УДК 517.9 DOI: 10.14529/mmph180302

ЗАДАЧА СТАРТОВОГО УПРАВЛЕНИЯ И ФИНАЛЬНОГО НАБЛЮДЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ФИТЦ ХЬЮ–НАГУМО С УСЛОВИЕМ ДИРИХЛЕ–ШОУОЛТЕРА–СИДОРОВА

О.В. Гаврилова
Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация
E-mail: gavrilovaov@susu.ru

Исследуется стартовое управление и финальное наблюдение решениями задачи Дирихле–Шоуолтера–Сидорова для вырожденной системы уравнений Фитц Хью–Нагумо. Эта система относится к классу уравнений реакции-диффузии и описывает распространения волн в активных биологических средах, таких как сердечная мышца или мозговая ткань. Система уравнений Фитц Хью–Нагумо является, с одной стороны, развитием известной модели Колмогорова–Петровского–Пискунова, а с другой стороны – упрощением модели Ходжинса–Хаксли. При построении математической модели учитывая, что скорость одной искомой функции системы уравнений Фитц Хью–Нагумо значительно превышает скорость другой, было предложено исследовать вырожденный случай. Изучаемая задача стартового управления и финального наблюдения моделирует ситуацию, когда после кратковременного управляющего воздействие ожидается требуемый результат за некоторый период времени, т. е. в начальный момент времени посылается импульс большой мощности в систему нервов и ожидается требуемое состояние системы через некоторое установленное время. На основе методов Галеркина и компактности доказана теорема существования задачи стартового управления и финального наблюдения в слабом обобщенном случае.

Ключевые слова: полулинейные уравнения соболевского типа; задача Шоуолтера–Сидорова; задача стартового управления и финального наблюдения; система уравнений Фитц Хью–Нагумо; слабое обобщенное решение.

Введение

Пусть $\Omega \subset R^n$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. В цилиндре $Q = \Omega \times (0,T)$ рассмотрим вырожденную систему уравнении Фитц Хью – Нагумо:

$$\begin{cases} 0 = \alpha_1 \Delta v + \beta_1 w - \eta_1 v + f_1, \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} = \alpha_2 \Delta w + \beta_2 w - \eta_2 v - w^3 + f_2 \end{cases} \tag{1}$$

с краевым условием Дирихле

$$v(s,t) = 0, w(s,t) = 0, (s,t) \in \partial\Omega \times (0,T) \tag{2}$$

и начальным условием Шоуолтера–Сидорова

$$w(s,0) = u(s), s \in \Omega. \tag{3}$$

Искомые функции $w = w(s,t)$ и $v = v(s,t)$ описывают динамику мембранного потенциала и поведение натриевого и калиевого токов; $\beta_2 \in R_-$, $\alpha, \beta_1, \alpha_1, \alpha_2, \eta_1, \eta_2 \in R_+$ – характеризуют порог возбуждения, скорость порога возбуждения, электропроводность и реполяризацию среды; $f = (f_1, f_2)$ – источник возбуждения. Первоначально в работах [1, 2] была получена невырожденная система уравнений Фитц Хью–Нагумо, зависящая от двух искомых функций v и w, моделирующих поведение химических элементов в мембране. Скорость искомой функции w увеличивается по мере ее роста, что привносит в систему сильную нелинейность. Невырожденная система уравнений Фитц–Хью в двухкомпонентном и многокомпонентном случаях изучалась подробно в работах [3–5]. Нулевое решение невырожденной системы при $\beta_2 < 0$ асимптотически устойчиво, а при $\beta_2 > 0$ неустойчиво [6]. В связи с тем, что скорость искомой функции w существенно превосходит скорость изменения v, в случае устойчивости решения (при $\beta_2 < 0$) в работе [7] было предложено рассматривать именно вырожденную систему уравнений вида (1). Нами будет рассмотрен случай асимптотически устойчивой задачи, когда $\beta_2 < 0$ и $\beta_1 = \eta_2$.

