УДК 517.968.23 DOI: 10.14529/mmph180306

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ОДНОРОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА ДЛЯ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КРУГОВЫХ ОБЛАСТЯХ

К.М. Расулов, Ш.С. Ханкишиева
Смоленский государственный университет, г. Смоленск, Российская Федерация
E-mail: kahrimanr@yandex.ru

Рассматривается краевая задача типа задачи Римана (задача сопряжения) в классах кусочно квазигармонических функций. Подробно исследуется однородная задача типа задачи Римана в классах кусочно квазигармонических функций второго рода в круговых областях. В частности, в указанном случае для однородной задачи типа задачи Римана разработан явный метод решения, логическая суть которого состоит в сведении решения рассматриваемой однородной задачи к последовательному решению обычной однородной задачи Римана для аналитических функций и двух линейных дифференциальных уравнений Эйлера второго порядка. Кроме того, установлена неустойчивость решений искомой однородной задачи по отношению к изменению величины радиуса рассматриваемой круговой области, а также построена полная картина её разрешимости при различных значениях индекса задачи и величины радиуса круговой области. Доказано, что основной причиной неустойчивости решений однородной задачи типа Римана в классах кусочно квазигармонических функций второго рода в круговых областях по отношению к изменению величины радиуса рассматриваемой круговой области является тот факт, что число линейно независимых аналитических решений однородных дифференциальных уравнений Эйлера, к которым редуцируется исследуемая задача типа Римана, существенным образом зависит от величины радиуса рассматриваемой круговой области.

Ключевые слова: краевая задача типа Римана; кусочно квазигармоническая функция; дифференциальное уравнение Эйлера; круговые области; радиус круговой области.

1. Постановка задачи. Рассмотрим на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ область T^+, ограниченную замкнутым гладким контуром L, причем для определенности будем считать, что точка $z = 0$ принадлежит T^+. Пусть $T^- = \overline{\boldsymbol{C}} \setminus (T^+ \cup L)$.

В дальнейшем в основном будем пользоваться определениями и обозначениями, принятыми в работе [1].

В работе [1] была сформулирована краевая задача типа задачи Римана (короче, **задача** $\boldsymbol{\rho}_n$) в классе кусочно квазигармонических функций произвольного рода n.

Из результатов [1; 2] следует, что если носителем краевых условий является окружность $L_r = \{t : |t| = r\},\ r > 0$, то задача $\boldsymbol{\rho}_n$ допускает решение в явном виде. Основной целью настоящей заметки является установление неустойчивости решения однородной задачи $\boldsymbol{\rho}_n^0$ в круге $T_r^+ = \{z : |z| < r\}$ по отношению к изменению величины радиуса r, причем ради краткости далее ограничиваемся рассмотрением случая $n = 2$, т. е. исследованием задачи $\boldsymbol{\rho}_2^0$.

2. О явном решении задачи $\boldsymbol{\rho}_2^0$ в круговых областях. Пусть $T_r^+ = \{z : |z| < r\},\ L_r = \{t : |t| = r\}$, $T_r^- = \overline{\boldsymbol{C}} \setminus (T_r^+ \cup L_r)$. Далее рассматривается следующая *задача* $\boldsymbol{\rho}_2^0$: *требуется найти все ограниченные на бесконечности кусочно квазигармонические функции* $W(z) = \{W^+(z), W^-(z)\}$ *второго рода с линией скачков* L_r, *принадлежащие классу* $\boldsymbol{Q}_2(T_r^{\pm}) \cap H^{(2)}(L_r)$ *и удовлетворяющие на* L_r *условию*

$$W^+(t) = G(t)W^-(t), \tag{1}$$

где $G(t)$ *– заданная на* L_r *функция,* $G(t) \in H(L_r)$ *и* $G(t) \neq 0$ *на* L_r.

