $x = 0$ называют слабой особой точкой уравнения (1).

Следовательно, задача (1)–(2) является бисингулярной [4].

В задаче (1)–(2) произведем замену, пусть

$$y(x) = be^{(m+1)(\sqrt[m+1]{x} - 1)} z(x), \qquad (5)$$

где $z(x)$ – новая неизвестная функция.

Тогда

$$y'(x) = be^{(m+1)(\sqrt[m+1]{x}-1)} \left(\frac{1}{x^\alpha} z(x) + z'(x) \right), \ y''(x) = be^{(m+1)(\sqrt[m+1]{x}-1)} \left(-\frac{\alpha}{x^{1+\alpha}} z(x) + \frac{1}{x^{2\alpha}} z(x) + \frac{2}{x^\alpha} z'(x) + z''(x) \right),$$

$$y(0) = a = be^{-(m+1)} e^0 z(0) \Rightarrow z(0) = \frac{a}{b} e^{m+1}, \ y(1) = b = be^{-(m+1)} e^{m+1} z(1) \Rightarrow z(1) = 1.$$

Подставляя (5) в задачу (1)–(2) с учетом этих соотношений, получаем:

$$\varepsilon \left(z''(x) + \frac{2}{x^\alpha} z'(x) - \frac{\alpha}{x^{1+\alpha}} z(x) + \frac{1}{x^{2\alpha}} z(x) \right) + x^\alpha z'(x) = 0, \qquad (6)$$

$$z(0) = \frac{a}{b} e^{m+1}, \ z(1) = 1. \qquad (7)$$

Отметим, что бисингулярность не исчезает, т. е. задача (6)–(7) тоже является бисингулярной.

Асимптотическое решение задачи будем искать в виде

$$z(x) = z_0(x) + \pi_0(t) + \mu(z_1(x) + \pi_1(t)) + \ldots + \mu^k (z_k(x) + \pi_k(t)) + \ldots, \qquad (8)$$

где $t = x / \mu^{m+1}, \ \varepsilon = \mu^{2m+1}$.

Подставляя (8) в (6), имеем

$$\varepsilon\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\left(z_k''(x)+\frac{2}{x^{\alpha}}z_k'(x)-\frac{\alpha}{x^{1+\alpha}}z_k(x)+\frac{1}{x^{2\alpha}}z_k(x)\right)+x^{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k z_k'(x)+$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{k-1}\left(\pi_k''(t)+t^{\alpha}\pi_k'(t)+\frac{2\mu}{t^{\alpha}}\pi_k'(t)-\frac{\alpha\mu}{t^{1+\alpha}}\pi_k(t)+\frac{\mu^2}{t^{2\alpha}}\pi_k(t)\right)=0. \quad (9)$$

Из граничных условий (2) имеем:

$$z_0(1)=1,\ z_k(1)=0,\ \pi_0(0)=\frac{a}{b}e^{m+1}-z_0(0),\pi_0(\tilde{\mu})=0,\pi_k(0)=-z_k(0),\pi_k(\tilde{\mu})=0,\ k\in N,\ \tilde{\mu}=1/\mu^{m+1}. \quad (10)$$

Из равенства (9) и (10) для $z_0(x)$ получаем задачу:

$$x^{\alpha}z_0'(x)=0,\ 0<x<1,\quad z_0(1)=1. \quad (11)$$

Задача (11) имеет единственное решение $z_0(x) = 1$.

Пусть $z_k(x) \equiv 0$, $k \in N$. Тогда равенство (9) представимо в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{k-1}\left(\pi_k''(t)+t^{\alpha}\pi_k'(t)+\frac{2\mu}{t^{\alpha}}\pi_k'(t)-\frac{\alpha\mu}{t^{1+\alpha}}\pi_k(t)+\frac{\mu^2}{t^{2\alpha}}\pi_k(t)\right)-\frac{\alpha}{t^{1+\alpha}}+\frac{\mu}{t^{2\alpha}}=0.$$