Начально-краевая задача (2), (3) для системы уравнений (1) в специальным образом подобранных функциональных пространствах редуцируются к задаче Шоуолтера–Сидорова

$$L\left(x(0)-u(s)\right)=0 \tag{4}$$

для абстрактного полулинейного уравнения

$$L\dot{x}+Mx+N\left(x\right)=f,\ker L\neq\{0\} \tag{5}$$

и относится к широкому классу уравнений соболевского типа [8, 9]. При рассмотрении классического условия Коши в случае уравнений соболевского типа решение задачи существует лишь при начальном значении $u(s)$ взятом из фазового пространства уравнения (5). Рассматриваемое в работе условие Шоуолтера–Сидорова (4) является более общим по сравнению с условием Коши и позволяет снять данное ограничение. Впервые задача управления для уравнений соболевского типа была поставлена и изучена в конце XX века, задачи же стартового управления и финального наблюдения исследуются сравнительно недавно. Задачи управления для полулинейных уравнений соболевского типа с условием Шоуолтера–Сидорова рассматривались в [10, 11]. В работе [12] была исследована задача оптимального управления для вырожденной системы уравнений (1), а также рассмотрены и доказаны существование и единственность решения задачи (1)–(3) в слабом обобщенном смысле. Впервые задача стартового управления и финального наблюдения для системы уравнений (1) рассматривалась в работе [13].

Данная работа посвящена исследованию задачи стартового управления и финального наблюдения

$$J\left(x(T),u\right)\to inf \tag{6}$$

решениями задачи (1)–(3) в слабом обобщенном смысле [8, 14]. Задача стартового управления и финального наблюдения моделирует ситуацию, когда после кратковременного управляющего воздействие ожидается требуемый результат за некоторый период времени, т. е. в начальный момент времени посылается импульс большой мощности в систему нервов и ожидается требуемое состояние системы через некоторое установленное время. В работах [15–17] изучались задачи стартового управления и финального наблюдения для различных математических моделей, основанных на уравнениях соболевского типа.

1. Задача стартового управления и финального наблюдения

Положим $H_i = \overset{o}{W}{}_2^1(\Omega)$ и $B_i = L_4(\Omega)$, $i = 1,2$. Рассмотрим гильбертово пространство $A = L_2(\Omega)\times L_2(\Omega)$ со скалярным произведением

$$[x,\zeta]=\langle v,\xi\rangle_{L_2(\Omega)}+\langle w,\eta\rangle_{L_2(\Omega)},\ \text{где}\ x=(v,w),\ \ \zeta=(\xi,\eta).$$

Определим пространства $H = H_1\times H_2$ и $B = B_1\times B_2$, а через H^*, B^* обозначим сопряженные пространства к пространству H, B относительно скалярного произведения в A, соответственно. В силу теоремы Соболева в случае $n \le 4$ имеют место плотные и непрерывные вложения

$$H\subset B\subset A\subset B^*\subset H^*,$$

причем вложение $H \subset A$ компактно согласно теореме Реллиха–Кондрашева.
Определим операторы L,M,N следующим образом:

$$\left[Lx,\zeta\right]=\langle w,\eta\rangle, x,\zeta\in H,$$

$$[Mx,\zeta]=\langle-\alpha_1\nabla v,\nabla\xi\rangle+\langle-\beta_1 w+\eta_1 v,\xi\rangle+\langle-\alpha_2\nabla w,\nabla\eta\rangle+\langle|\beta_2|w+\beta_1 v,\eta\rangle, x,\zeta\in H,$$
$$[N(x),\zeta]=\langle w^3,\eta\rangle, x,\zeta\in B.$$

Замечание 1. Операторы $L,M\in\mathcal{L}(H;H^*)$ линейные непрерывные операторы. Справедливость данного утверждения является классическим результатом.