Поскольку (см. [1; 2]) при $n = 2$ квазигармонические функции $W^{+}(z)$ и $W^{-}(z)$ можно представить соответственно в виде

$$W^{+}(z) = \frac{d^2\varphi^{+}(z)}{dz^2} - \frac{6\bar{z}}{1+z\bar{z}}\frac{d\varphi^{+}(z)}{dz} + 12\left(\frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}}\right)^2 \varphi^{+}(z), \tag{2}$$

$$W^{-}(z) = \frac{d^2\varphi^{-}(z)}{dz^2} - \frac{6\bar{z}}{1+z\bar{z}}\frac{d\varphi^{-}(z)}{dz} + 12\left(\frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}}\right)^2 \varphi^{-}(z), \tag{3}$$

где $\varphi^{\pm}(z) \in A(T_r^{\pm}) \cap H^2(L_r)$, то решения $W(z) = \{W^{+}(z), W^{-}(z)\}$ краевой задачи $\boldsymbol{\rho}_2^0$ будем искать в виде (2) и (3).

В силу того, что на $L_r = \{t : |t| = r\}$ имеет место соотношение $\overline{t} = r^2/t$, то с учетом (2) и (3) краевое условие (1) можно переписать так:

$$\begin{gathered} t^2\frac{d^2\varphi^{+}(t)}{dt^2} - t\frac{6r^2}{1+r^2}\frac{d\varphi^{+}(t)}{dt} + \frac{12r^4}{(1+r^2)^2}\varphi^{+}(t) = \\ = G(t)\left(t^2\frac{d^2\varphi^{-}(t)}{dt^2} - t\frac{6r^2}{1+r^2}\frac{d\varphi^{-}(t)}{dt} + \frac{12r^4}{(1+r^2)^2}\varphi^{-}(t)\right), \quad t \in L_r. \end{gathered} \tag{4}$$

Далее введем в рассмотрение следующие функции:

$$\Psi^{\pm}(z) = z^2\frac{d^2\varphi^{\pm}(z)}{dz^2} - z\frac{6r^2}{1+r^2}\frac{d\varphi^{\pm}(z)}{dz} + \frac{12r^4}{(1+r^2)^2}\varphi^{\pm}(z), \quad z \in T_r^{\pm}, \tag{5}$$

а $\varphi^{\pm}(z)$ – *аналитические компоненты* искомой кусочно квазигармонической функции $W(z)$. Ясно, что функция $\Psi(z) = \{\Psi^{+}(z), \Psi^{-}(z)\}$ является кусочно аналитической функцией с линией скачков $L_r = \{t : |t| = r\}$. С помощью функций (5) краевое условие (4) можно записать в виде

$$\Psi^{+}(t) = G(t)\Psi^{-}(t), \quad t \in L_r, \tag{6}$$

где $\Psi^{\pm}(t) = \lim\limits_{z \to t \in L_r} \Psi^{\pm}(z)$.

Таким образом, получили *однородную* краевую задачу Римана (6) относительно ограниченной на бесконечности кусочно аналитической функции $\Psi(z) = \{\Psi^{+}(z), \Psi^{-}(z)\}$ (см., например, [3, с. 106]).

В случае $\chi = \operatorname{Ind}G(t) < 0$ (см., например, [3, с. 110]) краевая задача (6) неразрешима (т. е. имеет лишь тривиальное решение $\Psi^{\pm}(z) \equiv 0$). Если же $\chi \geq 0$, то задача (6) безусловно разрешима и её общее решение можно задавать формулой:

$$\Psi^{\pm}(z) = X^{\pm}(z)P_{\chi}(z), \quad z \in T_r^{\pm}, \tag{7}$$

где $X(z) = \{X^{+}(z), X^{-}(z)\}$ – *каноническая функция* задачи, а $P_{\chi}(z) = \mu_0 + \mu_1 z + \ldots + \mu_{\chi} z^{\chi}$ – произвольный многочлен степени не выше χ.