Отсюда для пограничных функций $\pi_k(t)$ имеем:

$$L\pi_0(t)\equiv\pi_0''(t)+t^{\alpha}\pi_0'(t)=0,\ 0<t<\tilde{\mu},\ \pi_0(0)=\frac{a}{b}e^{m+1}-1,\ \pi_0(\tilde{\mu})=0, \quad (12)$$

$$L\pi_1(t)=\frac{\alpha}{t^{1+\alpha}}+\frac{\alpha}{t^{1+\alpha}}\pi_0(t)-\frac{2}{t^{\alpha}}\pi_0'(t),\ 0<t<\tilde{\mu},\ \pi_1(0)=0,\ \pi_1(\tilde{\mu})=0, \quad (13)$$

$$L\pi_2(t)=-\frac{1}{t^{2\alpha}}+\frac{\alpha}{t^{1+\alpha}}\pi_1(t)-\frac{2}{t^{\alpha}}\pi_1'(t)-\frac{1}{t^{2\alpha}}\pi_0(t),\ 0<t<\tilde{\mu},\ \pi_2(0)=0,\ \pi_2(\tilde{\mu})=0, \quad (14)$$

$$L\pi_k(t)=\frac{\alpha}{t^{1+\alpha}}\pi_{k-1}(t)-\frac{2}{t^{\alpha}}\pi_{k-1}'(t)-\frac{1}{t^{2\alpha}}\pi_{k-2}(t),\ 0<t<\tilde{\mu},\ \pi_k(0)=0,\ \pi_k(\tilde{\mu})=0,\ k=3,4,\ldots \quad (15)$$

Решение задачи (12) имеет вид:

$$\pi_0''(t)+t^{\alpha}\pi_0'(t)=0\Rightarrow\left(\pi_0'(t)e^{\frac{1}{1+\alpha}t^{1+\alpha}}\right)'=0\Rightarrow\pi'_0(t)e^{\frac{1}{1+\alpha}t^{1+\alpha}}=c_1\Rightarrow\pi_0(t)=c_2-c_1\int_t^{\tilde{\mu}}e^{-\frac{1}{1+\alpha}s^{1+\alpha}}ds.$$

Учитывая граничные условия $\pi_0(0)=\frac{a}{b}e^{m+1}-1,\ \pi_0(\tilde{\mu})=0$, находим значения c_1 и c_2:

$$\pi_0(\tilde{\mu})=c_2=0\Rightarrow c_2=0;$$

$$\pi_0(0)=-c_1\int_0^{\tilde{\mu}}e^{-\frac{1}{1+\alpha}s^{1+\alpha}}ds=\frac{a}{b}e^{m+1}-1\Rightarrow c_1=\left(1-\frac{a}{b}e^{m+1}\right)A,\ A=\left(\int_0^{\tilde{\mu}}e^{-\frac{1}{1+\alpha}s^{1+\alpha}}ds\right)^{-1}.$$

Следовательно,

$$\pi_0(t)=\left(\frac{a}{b}e^{m+1}-1\right)A\int_t^{\tilde{\mu}}e^{-\frac{1}{1+\alpha}s^{1+\alpha}}ds.$$

Интегрируя по частям интеграл

$$\int_t^{\tilde{\mu}}e^{-\frac{1}{1+\alpha}s^{1+\alpha}}ds,\ t\to\tilde{\mu},$$

получим

$$\int_t^{\tilde{\mu}}e^{-\frac{1}{1+\alpha}s^{1+\alpha}}ds=\frac{1}{t^{\alpha}}e^{-\frac{1}{1+\alpha}t^{1+\alpha}}\left(1-\frac{\alpha}{t^{1+\alpha}}+\frac{\alpha(1+2\alpha)}{t^{2(1+\alpha)}}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{t^{n(1+\alpha)}}\prod_{k=1}^{n}(k\alpha+k-1)+\ldots\right),\ t\to\tilde{\mu}.$$

Это означает, что функция $\pi_0(t)$ экспоненциально убывает при $t\to\tilde{\mu},\ \mu\to0$.

При решении уравнения $L\pi_0(t)=0$ мы заметили, что оно имеет два линейно независимых решения: 1 и $\int_t^{\tilde{\mu}}e^{-\frac{1}{1+\alpha}s^{1+\alpha}}ds$. Не нарушая общности, линейно независимые решения уравнения

$$L\pi_0(t)=0$$

можно представить в виде:

$$Y(t)=1-X(t),\ X(t)=A\int_t^{\tilde{\mu}} e^{-\frac{1}{1+\alpha}s^{1+\alpha}}ds,\ A\int_0^{\tilde{\mu}} e^{-\frac{1}{1+\alpha}s^{1+\alpha}}ds=1.$$

Линейную независимость можно показать с помощью Якобиана:

$$J(X(t),Y(t))=X(t)Y'(t)-X'(t)Y(t)=Ae^{-\frac{1}{1+\alpha}t^{1+\alpha}}\neq 0,\ t\in[0,\tilde{\mu}].$$

Причиной такого выбора линейно независимых решений являются соотношения:

$$X(0)=1, Y(0)=0, X(\tilde{\mu})=0, Y(\tilde{\mu})=1,$$

которые понадобятся при построении функции Грина.