Рассмотрим пространство
$$X=\{x\,|\,v\in L_2(0,T;H_1), w\in L_\infty(0,T;\mathrm{coim}\,L)\cap L_4(0,T;B_2)\}.$$

Определение 1. *Вектор-функцию $x\in X$ при $T\in R_+$ назовем слабым обобщенным решением задачи Шоуолтера–Сидорова (1)–(3), если она удовлетворяет*
$$\int_0^T\varphi(t)\left(\left[L\frac{dx}{dt},\zeta\right]+\left[Mx+N(x),\zeta\right]\right)dt=\int_0^T\varphi(t)[f,\zeta]dt,\ \left[L(x-x_0),\zeta\right]=0\ \ \forall\zeta\in H,\forall\varphi\in L_2(0,T).$$

Теорема 1. [13] *Пусть $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\eta_1\in R_+$, $\beta_2\in R_-$ и $n\le 4$, тогда при любых $x_0\in H, T\in R_+$, $f_1\in L_2(0,T;H_1^*)$, $f_2\in L_{\frac{4}{3}}(0,T;B_2^*)$, $u\in H_2$ существует единственное решение $x\in X$ задачи (1)–(3), причем*
$$\|w(t)\|^2_{L_2(\Omega)}+C_1\int_0^t\left[\|v(\tau)\|^2_{H_1}+\|w(\tau)\|^4_{B_2}\right]d\tau\le C_2\int_0^t\|f_1(\tau)\|_{H_1^*}d\tau+C_3\int_0^t\|f_2(\tau)\|_{B_2^*}d\tau+\|u\|^2_{L_2(\Omega)},$$
$$C_i>0, i=\overline{1,3}. \qquad (7)$$

Пусть $J(x(T),u)$ – ограниченный снизу, полунепрерывный снизу, коэрцитивный функционал; $u\in U_{ad}$, где U_{ad} – некоторое замкнутое и выпуклое множество в пространстве управлений $U=H_2$. Рассмотрим задачу стартового управления и финального наблюдения (6) решениями (1) – (3) в слабом обобщенном смысле.

Определение 2. *Пару $(\hat{x}(T),\hat{u})\in X\times U_{ad}$ будем называть решением задачи (1)–(3), (6), если*
$$J(\hat{x}(T),\hat{u})=\inf_{(x,u)}J(x(T),u),$$
и пары (x,u) удовлетворяют задаче (1)–(3) в смысле определения 1. Вектор-функцию u будем называть стартовым управлением задачи (1)–(3), (6).

Теорема 2. *Пусть $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\eta_1\in R_+$, $\beta_2\in R_-$, $T\in R_+$ и $n\le 4$, тогда существует решение $(\hat{x}(T),\hat{u})$ задачи (1)–(3), (6).*

Доказательство. В силу теоремы 1 для задачи (1)–(3), (6) для любого $u\in U_{ad}$ существует единственное слабое обобщенное решение. Следовательно, можно считать, что
$$J(x(T),u)=J(u).$$

I. Множество значений функционала ограничено снизу, значит, существует минимизирующая последовательность $\{u_m\}\subset U_{ad}$, такая что
$$\lim_{m\to\infty}J(u_m)=C,$$
где C – точная нижняя грань множества значений функционала $J(x(T),u)$. Последовательность $\{J(u_m)\}_{m=1}^\infty$ ограничена в R, следовательно, в силу коэрцитивности функционала $J(u)$, последовательность $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ ограничена в U. Согласно теореме Банаха–Алаоглу из $\{u_m\}$ можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность $u_m\rightharpoonup\hat{u}$ в U. В силу теоремы Мазура точка $\hat{u}\in U_{ad}$.

II. Обозначим за $x_m=x(u_m)=(v_m,w_m)=(v(u_m),w(u_m))$ последовательность слабо обобщенных решений задачи
$$L\dot{x}_m+Mx_m+N(x_m)=f,\ \ L(x_m(0)-u_m)=0.$$

В силу теоремы 1 и оценки (7) и, ввиду рефлексивности бохнеровских пространств $L_4(0,T;B_2)$, $L_2(0,T;H_1)$ и $L_{\frac{4}{3}}\left(0,T;B_2^*\right)$ существуют слабые пределы

$$v_m \to \hat{v} \text{ слабо } L_2(0,T;H_1),$$
$$w_m \to \hat{w} \text{ *-слабо } L_\infty(0,T;L_2(\Omega)),$$
$$w_m \to \hat{w} \text{ слабо } L_4(0,T;B_2).$$

В силу ограниченности операторов L и M получим

$$\left[Lx_m(t),x_m(t)\right] \le \left\|Lx_m(t)\right\|_{H^*}\left\|x_m(t)\right\|_H \le C^L\left\|x_m(t)\right\|_H^2,$$
$$\left[Mx_m(t),x_m(t)\right] \le \left\|Mx_m(t)\right\|_{H^*}\left\|x_m(t)\right\|_H \le C^M\left\|x_m(t)\right\|_H^2,$$

значит $\{Lx_m\},\{Mx_m\}$ ограничены в $L_\infty\left(0,T;H\right)$.

