УДК 519.6 DOI: 10.14529/mmph180203

АППРОКСИМАЦИЯ МАТРИЦЫ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ МАТРИЦЕЙ ЕДИНИЧНОГО РАНГА

А.В. Панюков, Х.З. Чалуб, Я.А. Мезал
Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация
E-mail: paniukovav@susu.ru

Большинство современных математических методов решения задач естествознания, техники, экономики требуют решения линейных задач большой размерности. Для понижения вычислительной сложности используется специальная структура матриц, соответствующих этим задачам. Блочно-малоранговые матрицы представляют из себя приближение с хорошей точностью плотных матриц в малопараметрическом формате. Блоки малого ранга представляются в виде произведения матриц меньшего размера. Это позволяет значительно экономить машинную память. Методы приближенной факторизации блочно-малоранговых матриц могут быть применены для приближенного решения и предобуславливания систем с плотными матрицами в задачах аэро-, гидро- и электродинамики, а также в прикладной статистике и логистике. Для построения малопараметрических представлений матриц, основанных на малоранговых аппроксимациях отдельных блоков, широко используются алгебраические методы. В данной работе рассмотрен эффективный способ аппроксимации блоков матрицы с положительными элементами матрицей единичного ранга, т. е. в виде произведения столбца на строку. Решение задачи ищется среди допустимых представлений, минимизирующих среднее значение модулей логарифмов отношения приближенного представления элемента к точному значению. Аппроксимирующая задача сведена к задаче линейного программирования, для которой двойственная задача является задачей построения циркуляции минимальной стоимости в полном двудольном графе с пропускными способностями всех дуг равными единице. Для решения полученной задачи предложен алгоритм, имеющий вычислительную сложность не более $O(|I|\cdot|J|\cdot\log(|I|\cdot|J|))$, где I – множество строк в блоке, J – множество столбцов в блоке.

Ключевые слова: матрица; малоранговая аппроксимация; линейное программирование; алгоритм; вычислительная сложность.

Введение

Большинство современных математических методов решения задач естествознания, техники, экономики требуют решения линейных задач большой размерности. Для понижения вычислительной сложности используется специальная структура матриц, соответствующих этим задачам. За данной структурой лежит следующий общий физический смысл: (1) строки и столбцы таких матриц ассоциированы с некоторыми элементами в пространстве, (2) задана некоторая функция взаимодействия этих элементов, (3) если функция взаимодействия асимптотически гладкая, то взаимодействие разнесенных в пространстве групп элементов можно приблизить малым числом параметров [1] (критерий разделения). Таким образом, блоки, ассоциированные с хорошо разделёнными в пространстве группами элементов, обладают малым рангом.

Другой известный пример блочно-малоранговых матриц связан с матрицами, полученными при дискретизации дифференциальных уравнений. Известно [2, 3], что если матрица A получена при конечно-элементной дискретизации дифференциального уравнения, удовлетворяющего некоторым ограничениям [2–4], то обратная к ней приближается блочно-малоранговой матрицей.

Блочно-малоранговые матрицы представляют из себя приближение с хорошей точностью плотных матриц в малопараметрическом формате. Блоки малого ранга представляются в виде произведения матриц меньшего размера. Это позволяет значительно экономить машинную память. Например, в отличие от плотной $(m\times n)$ матрицы, для представления которой требует $m\cdot n$ элементов, матрица единичного ранга требует $m+n$ элементов. Другой характерной особенностью малопараметрического представления является быстрая процедура умножения такой матрицы на вектор ($O(m+n)$ операций вместо $O(mn)$). Быстрая процедура умножения матрицы на вектор позволяет эффективно применять итерационные методы к решению систем с малопараметрическими матрицами.

Методы приближенной факторизации блочно-малоранговых матриц могут быть применены для приближенного решения и предобуславливания систем с плотными матрицами [5–14] в задачах аэро-, гидро- и электродинамики, а также в прикладной статистике и логистике.

Известны алгебраические методы построения малопараметрических представлений матриц, основанные на малоранговых аппроксимациях отдельных блоков [1, 2]. В данной работе рассмотрен эффективный способ аппроксимации блоков матрицы с положительными элементами матрицей единичного ранга, т. е. в виде произведения столбца на строку.

В первом разделе дана постановка аппроксимирующей задачи. Во втором разделе предложен способ сведения аппроксимирующей задачи к транспортной задаче в матричной постановке. В третьем разделе предложен алгоритм решения аппроксимирующей задачи и доказано, что его вычислительная сложность равна $O\left(mnlog\left(mn\right)\right)$.