Так как $X(t)=1-At+o(t), t\to 0 \Rightarrow Y(t)=O(t), t\to 0$, то общее решение уравнения $Lz(t)=0$ имеет вид $z(t)=c_1Y(t)+c_2X(t)$, c_1, c_2 – const. Отсюда вытекает лемма.

Лемма. Краевая задача $Lz(t)=0$, $z(0)=z(\tilde{\mu})=0$ имеет только нулевое решение.

Справедлива

Теорема 1. Краевая задача

$$Lz(t)=f(t),\ 0<t<\tilde{\mu},\quad z(0)=0,\ z(\tilde{\mu})=0$$

имеет единственное решение, и оно представимо в виде

$$z(t)=\int_0^{\tilde{\mu}} G(t,s)e^{\frac{1}{1+\alpha}s^{1+\alpha}} f(s)ds,$$

где $G(t,s)=\begin{cases}-Y(t)X(s),\ 0\le t\le s,\\ -Y(s)X(t),\ s\le t\le \tilde{\mu},\end{cases}$ – функция Грина, $f(t)\in C(0,\tilde{\mu}]$,

$$f(t)=O(t^{-\gamma}), t\to 0,\ \gamma<2;\ f(t)=O(t^{-\tilde{\beta}}), t\to\tilde{\mu},\ \frac{1}{m+1}<\tilde{\beta}.$$

Доказательство. Решение $z(t)$ запишем в виде

$$z(t)=J_1(t)+J_2(t),$$

где $J_1(t)=-X(t)\int_0^t Y(s)e^{\frac{1}{1+\alpha}s^{1+\alpha}} f(s)ds,\ J_2(t)=Y(t)\int_t^{\tilde{\mu}} X(s)e^{\frac{1}{1+\alpha}s^{1+\alpha}} f(s)ds.$

Покажем, что функции $J_1(t)$ и $J_2(t)$ удовлетворяют граничным условиям. Так как $X(\tilde{\mu})=0$ и $Y(0)=0$, поэтому достаточно доказать, что $J_1(t)\to 0, t\to 0$ и $J_2(t)\to 0, t\to\tilde{\mu}$.

1. Рассмотрим функцию $J_1(t)$. При $t\to 0$ имеем $|Y(t)|\le ct, |f(t)|\le ct^{-\gamma}$, поэтому

$$|J_1(t)|\le c\int_0^t s^{1-\gamma}e^{\frac{1}{1+\alpha}s^{1+\alpha}}ds\le ct^{2-\gamma}\to 0,\ t\to 0.$$

2. Теперь рассмотрим $J_2(t)$ при $t\to\tilde{\mu}$:

$$|J_2(t)|\le c\int_t^{\tilde{\mu}} s^{-\alpha-\tilde{\beta}}e^{\frac{1}{1+\alpha}s^{1+\alpha}-\frac{1}{1+\alpha}s^{1+\alpha}}ds=c\int_t^{\tilde{\mu}} s^{-\alpha-\tilde{\beta}}ds=O(t^{1-\alpha-\tilde{\beta}})=O(t^{\frac{1}{m+1}-\tilde{\beta}}),\ t\to\tilde{\mu}.$$

Поэтому решение $z(t)$ удовлетворяет граничным условиям. Подставляя функцию $z(t)$ в уравнение $Lz(t)=f(t)$ при $0<t<\tilde{\mu}$, получаем тождество. Теорема 1 доказана.

С помощью этой теоремы доказывается существование и единственность решений уравнений (13)–(15). При $t\to\tilde{\mu}$ для функции $\pi_k(t)$ справедливы асимптотические разложения

$$\pi_{2k-1}(t)=O\left(\frac{1}{t^{2\alpha+(3\alpha-1)k}}\right),\ \pi_{2k}(t)=O\left(\frac{1}{t^{(3\alpha-1)k}}\right),\ k=1,2,...,t\to\tilde{\mu}=\mu^{-(m+1)}.$$

Кроме того, $\pi_k(t)=O\left(\sqrt[m+1]{t^k}\right),\ t\to 0,\ k=0,1,2,...$

Таким образом мы доказали ограниченность функций $\pi_k(t)$ на отрезке $[0,\tilde{\mu}]$, когда $\mu\to 0$.