По построению оператора N получим, что

$$\int_0^T\left[N(x_m),x_m\right]d\tau = \int_0^T\left\|w_m\right\|_{B_2}^3\left\|w_m\right\|_{B_2}d\tau$$

и $\{N(x_m)\}$ ограничена в $L_{\frac{4}{3}}\left(0,T;B^*\right)$ следовательно,

$$N(x_m) \to \mu \text{ слабо в } L_{\frac{4}{3}}\left(0,T;B^*\right).$$

III. Покажем, что $\mu = N(\hat{x})$, где $\hat{x} = (\hat{v},\hat{w})$. Так как пространство $H \subset A$ компактно, то последовательность $w_m \to w$ в пространстве $L_2\left(0,T;L_2(\Omega)\right)$. Получим, что

$$N(\hat{x}) = w^3$$

в силу единственности предела.

IV. Так как пространство A сепарабельно, то выберем в нем счетную всюду плотную ортонормированную систему функций $\{\varphi_j\} = \left\{\left(\varphi_j^1,\varphi_j^2\right)\right\}$. Тогда в силу основной леммы вариационного исчисления

$$\left[Lx_m(T),\varphi_j\right] + \int_0^T\left(\left[Mx_m(\tau),\varphi_j\right] + \left[N(x_m(\tau)),\varphi_j\right]\right)d\tau = \left[Lx_m(0),\varphi_j\right].$$

Зафиксируем j и перейдем к пределу при $m \to +\infty$

$$\left[L\hat{x}(T),\varphi_j\right] + \int_0^T\left[M\hat{x}(\tau) + N(\hat{x}(\tau)),\varphi_j\right]d\tau = \left[L\hat{u},\varphi_j\right].$$

Тогда получим, что

$$\int_0^T\left(\left[L\frac{d\hat{x}}{d\tau},\varphi\right] + \left[M\hat{x} + N(\hat{x}),\varphi\right]\right)\phi(\tau)d\tau = 0,\ \ L\hat{x}(0) = \hat{u}, \forall\varphi \in A, \forall\varphi \in L_2(0,T).$$

Следовательно, $\hat{x} = x(\hat{u})$ и в силу полунепрерывности снизу функционала J, получим $\liminf\limits_{m\to\infty U_{ad}} J(u_m) \ge J(\hat{u})$. Значит u есть стартовое управление в задаче (1)–(3), (6). Таким образом, теорема доказана.

Рассмотрим задачу стартового управления и финального наблюдения (1)–(3), (6), где функционал штрафа задается формулой

$$J(x(T),u) = \vartheta\left\|v(T) - v_f\right\|_{H_1}^2 + \vartheta\left\|w(T) - w_f\right\|_{B_2}^4 + \left\|u\right\|_{H_2}^4. \tag{8}$$

Здесь $x_f(s) = \left(v_f(s),w_f(s)\right)$ – требуемое состояние системы, которого достигается при минимальном начальном воздействии по прошествии времени $t = T$.

Лемма 1. Функционал $J\left(x(T),u\right)$, заданный в виде (8), является ограниченным снизу, полунепрерывным снизу, коэрцитивным функционалом.