Постановка аппроксимирующей задачи

Пусть дана матрица $\Lambda=\{\lambda_{ij}>0: i\in I, j\in J\}$. Рассматриваемая задача состоит в нахождении таких матриц $\mathrm{A}=\{\alpha_i>0: i\in I\}$ и $\mathrm{B}=\{\beta_j>0; j\in J\}$, что $\Lambda=A\cdot B^T$, т. е. разложения матрицы в произведения столбца и строки. Данная задача эквивалентна нахождению решения системы алгебраических уравнений $\lambda_{ij}=\alpha_i\beta_j, i\in I, j\in J$. Понятно, что при произвольных положительных значениях λ_{ij} данная система уравнений может оказаться несовместной.

Для построения аппроксимирующей задачи воспользуемся методом наименьших модулей [15–17]. Введем функцию

$$F_\Lambda(\alpha,\beta)=\frac{1}{|I|\cdot|J|}\cdot\sum_{i\in I, j\in J}\left|\log\frac{\alpha_i\beta_j}{\lambda_{ij}}\right|,$$

значение которой равно среднему значению модулей логарифмов отношения приближенного значения элемента матрицы к точному значению этого элемента.

Очевидно, что $\inf F_\lambda=0$ тогда и только тогда, когда система уравнений совместна. Из неотрицательности функции F_Λ следует, что значение $\inf F_\Lambda$ можно рассматривать как степень несовместности системы. При $\lambda>0$ функция $F(\lambda)$ является непрерывной в окрестности любого минимума, поэтому инфимум достигается, а оптимальным приближенным решением системы с минимальной степенью несовместности можно считать

$$(\alpha^o,\beta^o)\in \operatorname{Arg}\min_{\substack{\{\beta_j>0: j\in J\}\\ \{\alpha_i>0: i\in I\}}}\left[\sum_{i\in I, j\in J}\left|\log\frac{\alpha_i\beta_j}{\lambda_{ij}}\right|\right].$$

Легко заметить, что из оптимальности решения (α^o,β^o) следует оптимальность множества решений $D=\{(\alpha^o\cdot c,\beta^o/c): c>0\}$. Мы будем считать решением аппроксимирующей задачи

$$\left(\alpha^*,\beta^*\right)=\arg\min_{(\alpha,\beta)\in D}\|(\alpha,\beta)\|_\infty$$

Заметим, что если $(\alpha,\beta)\in D,$ то

$$\alpha^*=\left\{\frac{a_k\sqrt{\max\limits_{i\in I}\alpha_i\cdot\max\limits_{j\in J}\beta_j}}{\max\limits_{i\in I}\alpha_i}:k\in I\right\},\ \ \beta^*=\left\{\frac{\beta_k\sqrt{\max\limits_{i\in I}\alpha_i\cdot\max\limits_{j\in J}\beta_j}}{\max\limits_{j\in J}\beta_j}:k\in J\right\}.$$

Таким образом, корректная постановка аппроксимирующей задачи является двухуровневой, но для ее решения достаточно найти любое решение задачи (1) нижнего уровня.

Сведение аппроксимирующей задачи к транспортной задаче в матричной постановке

Поскольку логарифмическая функция монотонна и

$$\left(\log\frac{\alpha_i\beta_j}{\lambda_{ij}}=0\right)\Leftrightarrow\left(-\log\lambda_{ij}+\log\alpha_i+\log\beta_j=0\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(-a_{ij}+x_i-y_j=0,\, l_{ij}=\log\lambda_{ij},\, x_i=\log\alpha_i,\, y_j=\log\beta_j\right),\quad i\in I,\ j\in J,$$

то далее рассматриваем задачу аппроксимации в терминах x,y:

$$\left(x^o,y^o\right)=\arg\min_{\substack{x\in\mathbf{R}^{|I|}\\ y\in\mathbf{R}^{|J|}}}\sum_{i\in I,\ j\in J}\left|-l_{ij}+x_i-y_j\right|.$$

Данная задача эквивалентна задаче линейного программирования

$$\sum_{i\in I,\ j\in J} w_{ij}\to\min_{x,y,w}, \tag{1}$$

$$-w_{ij}\le -l_{ij}+x_i+y_j\le w_{ij},\, w_{ij}\ge 0, i\in I,\, j\in J, \tag{2}$$