Теперь докажем, что ряд (8) является асимптотическим рядом на отрезке $x\in[0,1]$. Для этого рассмотрим усеченный ряд

$$z(x)=1+\sum_{k=0}^{(2m+1)n}\mu^k\pi_k(t)+R_n(x,\varepsilon)\,. \tag{16}$$

Подставляя (16) в задачу (1)–(2), и учитывая значения $\pi_k(t)$, имеем:

$$\varepsilon\left(R_n''(x,\varepsilon)+\frac{2}{x^\alpha}R_n'(x,\varepsilon)+\left(\frac{1}{x^{2\alpha}}-\frac{\alpha}{x^{1+\alpha}}\right)R_n(x,\varepsilon)\right)+x^\alpha R_n'(x,\varepsilon)=\varepsilon^n\Phi(t,\mu) \tag{17}$$

$$R_n(0,\varepsilon)=0, R_n(1,\varepsilon)=0, \tag{18}$$

где $\Phi(t,\mu)=\frac{\alpha}{t^{1+\alpha}}\pi_{(2m+1)n}(t)-\frac{2}{t^\alpha}\pi'_{(2m+1)n}(t)-\frac{1}{t^{2\alpha}}\pi_{(2m+1)n-1}(t)-\mu\frac{1}{t^{2\alpha}}\pi_{(2m+1)n}(t)$.

Из свойств функций $\pi_k(t)$ следует, что $\Phi(t,\mu)=O(1),\mu\to 0,t\in[0,\mu^{-(m+1)}]$.

Пусть

$$R_n(x,\varepsilon)=e^{-(m+1)\sqrt[m+1]{x}}r(x,\varepsilon)\,,$$

тогда задача (17)–(18) примет вид:

$$\varepsilon r''(x,\varepsilon)+x^\alpha r'(x,\varepsilon)-r(x,\varepsilon)=e^{(m+1)\sqrt[m+1]{x}}\varepsilon^n\Phi(t,\mu),\quad 0<x<1,\ \ r(0,\varepsilon)=0,\ \ r(1,\varepsilon)=0\,.$$

Пусть $M=\max\limits_{t\in[0,\tilde{\mu}]}\Phi(t,\mu)$, $\mu\to 0$. Применяя теорему 26.4 [4], получаем:

$$\left|r\left(x,\varepsilon\right)\right|\le\varepsilon^n Me^{(m+1)\sqrt[m+1]{x}}\ \Rightarrow\ \left|R_n\left(x,\varepsilon\right)\right|\le\varepsilon^n M\,,\ \varepsilon\to 0,\ x\in[0,1].$$

Справедлива

Теорема 2. Для решения задачи (1)–(2) справедливо асимптотическое разложение

$$y(x)=be^{(m+1)(\sqrt[m+1]{x}-1)}\left(1+\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\pi_k(t)\right),\ \mu\to 0.$$

Пример. Пусть в задаче (1)–(2) $\alpha = 1/2$. Тогда асимптотическое решение представимо в виде

$$y(x)=be^{2(\sqrt{x}-1)}\left(1+\pi_0(t)+\mu\pi_1(t)+...+\mu^3\pi_3(t)+R_1(x,\varepsilon)\right),\ \mu\to 0,$$

где $t=x/\mu^2,\ \varepsilon=\mu^3$,

$$\pi_0(t)=\left(\frac{a}{b}e^2-1\right)A\int_t^{\tilde{\mu}}e^{-\frac{2}{3}s^{3/2}}ds,\ A=\left(\int_0^{\tilde{\mu}}e^{-\frac{2}{3}s^{3/2}}ds\right)^{-1},$$

$$\pi_1(t)=\int_0^{\tilde{\mu}}G(t,s)e^{\frac{2}{3}s^{3/2}}\left(\frac{1}{2\sqrt{s^3}}+\frac{1}{2\sqrt{s^3}}\pi_0(\mathrm{s})-\frac{2}{\sqrt{s}}\pi_0'(\mathrm{s})\right)ds,$$

$$\pi_2(t)=\int_0^{\tilde{\mu}}G(t,s)e^{\frac{2}{3}s^{3/2}}\left(-\frac{1}{s}+\frac{1}{2\sqrt{s^3}}\pi_1(s)-\frac{2}{\sqrt{s}}\pi_1'(s)-\frac{1}{s}\pi_0(s)\right)ds,$$

$$\pi_3(t)=\int_0^{\tilde{\mu}}G(t,s)e^{\frac{2}{3}s^{3/2}}\left(\frac{1}{2\sqrt{s^3}}\pi_2(s)-\frac{2}{\sqrt{s}}\pi_2'(s)-\frac{1}{s}\pi_1(s)\right)ds,$$

$$G(t,s)=\begin{cases}-Y(t)X(s),\ 0\le t\le s,\\ -Y(s)X(t),\ s\le t\le\tilde{\mu},\end{cases}\ Y(t)=1-X(t),\ X(t)=A\int_t^{\tilde{\mu}}e^{-\frac{2}{3}s^{3/2}}ds\quad,$$

$$\left|R_1\left(x,\varepsilon\right)\right|\le\varepsilon M\,,\ 0<M-\mathrm{const},\ \varepsilon\to 0,\ x\in[0,1].$$

