УДК 517.9 **DOI: 10.14529/mmph180301**

ОБ ОБОБЩЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА НА ГРАФЕ

А.А. Баязитова
Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация
E-mail: balfiya@mai.ru

На геометрическом графе рассматривается краевая задача, где помимо условий непрерывности и баланса потоков, впервые вводится условие неподвижности в вершине графа, которое превращается в условие Дирихле, когда граф содержит одно ребро с двумя вершинами. При решении этой задачи сначала рассматривается соответствующая задача Штурма–Лиувилля, а затем полученные результаты применяются для решения задачи Коши двух линейных моделей, заданных на графе: уравнения Хоффа и уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной. Особенностью работы является и тот факт, что на каждом ребре графа задаются уравнения с различными коэффициентами, что вкупе с введением неподвижных вершин графа является впервые рассматриваемой задачей.

Обе модели относятся к уравнениям соболевского типа, изучение которых переживает эпоху своего расцвета. Проведенная редукция этих уравнений к абстрактному уравнению соболевского типа позволила применить метод вырожденных полугрупп операторов. Найдено фазовое пространство решений методом фазового пространства, заключающимся в сведении сингулярного уравнения к определенному на некотором подпространстве исходного пространства регулярному уравнению. Полученные результаты теорем могут быть применены при рассмотрении обратных задач, задач оптимального управления, начально-конечных и многоточечных задач, а также при рассмотрении стохастических уравнений для моделей, заданных на геометрическом графе.

Ключевые слова: модели соболевского типа; уравнения на графе; метод фазового пространства.

Введение

Уравнение Баренблатта–Желтова–Кочиной [1]

$$(\lambda-\Delta)u_t=\alpha\Delta u+f \tag{1}$$

моделирует процессы фильтрации жидкости в трещинновато-пористых средах, влагопереноса в почве [2], а также теплопроводности в среде с «двумя температурами» [3].

Уравнение Хоффа [4]

$$(\lambda+\Delta)u_t=\alpha u+f \tag{2}$$

моделирует выпучивание двутавровой балки под воздействием высоких температур.
Обе модели относятся к уравнениям соболевского типа, изучение которых переживает эпоху своего расцвета. Уравнения (1), (2) в различных аспектах изучены в [5–7]. Особенностями нашего подхода будут активное использование теории относительно ограниченных операторов и порождаемых ими вырожденных голоморфных групп операторов [8, гл. 3].

В данной работе впервые изучаются уравнения соболевского типа на графах с более общими условиями в вершинах графа, что является обобщением полученных ранее результатов, например, [9]. Приведены примеры решения задачи Коши для линейных уравнений Хоффа и Баренблатта–Желтова–Кочиной при более общих предположениях на коэффициенты уравнений. В заключительной части статьи намечены направления дальнейших возможных исследований. Список литературы соответствует лишь вкусам автора и не является полным.

1. Функциональные пространства и дифференциальные операторы на графе

Рассмотрим конечный связный ориентированный граф $G = G(\mathfrak{B};\mathfrak{E})$ с множеством вершин $\mathfrak{B} = \{V_i\}$ и множеством ребер (дуг) $\mathfrak{E} = \{E_j\}$. Каждая дуга снабжена параметрами: длиной $l_j > 0$ и шириной $d_j > 0$. Рассмотрим задачу с краевыми условиями:

$$u_j(0,t) = u_k(l_k,t), E_j, E_k \in E^{\alpha}(V_i^{'}) \cup E^{\omega}(V_i^{'}), \tag{3}$$

$$\sum\nolimits_{E_j \in E^{\alpha}(V_i^{'})} d_j u_{jx}(0,t) - \sum\nolimits_{E_j \in E^{\omega}(V_i^{'})} d_k u_{kx}(0,t) = 0, \tag{4}$$

$$u_j(0,t) = u_k(l_k,t) = 0, E_j, E_k \in E^{\alpha}(V_i^{"}) \cup E^{\omega}(V_i^{"}) \tag{5}$$

для уравнений на графе G

$$a_j u_j - u_{jxx} = f. \tag{6}$$

Здесь через $\mathfrak{B}^{'} = \{V_i^{'}\}$ обозначено множество «подвижных» вершин графа, а через $\mathfrak{B}^{"} = \{V_i^{"}\}$ – множество «неподвижных» вершин графа, через $E^{\alpha(\omega)}(V_i)$ обозначено множество дуг, у которых начало дуги (конец дуги) в вершине V_i.