которая в стандартной форме имеет вид

$$\sum_{i\in I,\ j\in J} w_{ij}\to\min_{x,y,w}, \tag{3}$$

$$x_i+y_j+w_{ij}\ge l_{ij}, -x_i-y_j+w_{ij}\ge -l_{ij}, w_{ij}\ge 0,\quad i\in I,\ j\in J. \tag{4}$$

Построим задачу, двойственную задаче (18)–(19):

$$\sum_{i\in I,\, j\in J} l_{ij}\left(f_{ij}-f_{ji}\right)\to\max_f, \tag{5}$$

$$\sum_{j\in J}\left(f_{ij}-f_{ji}\right)=0,\quad i\in I, \tag{6}$$

$$\sum_{i\in I}\left(f_{ij}-f_{ji}\right)=0,\quad j\in J, \tag{7}$$

$$f_{ij}+f_{ji}\le 1, f_{ij},\quad f_{ji}\ge 0,\quad i\in I,\ j\in J. \tag{8}$$

Сделав в задаче (5)–(7) замену переменных

$$g_{ij}=f_{ij}-f_{ji},\quad i\in I,\ j\in J,$$

получим задачу линейного программирования транспортного типа в матричной постановке

$$\sum_{i\in I,\ j\in J} l_{ij}g_{ij}\to\max_g, \tag{9}$$

$$\sum_{j\in J} g_{ij}=0, i\in I,\ \sum_{i\in I} g_{ij}=0,\ j\in J,\quad -1\le g_{ij}\le 1,\quad i\in I,\ j\in J.$$

Для решения подобных задач большой размерности известно программное обеспечение, которое легко инкапсулируется в систему MS Office. Данное программное обеспечение вместе с решением прямой задачи находит решение соответствующей двойственной задачи:

$$T_\Lambda\left(r,s,t\right)=\sum_{i\in I,\ j\in J}\left(t_{ij}+t_{ji}\right)\to\min_{r,s,t}, \tag{10}$$

$$r_i+s_j+t_{ij}-t_{ji}=l_{ij},\quad t_{ij},t_{ji}\ge 0,\quad i\in I,\ j\in J.$$

Сравнивая систему ограничений задачи (1)–(2) с системой ограничений задачи (9), легко заметить, что из допустимости базисного решения (r,s,t) задачи (9) следует допустимость решения

$$R=\left(x=r,\ y=s,\ w=\left\{w_{ij}=t_{ij}+t_{ji}: i\in I,\ j\in J\right\}\right)$$

задачи (1)–(2). Более того, если (r,s,t) – оптимальное решения задачи (10), то R – оптимальное решение задачи (1)–(2), так как двойственные им задачи (5)–(8) и (9) имеют соответствующие оптимальные решения.

Алгоритм решения аппроксимирующей задачи

Изложенное выше позволяет предложить алгоритм аппроксимации матрицы Λ в виде произведения $\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}^T$. Как отмечалось ранее, задача (9) является транспортной задачей в матричной постановке. По ее решению легко найти решение задачи (10), являющейся двойственной к ней. Это позволяет предложить следующий алгоритм решения аппроксимирующей задачи.

Алгоритм Reduction

Вход: $I, J, \mathbf{\Lambda} = \left\{ \lambda_{ij} : i \in I,\ j \in J \right\}$;

Выход: $\mathbf{A} = \left\{ \alpha_i : i \in I \right\}, \quad \mathbf{B} = \left\{ \beta_j : j \in J \right\}, \quad F_\Lambda \left(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \right);$

Шаг 1. По матрице $\mathbf{\Lambda} = \left\{ \lambda_{ij} : i \in I,\ j \in J \right\}$ вычислить матрицу $\boldsymbol{L} = \left\{ l_{ij} = \ln \lambda_{ij} : i \in I,\ j \in J \right\}$.

Шаг 2. Найти решения (r,s,t) и g пары взаимно двойственных задач (9) и (10).

Шаг 3. Положить $R = \left(x = r,\ y = s,\ w = \left\{ w_{ij} = t_{ij} + t_{ji} : i \in I,\ j \in J \right\} \right)$.

Шаг 4. Вернуть $\boldsymbol{\alpha} = \left\{ \alpha_i = \exp(r_i) : i \in I \right\}, \quad \boldsymbol{\beta} = \left\{ \beta_j = \exp(s_j) : j \in J \right\}, \quad F_\Lambda(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = T_\Lambda(r,s,t);$

Конец описания алгоритма Reduction

Для решения на Шаге 2 пары взаимно двойственных задач (8) и (9) транспортного типа известно множество эффективных алгоритмов на основе симплекс-метода [18]. Однако специальный вид ограничений позволяет предложить более эффективный алгоритм. Приведем его описание.