Литература

1. Коул, Д.Д. Методы возмущений в прикладной математике / Д.Д. Коул. – М.: Мир, 1972. – 274 с.

2. Зулпукаров, А.З. Метод структурного сращивания для решения краевых задач сингулярно возмущенных уравнений второго порядка: дис. … канд. физ.-мат. наук / А.З. Зулпукаров. – Ош, 2009. – 114 с.

3. Alymkulov, K. Generalized method of boundary layer function for bisingularly perturbed differential Cole equation / K. Alymkulov, D.A. Tursunov, B.A. Azimov // Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS). – Vol. 101, Issue 3. – pp. 507–516.

4. Ильин, А.М. Асимптотические методы в анализе / А.М. Ильин, А.Р. Данилин. – М.: ФИЗМАТЛИТ. – 2009. – 248 с.

Поступила в редакцию 14 апреля 2017 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2018, vol. 10, no. 1, pp. 21–26

DOI: 10.14529/mmph180103

ASYMPTOTICS OF SOLUTION OF THE SINGULARLY PERTURBED DIRICHLET PROBLEM WITH A WEAK CRITICAL POINT

D.A. Tursunov, K. Alymkulov, B.A. Azimov
Osh State University, Osh, Kyrgyzstan
E-mail: tdaosh@gmail.com

The Dirichlet problem for a singularly perturbed linear homogeneous ordinary differential equation of second order with a nonsmooth coefficient in real axis is considered. Such problems can be seen in physics, engineering, continuum mechanics, hydrodynamics, etc. Object of the research is to develop the asymptotic technique of boundary functions of Vishik–Lusternik–Vasilyeva–Imanaliev for singularly perturbed differential equations in case when the corresponding non-perturbed equation has nonsmooth solution in the considered area. According to terminology of A.M. Ilyin, such problems are called bisingular. The possibility to use a generalized method of boundary functions for constructing a complete proportional asymptotic expansion of the boundary problem solution for a singularly perturbed linear ordinary differential equation of second order with a weak critical point or an integrable critical point is proved in the article. The constructed expansion of solution is asymptotic in the sense of Erdey. When constructing the proportional asymptotic expansion of the Dirichlet problem, the following methods were used: small parameter method, method of mathematical induction, classical method of boundary functions, and the principle of maximum. Using the principle of maximum, an assessment for the asymptotic expansion's remainder term is obtained, i.e. the proportional complete asymptotic expansion of the solution by small parameter is proved. A specific example is given.

Keywords: asymptotic solution; bisingular problem; Dirichlet problem; small parameter; boundary functions.

References

1. Koul D.D. *Metody vozmushchenii v prikladnoi matematike* (Perturbation Methods in Applied Mathematics), Moscow, Mir Publ., 1972, 274 p. (in Russ.). [Cole J.D. *Perturbation Methods in Applied Mathematics*. Blaisdell Publishing Company, Waltham, Massachusetts, 1968, 260 p.]

2. Zulpukarov A.Z. *Metod strukturnogo srashchivaniia dlia resheniia kraevykh zadach singuliarno vozmushchennykh uravnenii vtorogo poriadka: dissertatsiia kandidata fiziko-matematicheskikh nauk* (The method of structural splicing for solving boundary value problems of singularly perturbed second-order equations: dissertation of the candidate of physical and mathematical sciences), Osh, 2009, 114 p. (in Russ.).

3. Alymkulov K., Tursunov D.A. Azimov B.A. Generalized method of boundary layer function for bisingularly perturbed differential Cole equation. *Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS)*, Vol. 101, Issue 3, pp. 507–516. DOI: 10.17654/MS101030507

4. Ilin A.M., Danilin A.R. *Asimptoticheskie metody v analize* (Asymptotic methods in analysis). Moscow, FIZMATLIT Publ., 2009, 248 p. (in Russ.).

Received April 14, 2017