Доказательство. Покажем, что функционал $J\left(x(T),u\right)$, заданный в виде (8), является коэрцитивным

$$\left\|\left(x(T),u\right)\right\| \le \left\|v(T)\right\|_{H_1}^2 + \left\|w(T)\right\|_{B_2}^4 + \left\|u\right\|_{H_2}^2 \le$$

$$\le C_1\left\|v(T)-v_f\right\|_{H_1}^2 + C_2\left\|w(T)-w_f\right\|_{B_2}^4 + C_3 + \left\|u\right\|_{H_2}^2 = -C_1\vartheta\frac{1}{\vartheta}\left\|u\right\|_{B_2^*}^4 + C_1\vartheta\frac{1}{\vartheta}\left\|u\right\|_{H_2}^2 =$$

$$= C_1\left(\vartheta\left\|v(T)-v_f\right\|_{H_1}^2 + \vartheta\left\|w(T)-w_f\right\|_{B_2}^4 + (1-\vartheta)\left\|u\right\|_{H_2}^2\right) + C_6 = C_1\left(J(x,u)\right) + C_6,$$

$$C_i > 0, \quad i = \overline{1,6}, \quad C_3 > 3 \text{ при } C_2 = \frac{5}{4}\left\|w_f\right\|_{B_2}.$$

Очевидно, что функционал $J\left(x(T),u\right)$ непрерывный, а значит, и полунепрерывный снизу. Таким образом, лемма доказана.

В силу теоремы 2 и леммы 1 справедлива

Теорема 3. *Пусть* $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\eta_1 \in R_+$, $\beta_2 \in R_-$, $T \in R_+$ *и* $n \le 4$, *тогда существует решение* $\left(\hat{x}(T),\hat{u}\right)$ *задачи (1)–(3), (6), где функционал* $J\left(x(T),u\right)$ *принимает вид (8).*

Автор выражает признательность профессору Н.А. Манаковой за постановку задачи и плодотворные дискуссии, а также профессору А.В. Богомолову за интерес к работе. Кроме того, считает своим приятным долгом поздравить профессора А.В. Богомолова с юбилеем.

Литература

1. Fitzhugh, R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane / R. Fitzhugh // Biophysical Journal. – 1961. – Vol. 1, no. 6. – P. 445–466.

2. Nagumo, J. An active pulse transmission line simulating nerve axon / J. Nagumo, S. Arimoto, S. Yoshizawa // Proceedings of the IRE. – 1962. – Vol. 50. – Issue 10. – P. 2061–2070.

3. Wu, D. Stochastic resonance in Fitz Hugh–Nagumo system with time-delayed feedback / D. Wu, S. Zhu // Physics Letters A. – 2008. – Vol. 372. – Issue 32. – P. 5299–5304. DOI: 10.1016/j.physleta.2008.06.015

4. Polymorphic and regular localized activity structures in a two-dimensional two-component reaction diffusion lattice with complex thresholdex citation / V.I. Nekorkin, A.S. Dmitrichev, J.M. Bilbault, S. Binczak // Physica D: Nonlinear Phenomena. – 2010. – Vol. 239. – Issue 12. – P. 972–987.

5. Weber, S. Multicomponent reaction-diffusion processes on complex networks / S. Weber, M. Porto // Physical Review E. – 2006. – Vol. 74. – Issue 4. – P. 046108.

6. Борина, М.Ю. Пространственно-временные структуры в многомерной активной среде, обусловленные многомодовым взаимодействием вблизи волновой бифуркации / М.Ю. Борина, А.А. Полежаев // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. – 2012. – Т. 20, № 6. – С. 15–24.

7. Бокарева, Т.А. Сборки Уитни фазовых пространств некоторых полулинейных уравнений типа Соболева / Т.А. Бокарева, Г.А. Свиридюк // Математические заметки. – 1994. – Т. 55, № 3. – С. 3–10.

8. Al'shin, A.B. Blow-up in nonlinear sobolev-type equations / A.B. Al'shin, M.O. Korpusov, A.G. Sveshnikov. – Berlin; N.Y.: Walter de Gruyter GmbH and Co. KG, 2011. – 648 p.

9. Свиридюк, Г.А. Фазовое пространство задачи Коши–Дирихле для уравнения Осколкова нелинейной фильтрации / Г.А. Свиридюк, Н.А. Манакова // Известия вузов. Серия: Математика. – 2003. – № 9. – С. 36–41.