Алгоритм LD_Finder

Вход: $I, J, \boldsymbol{L} = \left\{ l_{ij} : i \in I,\ j \in J \right\}$;

Выход: $\boldsymbol{r} = \left\{ r_i : i \in I \right\}, \quad \boldsymbol{s} = \left\{ s_j : j \in J \right\}, \quad \boldsymbol{t} = \left\{ \left(t_{ij}, t_{ji} \right) : \boldsymbol{i} \in I, j \in J \right\}, \quad T_\Lambda(r,s,t).$

Шаг 1. (Построение матрицы $\hat{\boldsymbol{L}}$). Для каждой строки $i \in I$ матрицы $\boldsymbol{L}$ выполнить шаги 1.1, 1.2 и 1.3, затем перейти на шаг 2.

Шаг 1.1. Построить отсортированную строку

$$L[i] = \left\{ l_{ij^{(k)}}^{(k)} : k = 1, 2, \ldots, |J|,\ j^{(k)} \in J, \quad l_{ij^{(1)}}^{(1)} \le l_{ij^{(2)}}^{(2)} \le \ldots \le l_{ij^{(|j|)}}^{(|J|)} \right\}.$$

Шаг 1.2. Положить $k_- = \left\lfloor \dfrac{|J|+1}{2} \right\rfloor,\ k_+ = \left\lceil \dfrac{|J|+1}{2} \right\rceil,\ r_i = \dfrac{l_{ij^{(k_+)}}^{(k_+)} + l_{ij^{(k_-)}}^{(k_-)}}{2}.$

Шаг 1.3. Для $k = 1, 2, \ldots, |J|$ положить $\hat{l}_{ij^{(k)}}^{(k)} = l_{ij^{(k)}}^{(k)} - r_i$.

Шаг 2. (Построение матрицы $\tilde{\boldsymbol{L}}$). Для каждого столбца $j \in J$ матрицы $\hat{\boldsymbol{L}}$ выполнить шаги 2.1, 2.2 и 2.3, затем перейти на шаг 3.

Шаг 2.1. Построить отсортированный столбец

$$\hat{L}[*][j] = \left\{ \hat{l}_{i^{(k)}j}^{(k)} : k = 1, 2, \ldots, |J|,\ j^{(k)} \in J, \quad \hat{l}_{i^{(1)}j}^{(1)} \le \hat{l}_{i^{(2)}j}^{(2)} \le \ldots \le \hat{l}_{i^{(|I|)}j}^{(|I|)} \right\}.$$

Шаг 2.2. Положить $k_- = \left\lfloor \dfrac{|I|+1}{2} \right\rfloor,\ k_+ = \left\lceil \dfrac{|I|+1}{2} \right\rceil,\ s_j = \dfrac{\hat{l}_{i^{(k_+)}j}^{(k_+)} + \hat{l}_{i^{(k_-)}j}^{(k_-)}}{2}.$

Шаг 2.3. Для $k = 1, 2, \ldots, |J|$ положить $\tilde{l}_{i^{(k)}j}^{(k)} = \hat{l}_{i^{(k)}j}^{(k)} - s_j$.

Шаг 3. (Построение матрицы $\boldsymbol{T}$). Для всех $i \in I, j \in J$ выполнить шаг 3.1, затем перейти на шаг 4.

Шаг 3.1. Если $\tilde{l}_{ij} > 0$, то положить $\{t_{ij} = \tilde{l}_{ij}, t_{ji} = 0\}$, иначе положить $\{t_{ji} = -\tilde{l}_{ij}, t_{ij} = 0\}$.

Шаг 4. (Нормирование). Выполнить шаги 4.1, 4.2 и 4.3, затем перейти на шаг 5.

Шаг 4.1. Вычислить $c = \dfrac{\max\limits_{i \in I} r_i - \max\limits_{j \in J} s_j}{2}$.

Шаг 4.2. Для всех $k \in I$ положить $r_i = r_i - c$.

Шаг 4.3. Для всех $j \in J$ положить $s_j = s_j + c$.

Шаг 5. Вычислить $T_\Lambda(r,s,t) = \sum\limits_{i \in I,\ j \in J} (t_{ij} + t_{ji})$.

Конец описания алгоритма LD_Finder.

Теорема. Алгоритм **LD_Finder** строит оптимальное решение задачи (10). Его вычислительная сложность не превосходит величины $O(|I| \cdot |J| \cdot \log(|I| \cdot |J|))$.