Условие (3) соответствует требованиям непрерывности всех решений в вершинах графа, а условие (4) является аналогом условия Кирхгоффа и означает, что поток через каждую вершину графа должен равняться нулю (соответствует условию Неймана в случае, когда заданный граф состоит из единственной дуги с двумя подвижными вершинами), условие (5) – условие неподвижности решения в вершинах графа $\mathfrak{B}^{"} = \{V_i^{"}\}$.

Определение. Вектор-функцию $u = (u_1, u_2, ..., u_j, ...)$ такую, что $u_j \in C^2(0,l_j) \cap C^1[0,l_j]$, назовем решением задачи (3)–(6), если она удовлетворяет уравнению (6) и краевым условиям (3)–(5).

Через $L_2(G)$ обозначим пространство $L_2(G) = \{g = (g_1, g_2, ..., g_j, ...): g_j \in L_2(0,l_j)\}$, это гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle g,h \rangle \geq \sum_{j:E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} g_j(x) h_j(x) dx$. Через $\mathfrak{U}$ обозначим гильбертово пространство $\mathfrak{U} = \{u = (u_1, u_2, ..., u_j, ...)$: $u_j \in W_2^1(0,l_j)$ и выполнены (4), (5)} со скалярным произведением $[u,v] = \sum_{j:E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} (u_{jx}(x) v_{jx}(x) + u_j(x) v_j(x)) dx$.

В пространстве $W_2^1(0,l_j)$ абсолютно непрерывные функции согласно теоремам вложения Соболева, поэтому следует корректное определение, полнота и компактное вложение в $L_2(G)$ пространства $\mathfrak{U}$. Отождествим в силу гильбертовости $L_2(G)$ со своим сопряженным пространством, и введем сопряженное относительно двойственности $\langle \cdot,\cdot \rangle$ пространство $\mathfrak{F}$ к $\mathfrak{U}$. Легко заметить, что $\mathfrak{F}$ тоже является гильбертовым пространством с компактным вложением $\mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$.

Умножим (6) скалярно на υ, где $\langle \cdot,\cdot \rangle$ – скалярное произведение в $L_2(G)$, тогда $\langle Au, \upsilon \rangle = \langle f, \upsilon \rangle$, где $\langle Au, \upsilon \rangle \geq \sum_{j:E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} (-u_{jxx} \upsilon_j + a_j u_j \upsilon_j) dx$.

Интегрируя по частям и используя условия (3)–(5), получим

$$\langle Au, \upsilon \rangle \geq \sum\nolimits_{j:E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} (u_{jx} \upsilon_{jx} + a_j u_j \upsilon_j) dx.$$

Как нетрудно заметить, оператор A самосопряжен, положительно определен и является топлинейным изоморфизмом пространств $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$. Ввиду компактности вложения $\mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ спектр $\sigma(A)$ оператор A положителен, дискретен, конечнократен и сгущается только к $+\infty$.

2. Редукция уравнения Хоффа и уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной

На каждом ребре E_j зададим линейное уравнение Хоффа

$$\lambda_j u_{jt} + u_{jxxt} = \alpha_j u_j, \tag{7}$$

описывающее процесс выпучивания двутавровой балки, где параметр $\lambda_j \in \mathbb{R}_+$ характеризует нагрузке на балку, параметры $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$ характеризуют свойства материала балки, переменные $x \in (0, l_j)$ соответствуют натуральному параметру дуги, $t \in \mathbb{R}$, и линейное уравнение Баренблатта–Желтова–Кочиной

$$\lambda_j u_{jt} - u_{jxxt} = \alpha_j u_{jxx}, \tag{8}$$

описывающее динамику давления жидкости, фильтрующейся в трещиновато-пористой среде, а также процессы влагопереноса в почве и теплопроводности в среде с «двумя температурами», где параметры $\lambda_j, \alpha_j \in \mathbb{R}$ характеризуют свойства среды, переменные $x \in (0, l_j), t \in \mathbb{R}$.

Под краевой задачей понимается поиск вектор-функции $u = (u_1, u_2, ..., u_j, ...)$, каждая компонента которой $u_j = u_j(x,t)$ удовлетворяет уравнению (7) или (8) на ребре E_j, а в вершинах компоненты удовлетворяют условиям (3)–(5).