10. Сагадеева, М.А. О задаче оптимального измерения динамически искаженных сигналов с учетом мультипликативного воздействия / М.А. Сагадеева // Математические методы в технике и технологиях. – 2016. – № 2(84). – С. 13–15.

11. Замышляева, А.А. Оптимальное управление решениями начально-конечной задачи для уравнения Буссинеска–Лява / А.А. Замышляева, О.Н. Цыпленкова // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2012. – № 5(264), вып. 11. – С. 13–24.

12. Манакова, Н.А. Оптимальное управление для одной математической модели распространения нервного импульса / Н.А. Манакова, О.В. Гаврилова // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2015. – Т. 8, № 4. – С. 120–126.

13. Гаврилова О.В. Задача стартового управления и финального наблюдения задачи Шоуолтера–Сидорова для модели Фитц Хью–Нагумо / О.В. Гаврилова // Материалы международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейена–2016». – Воронеж: Научная книга, 2016. – С.115–118.

14. Лионс, Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейные краевые задач / Ж.-Л. Лионс. – М.: Мир, 1972. – 588 р.

15. Manakova, N.A. Mathematical model of the start control of electric field potential in conducting medium without dispersion considering relaxation / N.A. Manakova, E.A. Bogatyreva // 2016 2nd International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM). – Chelyabinsk, 2016. – P. 1–5.

16. Подвальный, С.Л. Стартовое управление параболической системой с распределенными параметрами на графе / С.Л. Подвальный, В.В. Провоторов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10 «Прикладная математика информатика процессы управления». – 2015. – № 3. – С. 126–142.

17. Manakova, N.A. Numerical Investigation for the Start Control and Final Observation in Model Of- and I-beam Deformation / N.A. Manakova, K.V. Vasiuchkova // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2017. – T. 4, № 2. – С. 26–40.

Поступила в редакцию 11 июня 2018 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series “Mathematics. Mechanics. Physics”
2018, vol. 10, no. 3, pp. 12–18

DOI: 10.14529/mmph180302

START CONTROL AND FINAL OBSERVATION PROBLEM FOR THE FITZ HUGH–NAGUMO SYSTEM FOR THE DIRICHLET–SHOWALTER–SIDOROV CONDITION

O.V. Gavrilova
South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E-mail: gavrilovaov@susu.ru

The paper discusses the start control and the final observation of solutions of the Dirichlet–Showalter–Sidorov problem for the degenerate Fitz Hugh–Nagumo system of equations. This system refers to the class of reaction-diffusion equations and describes the propagation of waves in active biological media, such as the heart muscle, or brain tissue. On the one hand, the Fitz Hugh–Nagumo system of equations is the development of more familiar model of Kolmogorov–Petrovsky–Piskunov, and on the other hand, the simplification of the Hodgins–Huxley model. When constructing a mathematical model taking into account that the speed of one desired function of the Fitz Hugh–Nagumo system of equations significantly exceeds the speed of the other, it has been suggested to investigate the degenerate case. The studied task of the start control and final observation simulates the situation when, after a short-time control action, the expected result for a certain period of time, i.e. at the initial moment of time sends a high-power pulse is sent to a nerve system and the required state of the system is expected after a certain set time. On the basis of Galerkin's methods and compactness, the existence theorem of the problem of starting control and final observation in a weak generalized case is proved.

Keywords: semilinear Sobolev type equations; Showalter–Sidorov problem, the start control and final observation problem; weak generalized solution; the Fitz Hugh–Nagumo system of equations.

References

1. Fitzhugh R. Impulses and Physiological States in Theoretical Models of Nerve Membrane. *Biophysical Journal*, 1961, Vol. 1, no. 6, pp. 445–466. DOI: 10.1016/s0006-3495(61)86902-6

2. Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S. An active pulse transmission line simulating nerve axon. *Proceedings of the IRE*, 1962, Vol. 50, Issue 10, pp. 2061–2070. DOI: 10.1109/JRPROC.1962.288235

3. Wu D., Zhu S. Stochastic resonance in Fitz Hugh–Nagumo system with time-delayed feedback. *Physics Letters A*, 2008, Vol. 372, Issue 32, pp. 5299–5304. DOI: 10.1016/j.physleta.2008.06.015