Доказательство. Очевидно, что решение (r,s,t), построенное алгоритмом **LD_Finder,** удовлетворяет всем ограничениям задачи (10). С другой стороны, задача (9) имеет целочисленное оптимальное решение [18], т. е. в оптимальном решении для всех $i \in I, j \in J$ имеет место включение $g_{ij} \in \{-1,0,1\}$. Будем строить решение $\{g_{ij} : i \in I, j \in J\}$ задачи (9) используя условия комплиментарности (дополняющей нежесткости) относительно решения (r,s,t), т. е. положим

(1) $g_{ij} = -1$ для всех $i \in I, j \in J$ таких, что $t_{ij} = 0, t_{ji} > 0$;

(2) $g_{ij} = 1$ для всех $i \in I, j \in J$ таких, что $t_{ji} = 0, t_{ij} > 0$;

(3) $g_{ij} = 0$ для всех $i \in I, j \in J$ таких, что $t_{ij} = t_{ji} = 0$.

Легко заметить, что построенное решение $\{g_{ij} : i \in I, j \in J\}$ является допустимым решением задачи (9). Из второй теоремы двойственности в линейном программировании следует, что (r,s,t) и $\{g_{ij} : i \in I, j \in J\}$ являются оптимальными решениями задач (10) и (9) соответственно.

Перейдем к оценке вычислительной сложности. Тело Шага 1 содержит сортировку элементов строки (вычислительная сложность $O(|J| \cdot \log |J|)$) и пересчет ее элементов (вычислительная сложность $O(|J|)$). Следовательно, вычислительная сложность Шага 1 не будет превосходить величины $O(|I| \cdot |J| \cdot \log(|J|))$. Аналогичные рассуждения относительно Шага 2 приводят к справедливости утверждения, что вычислительная сложность Шага 2 не будет превосходить величины $O(|I| \cdot |J| \cdot \log(|I|))$. Поэтому суммарная вычислительная сложность Шагов 1 и 2 не будет превосходить величины $O(|I| \cdot |J| \cdot \log(|I| \cdot |J|))$. Шаг 3 состоит в вычислении значений элементов матрицы T_Λ, его вычислительная сложность не превосходит величины $O(|I| \cdot |J|)$. Шаг 4 состоит в пересчете элементов столбца r и строки $\boldsymbol{s^T}$. Его вычислительная сложность $O(|I| + |J|)$. Шаг 5 состоит в суммировании элементов матрицы T_Λ, его вычислительная сложность также не превосходит величины $O(|I| \cdot |J|)$. Таким образом, вычислительная сложность алгоритма не превосходит величины $O(|I| \cdot |J| \cdot \log(|I| \cdot |J|))$.

Теорема доказана.

Рассмотрим пример выполнения алгоритма LD_Finder.

В следующей далее табл. 1 приведена исходная матрица $\boldsymbol{L}$. Рядом со значением каждого элемента в скобках указан его порядковый номер в отсортированном в порядке возрастания списке элементов соответствующей строки. В последнем столбце приведены значения элементов вектора $\boldsymbol{r}$.

Таблица 1

Матрица L						$\boldsymbol{r}$
1(1)	4(4)	3(3)	2(2)	5(5)	6(6)	(4+3)/2 = 3,5
7(5)	3(2)	5(4)	9(6)	1(1)	3(3)	(5+3)/2 = 4
11(5)	13(6)	9(4)	7(3)	5(2)	1(1)	(9+7)/2 = 8
13(4)	15(5)	11(3)	17(6)	9(2)	7(1)	(13+11)/2 = 12
19(5)	21(6)	17(4)	13(3)	11(2)	9(1)	(13+17)/2 = 15

В табл. 2 приведены значения элементов матрицы $\hat{\boldsymbol{L}}$, вычисленные на шаге 1. Рядом со значением каждого элемента в скобках указан его порядковый номер в отсортированном в порядке возрастания списке элементов соответствующего столбца. В последней строке приведены значения элементов вектора $\boldsymbol{s}$.