Будем для этих моделей рассматривать задачу с начальными условиями Коши

$$u_j(x,0) = u_{j0}(x), x \in (0, l_j). \tag{9}$$

Для редукции уравнения Хоффа к линейному абстрактному уравнению соболевского типа построим операторы $L, M : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$

$$\langle Lu, \upsilon \rangle \geq \sum_j d_j (\lambda_j + a_j) \int_0^{l_j} u_j \upsilon_j dx - \langle Au, \upsilon \rangle, \tag{10}$$

$$\langle Mu, \upsilon \rangle \geq \sum_j \alpha_j d_j \int_0^{l_j} u_j \upsilon_j dx, \tag{11}$$

а для редукции уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной

$$\langle Lu, \upsilon \rangle \geq \sum_j d_j (\lambda_j - a_j) \int_0^{l_j} u_j \upsilon_j dx + \langle Au, \upsilon \rangle, \tag{12}$$

$$\langle Mu, \upsilon \rangle \geq -\sum_j \alpha_j d_j \int_0^{l_j} u_{jx} v_{jx} dx. \tag{13}$$

Очевидно, что рассмотренные в (10)–(13) операторы $L, M \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U} \simeq \mathfrak{F})$ (т. е. линейные и непрерывны), причем операторы L фредгольмовы (т. е. $\operatorname{ind} L = 0$), а операторы M компактны.

Таким образом мы редуцировали задачу Коши (9) с краевыми условиями (3)–(5) для уравнений (7), (8) к задаче Коши

$$u(0) = u_0 \tag{14}$$

для абстрактного линейного уравнения соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu. \tag{15}$$

3. Фазовое пространство уравнения Хоффа и уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ – банаховы пространства, операторы $L, M \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ (т. е. линейны и ограничены). Множества $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U})\}$ и $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$ назовем *резольвентным множеством* и L*-спектром оператора* M соответственно. Оператор M назовем (L, σ)*-ограниченным*, если

$$\exists a \in \mathbb{R}_+ \ \forall \mu \in \mathbb{C}(|\mu| > a) \Rightarrow (\mu \in \rho^L(M)).$$

Если оператор $(L, 0)$-ограничен, то существуют проекторы

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma R_\mu^L(M) d\mu \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U}), \quad Q = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma L_\mu^L(M) d\mu \in \mathfrak{L}(\mathfrak{F}).$$

Здесь $R_{\mu}^{L}(M)=(\mu L-M)^{-1}L$ – *правая*, а $L_{\mu}^{L}(M)=L(\mu L-M)^{-1}$ – *левая L-резольвенты оператора* M; контур $\gamma=\{\mu\in C:|\mu|=r>a\}$. Контурные интегралы здесь и ниже понимаются в смысле Римана. Введем в рассмотрение подпространства $\mathfrak{U}^0=\ker P$, $\mathfrak{U}^1=\operatorname{im}P$, $\mathfrak{F}^0=\ker Q$, $\mathfrak{F}^1=\operatorname{im}Q$ и обозначим через $L_k(M_k)$ сужение оператора $L(M)$ на $\mathfrak{U}^k\left(\mathfrak{U}^k\bigcap\operatorname{dom}\right)$, $k=0{,}1$. Справедлива

Теорема 3.1. [8] *Пусть оператор* M (L,σ)*-ограничен. Тогда*

(i) оператор $L_k\in\mathfrak{L}\left(\mathfrak{U}^k;\mathfrak{F}^k\right)$, $k=0{,}1$*; причем существует оператор* $L_1^{-1}\in\mathfrak{L}\left(\mathfrak{F}^1;\mathfrak{U}^1\right)$;

(ii) оператор $M_k\in Cl\left(\mathfrak{U}^k;\mathfrak{F}^k\right),k=0{,}1$*; причем существует оператор* $M_0^{-1}\in\mathfrak{L}\left(\mathfrak{F}^0;\mathfrak{U}^0\right)$.

Пусть оператор M (L,σ)-ограничен, построим оператор $H=M_0^{-1}L_0\in\mathfrak{L}\left(\mathfrak{U}^0\right)$. Оператор M назовем (L,p)*-ограниченным,* $p\in\mathbb{N}$ ($(L,0)$ *-ограниченным*), если $H^p\neq\mathbb{O}$, а $H^{p+1}=\mathbb{O}$ $(H=\mathbb{O})$.

Для уравнения Хоффа справедливо следующее утверждение.