4. Nekorkin V.I., Dmitrichev A.S., Bilbault J.M., Binczak S. Polymorphic and regular localized activity structures in two-dimensional two-component reaction diffusion lattice with complex thresholdexcitation. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2010, Vol. 239, Issue 12, pp. 972–987. DOI: 10.1016/j.physd.2010.02.004

5. Weber S., Porto M. Multicomponent reaction-diffusion processes on complex networks. *Physical Review E*, 2006, Vol. 74, Issue 4, P. 046108. DOI: 10.1103/physreve.74.046108

6. Borina M.Yu., Polezhaev A.A. Spatial-temporal patterns in a multidimensional active medium formed due to polymodal interaction near the wave bifurcation. *Izvestiya VUZ. Applied nonlinear dynamics*, 2012, Vol. 20, no. 6, pp. 15–24.

7. Bokareva T.A, Sviridyu G.A. Whitney assemblies of phase spaces of certain semilinear equations of Sobolev type. *Mathematical Notes*, 1994, Vol. 55, no. 3, pp. 237–242. DOI: 10.1007/BF02110776

8. Al'shin A.B., Korpusov M.O., Sveshnikov A.G. *Blow-up in nonlinear sobolev-type equations*. Berlin, N.Y., Walter de Gruyter GmbH and Co. KG, 2011, 648 p. DOI: 10.1515/9783110255294

9. Sviridyuk G.A., Manakova N.A. The phase space of the Cauchy–Dirichlet problem for the Oskolkov equation of nonlinear filtration. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 2003, Vol. 47, no. 9, pp. 33–38.

10. Sagadeeva M.A. O zadache optimal'nogo izmereniya dinamicheski iskazhennykh signalov s uchetom mul'tiplikativnogo vozdeystviya (On the problem of optimal measurement of dynamically distorted signals with allowance for the multiplicative effect). *Matematicheskie metody v tekhnike i tekhnologiyakh* (Mathematical methods in engineering and technology), 2016, no. 2(84), pp. 13–15. (in Russ.).

11. Zamyshlyaeva A.A., Tsyplenkova O.N. The Optimal Control over Solutions of the Initial-finish Value Problem for the Boussinesque–Love Equation. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software*, 2012, no. 5(264), Issue 11, pp. 13–24. (in Russ.).

12. Manakova N.A., Gavrilova O.V. Optimal Control for a Mathematical Model of Nerve Impulse Spreading. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software*, 2015, Vol. 8, no. 4, pp. 120–126. DOI: 10.14529/mmp150411

13. Gavrilova O.V. Zadacha startovogo upravleniya i final'nogo nablyudeniya zadachi Shouoltera–Sidorova dlya modeli Fitts Kh'yu–Nagumo (The task of starting control and final observation of the Showalter-Sidorov problem for the Fitz Hugh–Nagumo model). *Materialy mezhdunarodnoy konferentsii "Voronezhskaya zimnyaya matematicheskaya shkola S. G. Kreyna-2016"* (Proc. of the international conference "Voronezh Winter Mathematical School of S.G. Kerin-2016"). Voronezh, Nauchnaya kniga Publ., 2016, pp. 115–118. (in Russ.).

14. Lions J.-L. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Paris, Dunod, 1969, 554 p. (in French).

15. Manakova N.A., Bogatyreva E.A. Mathematical model of the start control of electric field potential in conducting medium without dispersion considering relaxation. *2016 2nd International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM)*, Chelyabinsk, 2016, pp. 1–5. DOI: 10.1109/ICIEAM.2016.7911711

16. Podval'ny S., Provotorov V.V. Start control of parabolic systems with distributed parameters on the graph. *Vestnik S.-Petersburg Univ. Ser. 10. Prikl. Mat. Inform. Prots. Upr.*, 2015, Issue 3, pp. 126–142. (in Russ.).

17. Manakova N.A., Vasiuchkova K.V. Numerical Investigation for the Start Control and Final Observation in Model Of- and I-Beam Deformation. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2017, Vol. 4, no. 2, pp. 26–40. DOI: 10.14529/jcem170203

Received June 11, 2018