Таблица 2

Матрица $\hat{L}$						
–2,5(1)	0,5(2)	–0,5(2)	–1,5(2)	1,5(5)	2,5(5)	
3(3)	–1(1)	1(3)	5(4)	–3(4)	–1(4)	
3(4)	5(4)	1(4)	–1(3)	–3(3)	–7(1)	
1(2)	3(3)	–1(1)	5(5)	–3(2)	–5(3)	
4(5)	6(5)	2(5)	–2(1)	–4(1)	–6(2)	
3	3	1	–1	–3	–5	$\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{T}}$

В табл. 3 приведены значения элементов матрицы $\tilde{\boldsymbol{L}}$, вычисленные на шаге 2. Величины данных элементов равны невязкам в представлении соответствующих элементов матрицы $\boldsymbol{L}$. Значение c, вычисленное на шаге 4, равно $c = \dfrac{r_5 - s_1}{2} = \dfrac{15-3}{2} = 6$. Последние столбец и строка табл. 3 содержат модифицированные на шаге 4 векторы r и s^T соответственно

Таблица 3

Матрица $\tilde{L}$						$\boldsymbol{r}$
–5,5	–2,5	–1,5	–0,5	4,5	7,5	–2,5
0	–4	0	6	0	–4	–2
0	2	0	0	0	–2	2
–2	0	–2	6	0	0	6
1	3	1	–1	–1	–1	9
9	9	7	5	3	4	$\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{T}}$

В табл. 4 приведены значения элементов матрицы $\boldsymbol{r} \oplus \boldsymbol{s}^{\boldsymbol{T}}$, являющейся образом матрицы $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}^{\boldsymbol{T}}$, в ней операции перемножения элементов столбца $\boldsymbol{A}$ и строки $\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{T}}$ соответствует операция сложения логарифмов элементов (т. е. матриц $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{T}}$). Легко проверить, что $\boldsymbol{L} - (\boldsymbol{r} \oplus \boldsymbol{s}^{\boldsymbol{T}}) = \tilde{\boldsymbol{L}}$.

Таблица 4

Матрица $\boldsymbol{r} \oplus \boldsymbol{s}^{\boldsymbol{T}}$					
6,5	6,5	4,5	2,5	0,5	–1,5
7	7	5	3	1	–1
11	11	9	7	5	3
15	15	13	11	9	7
18	18	16	14	12	10

Заключение

Рассмотренный в данной работе алгоритм решает задачу аппроксимации блоков матрицы с положительными элементами матрицей единичного ранга, т. е. в виде произведения столбца на строку. Алгоритм имеет алгебраическую вычислительную сложность не более $O(|I| \cdot |J| \cdot \log(|I| \cdot |J|))$, где $|I|, |J|$ – размеры матрицы.

Литература

1. Tyrtyshnikov, E.E. Mosaic-skeleton approximations / E.E. Tyrtyshnikov // Calcolo. – 1996. – Vol. 33, no. 1. – P. 47–57.

2. Oseledets, I.V. Representation of quasi separable matrices using excluded sums and equivalent charges / I.V. Oseledets, A.Yu. Mikhalev // Linear Algebra Appl. – 2012. – Vol. 436. – Issue 3. – P. 699–708.

3. Bebendorf, M. Why finite element discretizations can be factored by triangular hierarchical matrices / M. Bebendorf // SIAM J. Numer. Anal. – 2007. – Vol. 45, no. 4. – P. 1472–1494.

4. Börm, S. Approximation of solution operators of elliptic partial differential equations by-and-matrices / S. Börm // Numerische Mathematik. – 2010. – Vol. 115, no. 2. – P. 165–193.

5. Bebendorf, M. Existence of *H*-matrix approximants to the inverse FE-matrix of elliptic operators with L_∞-coefficients / M. Bebendorf, W. Hackbusch // Numer. Math. – 2003. – Vol. 95, no. 1. – P. 1–28

6. Sushnikova, D.A. Preconditioners for hierarchical matrices based on their extended sparse form / D.A. Sushnikova, I.V. Oseledets // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. – 2016. – Т. 31. – С. 29–40.

7. Numerical solution of diffraction problems using large matrix compression / G.V. Ryzhakov, A.Y. Mikhalev, D.A. Sushnikova, I.V. Oseledets // 9th European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP). – 2015. – С. 1–3.

8. Ford, J.M. Matrix approximations and solvers using tensor products and non-standard wavelet transforms related to irregular grids / J.M. Ford, I.V. Oseledets, E.E. Tyrtyshnikov // Rus. J. Numer. Anal. and Math. Modelling. – 2004. – Vol. 19(2). – С. 185–204.

9. Оселедец, И.В. Применение нелинейных методов аппроксимации для быстрого решения задачи о распространении звука в мелком море / И.В. Оселедец, Д.В. Савостьянов, С.Л. Ставцев // Методы и технологии решения больших задач: сб. науч. тр. – ИВМ РАН, 2004. – С. 171–192.