Лемма 3.1 Оператор M $(L,0)$-ограничен (10), (11) в случае выполнения одного из условий:

(i) тривиальное ядро оператора $\ker L=\{0\}$;

(ii) нетривиальное ядро оператора $\ker L\neq\{0\}$, коэффициенты $\alpha_j\neq0$ при любом j и все α_j имеют одинаковый знак.

Доказательство. Очевидность утверждения (i) следует из существования оператора $L^{-1}\in\mathfrak{L}(\mathfrak{U}\simeq\mathfrak{F})$. Пусть $\ker L\neq\{0\}$ и $\alpha_j\in\mathbb{R}_+$. Тогда билинейная форма

$$[h,g]=\sum_j\alpha_j d_j\int_0^{l_j}h_j g_j dx$$

задает эквивалентное $\langle\cdot,\cdot\rangle$ скалярное произведение в $L_2(G)$. Оператор L фредгольмов, т. е. $co\dim\operatorname{im}L=\dim\ker L$ и ядро $\ker L$ ортогонально относительно $\langle\cdot,\cdot\rangle$ образу $\operatorname{im}L$. Пусть вектор $\psi\in\ker L/\{0\}$, рассмотрим

$$\langle M\psi,\psi\rangle\geq\sum_j\alpha_j d_j\int_0^{l_j}\psi_j^2dx=[\psi,\psi]>0.$$

Следовательно, $M\psi\neq\operatorname{im}L$ для любого вектора $\psi\in\ker L\setminus\{0\}$, что означает отсутствие L-присоединенных векторов для вектора $\psi\in\ker L\setminus\{0\}$, что доказывает утверждение леммы в случае $\alpha_j\in\mathbb{R}_+$. Если же $\alpha_j\in\mathbb{R}_-$, то для леммы доказательство аналогично.

Для уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной справедливо утверждение.

Лемма 3.2. Оператор M $(L,0)$-ограничен (12), (13) в случае выполнения одного из двух условий

(i) тривиальности ядра $\ker L=\{0\}$;

(ii) ядро оператора нетривиально $\ker L\neq\{0\}$, а для коэффициентов выполняются условия $\alpha_j\neq0$ при любом j, все α_j с одинаковым знаком, $\lambda_j\neq0$ при любом j и все λ_j имеют одинаковый знак.

Доказательство. Утверждение (i) следует из существования оператора $L^{-1}\in\mathfrak{L}(\mathfrak{U}\simeq\mathfrak{F})$. Если же $\ker L\neq\{0\}$ и $\alpha_j\in\mathbb{R}_+$, то при векторе $\psi\in\ker L/\{0\}$ получим

$$\langle M\psi,\psi\rangle\geq-\sum_j\alpha_j d_j\int_0^{l_j}\psi_{jx}^2dx\leq0,$$

равенство $\langle M\psi,\psi\rangle\geq0$ выполняется только при $\psi_x=\left(\psi_{1x},\psi_{2x},...,\psi_{jx},...\right)\equiv0$, а $\langle L\psi,\psi\rangle\geq\sum_j d_j\int_0^{l_j}\left(\lambda_j\psi_j^2+\psi_{jx}^2\right)dx=\sum_j d_j\int_0^{l_j}\lambda_j\psi_j^2dx\neq0$ при $\lambda_j\neq0$ при любом j и все λ_j имеют одинаковый знак и $\psi \neq 0$. Это приводит к противоречию с тем, что $\psi \in \ker L/\{0\}$, поэтому $\langle M\psi,\psi\rangle < 0$ при $\psi \in \ker L/\{0\}$ и $\alpha_j \in \mathbb{R}_+$.

Получаем, что $M\psi \neq \operatorname{im} L$ для любого вектора $\psi \in \ker L \setminus \{0\}$, аналогично лемме 3.1 получаем, что ни один вектор $\psi \in \ker L \setminus \{0\}$ не имеет L-присоединенных векторов. Для случая $\alpha_j \in \mathbb{R}_+$ лемма доказана. Тот же самый результат получим при значениях $\alpha_j \in \mathbb{R}_-$.

Решением уравнения (15) называется вектор-функция $u = u(t)$, $t \in \mathbb{R}$, если она удовлетворяет этому уравнению. Решение $u = u(t)$ назовем *решением задачи Коши (14),* если оно удовлетворяет условию (14) при некотором $u_0 \in \mathfrak{U}$. *Фазовым пространством* уравнения (15) называется множество $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{U}$, если любое его решение $u(t) \in \mathfrak{B}$ при каждом $t \in \mathbb{R}$; и для любого $u_0 \in \mathfrak{B}$ существует единственное решение $u \in C^1(\mathbb{R};\mathfrak{U})$ задачи (14) для уравнения (15). Наконец, введем в рассмотрение вырожденную (если $\ker L \neq \{0\}$) голоморфную (во всей плоскости $\mathbb{C}$) группу операторов

$$U^t = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R_\mu^L(M) e^{\mu t} d\mu, \; t \in \mathbb{C}.$$

Заметим, что $U^0 = P$, причем $\ker P \supset \ker L$. Справедлива

Теорема 3.2. [8] *Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Тогда*

(i) любое решение $u \in C^1(\mathbb{R};\mathfrak{U})$ уравнения (15) имеет вид $u(t) = U^t u_0$, $t \in \mathbb{R}_+$, и некотором $u_0 \in \mathfrak{U}$;

(ii) фазовым пространством уравнения (15) служит подпространство $\mathfrak{U}^1$.

Итак, в условиях теоремы 3.2 L-резольвента $(\mu L - M)^{-1}$ оператора M в кольце $|\mu| > a$ разлагается в ряд Лорана

$$(\mu L - M)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{-k} S^{k-1} L_1^{-1} Q - \sum_{k=0}^{p} \mu^k H^k M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q),$$

где операторы $S = L_1^{-1} M_1 \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U}^1)$, $H = M_0^{-1} L_0 \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U}^0)$. Отсюда разрешающая вырожденная группа U^t уравнения (15) выглядит следующим образом:

$$U^t = (\mathbb{I} - Q) + e^{St} Q,$$

где

$$e^{St} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (\mu \mathbb{I} - S) e^{\mu t} d\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{St^k}{k!}$$

– группа операторов, заданная на фазовом пространстве $\mathfrak{U}^1$ уравнения (15).

Основным результатом статьи являются теоремы о разрешимости задачи Коши для линейных уравнений Хоффа и Баренблатта–Желтова–Кочиной.

Теорема 3.3 (уравнение Хоффа) *(i) Пусть $\ker L = \{0\}$. Тогда фазовым пространством уравнения (7) является все пространство $\mathfrak{U}$.*

(ii) Пусть $\ker L \neq \{0\}$, $\alpha_j \neq 0$ при любом j и все α_j имеют одинаковый знак. Тогда фазовым пространством уравнения (7) является подпространство $\mathfrak{U}^1$.

Теорема 3.4 (уравнение Баренблатта–Желтова–Кочиной) *(i) Пусть $\ker L = \{0\}$. Тогда фазовым пространством уравнения (8) является все пространство $\mathfrak{U}$.*

(ii) Пусть $\ker L \neq \{0\}$, $\alpha_j \neq 0$ при любом j и все α_j имеют одинаковый знак, $\lambda_j \neq 0$ при любом j и все λ_j имеют одинаковый знак. Тогда фазовым пространством уравнения (8) является подпространство $\mathfrak{U}^1$.

Заключение

Полученные результаты теорем могут быть применены при рассмотрении обратных задач, задач оптимального управления, начально-конечных и многоточечных задач, а также при рассмотрении стохастических уравнений для моделей (7), (8), заданных на геометрическом графе с условиями (3)–(5).

Литература

1. Баренблатт, Г.И. Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах / Г.И. Баренблатт, Ю.П. Желтов, И.Н. Кочина // Прикладная математика и механика. – 1960. – Т. 24, № 5. – С. 852–864.

2. Hallaire, M. Soil water movement in the film and vapor phase under the influence of evapotranspiration. Water and its conduction insoils / M. Hallaire // Proceedings of XXXVII Annual Meeting of the Highway Research Board, Highway Research Board Special Report. – 1958. – Vol. 40. – P. 88–105.

3. Chen, P.J. On a Theory of Heat Conduction Involving Two Temperatures / P.J. Chen, M.E. Gurtin // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik (ZAMP). – 1968. – Vol. 19. – Issue 4. – P. 614–627.

4. Hoff, N.J. Creep buckling / N.J. Hoff // The Aeronautical Quarterly. – 1956. – Vol. 7, no. 1. – P. 1–20.

5. Манакова, Н.А. Оптимальное управление решениями начально-конечной задачи для линейной модели Хоффа / Н.А. Манакова, А.Г. Дыльков // Матем. заметки. – 2013. – Т. 94, № 2. – Р. 225–236.