10. Башуров, В.В. Моделирование задач высокоскоростного проникания в лагранжевых координатах / В.В. Башуров, С.К. Бурученко // Матем. моделирование. – Т. 4, № 9. – 1992. – С. 37–42.

11. Ушаков, А.Л. Быстрое решение модельной задачи для уравнения Пуассона / А.Л. Ушаков // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2017. – Т. 9, № 4. – С. 36–42.

12. Сушникова, Д.А. Приложение блочно-малоранговых матриц для задачи регрессии на основе гауссовских процессов / Д.А. Сушникова // Вычислительные методы и программирование. – 2017. – Т. 18. – С. 214–220.

13. Panyukov, A.V. Forming of Discrete Mechanical Assembly Production Program / A.V. Panyukov, V.A. Teleghin // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2015. – № 2. – С. 57–64.

14. Panyukov, A.V. The Spectral Statistical Method for Determining the Location Parameters of a Dipole Source of Electromagnetic Radiation / A.V. Panyukov, A.K. Bogushov // Radiophysics and Quantum Electronics. – 2016. – Vol. 59. – P. 278–288.

15. Панюков, А.В. Взаимосвязь взвешенного и обобщенного вариантов метода наименьших модулей / А.В. Панюков, А.Н. Тырсин // Известия Челябинского научного центра. – 2007. – № 1(35). – С. 6–11.

16. Panyukov, A.V. Linkage between wlad and glad and its applications for autoregressive analysis / A.V. Panyukov, I.A. Tetin, Ya.A. Mezal // Proceedings of the 4th International Conference “Information Technologies for Intelligent Decision Making Support (ITIDS'2016)”. – 2016. – С. 224–227.

17. Лакеев, А.В. Метод наименьших модулей для линейной регрессии: число нулевых ошибок аппроксимации / А.В. Лакеев, С.И. Носков // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2012. – № 2. – С. 48–50.

18. Емеличев, В.А. Многогранники, графы, оптимизация / В.А. Емеличев, М.М. Ковалев, М.К. Кравцов. – М.: Наука, 1981. – 341 с.

Поступила в редакцию 5 января 2018 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2018, vol. 10, no. 2, pp. 28–36

DOI: 10.14529/mmph180203

APPROXIMATION OF THE MATRIX WITH POSITIVE ELEMENTS BY THE SINGLE RANK MATRIX

A.V. Panyukov, Kh.Z. Chaloob, Ya.A. Mezal
South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E-mail: paniukovav@susu.ru

Most of the modern mathematical methods for solving problems of science, technology, and economics require the solution of linear problems of large dimension. To reduce the computational complexity, a special structure of matrices corresponding to these problems is used. Block-low-rank matrices represent the approximation with good accuracy of dense matrices in a low-parametric format. Blocks of small rank are represented as a product of matrices of smaller sizes. This allows you to significantly save computer memory. Approximate factorization methods for block-low-rank matrices can be used for approximate solution and preconditioning of systems with dense matrices in aero-, hydro- and electrodynamics problems, as well as in applied statistics and logistics. To build low-parametric representations of matrices based on small-rank approximations of individual blocks, algebraic methods are widely used. In this paper we consider an effective method for approximating blocks of a matrix with positive elements by a single rank matrix, i.e. in the form of a product of a column per line. The solution of the problem is sought among the admissible representations that minimize the average modulus of the logarithms of the ratio of an approximate representation of an element to the exact value. The approximating problem is reduced to the problem of linear programming, for which the dual problem is the task of building a circulation of the minimum value in a complete bipartite graph with the throughputs of all arcs equal to one. To solve this problem, we propose an algorithm that has a computational complexity of at most of $O(|I|\cdot|J|\cdot\log(|I|\cdot|J|))$, where I is the set of rows in the block, and J is the set of columns to the block.

Keywords: matrix; low-rank approximation; linear programming; algorithm; computational complexity.