6. Сагадеева, М.А. Ограниченные решения модели Баренблатта–Желтова–Кочиной в квазисоболевых пространствах / М.А. Сагадеева, Ф.Л. Хасан // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2015. – Т. 8, № 4. – С. 132–139.

7. Kadchenko, S.I. Numerical research of the Barenblatt–Zheltov–Kochina stochastic model / S.I. Kadchenko, E.A. Soldatova, S.A. Zagrebina // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2016. – Vol. 9, no. 2. – P. 117–123.

8. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2003. – 216 p.

9. Баязитова, А.А. Задача Шоуолтера–Сидорова для модели Хоффа на геометрическом графе / А.А. Баязитова // Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика. – 2011. – Т. 4, вып. 1. – Р. 2–8.

Поступила в редакцию 13 июня 2018 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2018, vol. 10, no. 3, pp. 5–11

DOI: 10.14529/mmph180301

ON THE GENERALIZED BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR LINEAR SOBOLEV TYPE EQUATIONS ON THE GEOMETRIC GRAPH

A.A. Bayazitova
South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E-mail: balfiya@mai.ru

On the geometric graph, where in addition to the continuity conditions and balance flow, condition of immobility is first introduced into the vertices of the graph, which is converted to a Dirichlet condition when the graph has one edge with two vertices. To solve this problem we first consider the corresponding Sturm–Liouville problem, and the results are then used to solve the Cauchy problem for two linear models, defined on the graph: Hoff equation and Barenblatt–Zheltov–Kochina equation. A feature of the work is the fact that on each edge of the graph given by the equation with different coefficients, which coupled with the introduction of vertices, is fixed for the first time in this problem.

Both models relate to Sobolev type equations, the study of which is experiencing an era of its heyday. Reduction of these equations to an abstract Sobolev type equation makes it possible to apply the method of degenerate semigroups of operators. The phase space of solutions is determined by the phase space method, which consists in reducing the singular equation to a regular equation defined on some subspace of the original space. The obtained results of theorems can be used in consideration of inverse problems, optimal control problems, the initial-end and multipoint problems, and also in consideration of stochastic equations for the models set in a geometric graph.

Keywords: Sobolev type models; equations on graph; phase space method.

References

1. Barenblatt G.I., Zheltov Iu.P., Kochina I.N. Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks [strata]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1960, Vol. 24, Issue 5, pp. 1286–1303. DOI: 10.1016/0021-8928(60)90107-6

2. Hallaire M. Soil water movement in the film and vapor phase under the influence of evapotranspiration. Water and its conduction insoils. *Proc. XXXVII Annual Meeting of the Highway Research Board, Highway Research Board Special Report*, 1958, Vol. 40, pp. 88–105.

3. Chen P.J., Gurtin M.E. On a theory of heat conduction involving two temperatures. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, 1968, Vol. 19, Issue 4, pp. 614–627. DOI: 10.1007/BF01594969

4. Hoff N.J. Creep buckling. *The Aeronautical Quarterly*, 1956, Vol. 7, no. 1, pp. 1–20.

5. Manakova N.A., Dyl'kov A.G. Optimal control of the solutions of the initial-finish problem for the linear Hoff model. *Mathematical Notes*, 2013, Vol. 94, Issue 1–2, pp. 220–230. DOI: 10.1134/S0001434613070225

6. Sagadeeva M.A., Hasan F.L. Bounded solutions of Barenblatt–Zheltov–Kochina model in quasi-Sobolev spaces. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software*, 2015, Vol. 8, no. 4, pp. 138–144. (in Russ.). DOI: 10.14529/mmp150414

7. Kadchenko S.I., Soldatova E.A., Zagrebina S.A. Numerical research of the Barenblatt–Zheltov–Kochina stochastic model. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software*, 2016, Vol. 9, no. 2, pp. 117–123. DOI: 10.14529/mmp160211

8. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. *Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators*, VSP, Utrecht–Boston–Köln–Tokyo, 2003, 216 p. DOI: 10.1515/9783110915501

9. Bayazitova A.A. Zadacha Shouoltera–Sidorova dlya modeli Khoffa na geometricheskom grafe (The Showalter–Sidorov problem for the Hoff model on a geometric graph). *IIGU Ser. Matematika*, 2011, Vol. 4, no. 1, pp. 2–8. (in Russ.).

Received June 13, 2018