References

1. Tyrtyshnikov E.E. Mosaic-skeleton approximations. *Calcolo*, 1996, Vol. 33, Issue 1–2, pp. 47–57. DOI: 10.1007/BF02575706

2. Oseledets I.V., Mikhalev A.Yu. Representation of quasi separable matrices using excluded sums and equivalent charges. *Linear Algebra Appl.*, 2012, Vol. 436, Issue 3, pp. 699–708. DOI: 10.1016/j.laa.2011.07.041

3. Bebendorf M. Why finite element discretizations can be factored by triangular hierarchical matrices. *SIAM J. Numer. Anal.*, 2007, Vol. 45, no. 4, pp. 1472–1494. DOI: 10.1137/060669747

4. Börm S. Approximation of solution operators of elliptic partial differential equations by-and-matrices. *Numerische Mathematik*, 2010, Vol. 115, Issue 2, pp. 165–193. DOI: 10.1007/s00211-009-0278-7

5. Bebendorf M., Hackbusch W. Existence of *H*-matrix approximants to the inverse *FE*-matrix of elliptic operators with L_∞-coefficients. *Numer. Math.*, 2003, Vol. 95, Issue. 1, pp. 1–28. DOI: 10.1007/s00211-002-0445-6

6. Sushnikova D.A., Oseledets I.V. Preconditioners for hierarchical matrices based on their extended sparse form. *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*, 2016, Vol. 31, pp. 29–40. DOI: 10.1515/rnam-2016-0003

7. Ryzhakov G.V., Mikhalev A.Y., Sushnikova D.A., Oseledets I.V. Numerical solution of diffraction problems using large matrix compression. *9th European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP)*, 2015, pp. 1–3.

8. Ford J.M., Oseledets I.V., Tyrtyshnikov E.E., Matrix approximations and solvers using tensor products and non-standard wavelet transforms related to irregular grids. *Rus. J. Numer. Anal. and Math. Modelling*, 2004, Vol. 19(2), pp. 185–204. DOI: 10.1515/156939804323089334

9. Oseledets I.V., Savost'yanov D.V., Stavtsev S.L. Primenenie nelineynykh metodov approksimatsii dlya bystrogo resheniya zadachi o rasprostranenii zvuka v melkom more (The use of non-linear approximation method to quickly solve the problem of sound propagation in shallow water). *Metody i tekhnologii resheniya bol'shikh zadach: sb. nauch. tr.* (Methods and technologies for solving large problems: a collection of scientific papers), IVM RAN Publ., 2004, pp. 171–192. (in Russ.).

10. Bashurov V.V., Buruchenko S.K. Modelirovanie zadach vysokoskorostnogo pronikaniya v lagranzhevykh koordinatakh (Lagrangian computation of high velocity deep penetration). *Matem. Mod.*, 1992, Vol. 4, no. 9, pp. 37–42. (in Russ.).

11. Ushakov A.L. Fast Solution of the Model Problem for Poisson's Equation. *Bulletin of the South Ural State University. Series of "Mathematics. Mechanics. Physics"*, 2017, Vol. 9, no. 4, pp. 36–42. (in Russ.).

12. Sushnikova D.A. Prilozhenie blochno-malorangovykh matrits dlya zadachi regressii na osnove gaussovskikh protsessov (Application of block low-rank matrices in Gaussian processes for regression). *Vychisl. Metody Programm.*, 2017, Vol. 18, Issue 3, pp. 214–220. (in Russ.).

13. Panyukov A.V., Teleghin V.A. Forming of Discrete Mechanical Assembly Production Program. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2015, no. 2, pp. 57–64.

14. Panyukov A.V., Bogushov A.K. The Spectral Statistical Method for Determining the Location Parameters of a Dipole Source of Electromagnetic Radiation. *Radiophysics and Quantum Electronics*, 2016, Vol. 59, pp. 278–288. DOI: 10.1007/s11141-016-9696-4

15. Panyukov A.V., Tyrsin A.N. Vzaimosvyaz' vzveshennogo i obobshchennogo variantov metoda naimen'shikh moduley (Interrelation of weighted and generalized variants of the method of least moduli). *Izvestiya Chelyabinskogo nauchnogo tsentra*, 2007, no. 1(35), pp. 6–11. (in Russ.).

16. Panyukov A.V., Tetin I.A., Mezal Ya.A. Linkage between wlad and glad and its applications for autoregressive analysis. *Proc. 4th Int. Conf. "Information Technologies for Intelligent Decision Making Support (ITIDS'2016)"*, 2016, C. 224–227. (in Russ.).

17. Lakeyev A.V., Noskov S.I. The Least Modulus Method for the Linear Regression: the Number of Zero Approximation. *Sovremennyye tekhnologii. Sistemnyy analiz. Modelirovaniye* (Modern Technologies System Analysis Modeling), 2012, no. 2, pp. 48–50. (in Russ.).

18. Yemelichev V.A., Kovalev M.M., Kravtsov M.K., Lawden G. *Polytopes, graphs and optimization*. Cambridge University Press, NY, USA, 1986, 344 p.

Received January 5, 2018