Предположим, что $\chi = \operatorname{Ind}G(t) < 0$. Тогда $\Psi^{\pm}(z) \equiv 0$ и, следовательно, в силу (5) аналитические функции $\varphi^{+}(z)$ и $\varphi^{-}(z)$ должны удовлетворять соответственно линейным однородным дифференциальным уравнениям Эйлера 2-го порядка следующего вида:

$$z^2\frac{d^2\varphi^{+}(z)}{dz^2} - z\frac{6r^2}{1+r^2}\frac{d\varphi^{+}(z)}{dz} + \frac{12r^4}{(1+r^2)^2}\varphi^{+}(z) = 0, \quad z \in T_r^{+}, \tag{8}$$

$$z^2\frac{d^2\varphi^{-}(z)}{dz^2} - z\frac{6r^2}{1+r^2}\frac{d\varphi^{-}(z)}{dz} + \frac{12r^4}{(1+r^2)^2}\varphi^{-}(z) = 0, \quad z \in T_r^{-}. \tag{9}$$

Допустим, что однородные дифференциальные уравнения Эйлера (8) и (9) разрешимы в классах $\boldsymbol{A}(T^+)\cap H^{(2)}(L)$ и $\boldsymbol{A}(T^-)\cap H^{(2)}(L)$ соответственно. Тогда общее решение искомой задачи $\boldsymbol{\rho}_2^0$ можно найти по формуле

$$W(z)=\begin{cases}\dfrac{d^2\hat{\varphi}^+(z)}{dz^2}-\dfrac{6\bar{z}}{1+z\bar{z}}\dfrac{d\hat{\varphi}^+(z)}{dz}+12\left(\dfrac{\bar{z}}{1+z\bar{z}}\right)^2\hat{\varphi}^+(z), & z\in T_r^+,\\ \dfrac{d^2\hat{\varphi}^-(z)}{dz^2}-\dfrac{6\bar{z}}{1+z\bar{z}}\dfrac{d\hat{\varphi}^-(z)}{dz}+12\left(\dfrac{\bar{z}}{1+z\bar{z}}\right)^2\hat{\varphi}^-(z), & z\in T_r^-,\end{cases} \tag{10}$$

где $\hat{\varphi}^+(z)$ и $\hat{\varphi}^-(z)$ – общие решения дифференциальных уравнений (8) и (9) соответственно.

Если же $\chi=\operatorname{Ind}G(t)\geq 0$, то в силу (5) и (7) аналитические компоненты $\varphi^+(z)$ и $\varphi^-(z)$ искомой кусочно квазигармонической функции $W(z)=\{W^+(z),W^-(z)\}$ должны удовлетворять соответственно линейным неоднородным дифференциальным уравнениям Эйлера 2-го порядка:

$$z^2\frac{d^2\varphi^+(z)}{dz^2}-z\frac{6r^2}{1+r^2}\frac{d\varphi^+(z)}{dz}+\frac{12r^4}{(1+r^2)^2}\varphi^+(z)=X^+(z)P_\chi(z),\quad z\in T_r^+, \tag{11}$$

$$z^2\frac{d^2\varphi^-(z)}{dz^2}-z\frac{6r^2}{1+r^2}\frac{d\varphi^-(z)}{dz}+\frac{12r^4}{(1+r^2)^2}\varphi^-(z)=X^-(z)P_\chi(z),\quad z\in T_r^-. \tag{12}$$

В случае разрешимости неоднородных дифференциальных уравнений (11) и (12) в классах $\boldsymbol{A}(T^+)\cap H^{(2)}(L)$ и $\boldsymbol{A}(T^-)\cap H^{(2)}(L)$ соответственно, общее решение исходной задачи $\boldsymbol{\rho}_2^0$ также можно найти по формуле (10), где $\hat{\varphi}^+(z)$ и $\hat{\varphi}^-(z)$ – общие решения неоднородных дифференциальных уравнений (11) и (12) соответственно.

Из приведенных выше рассуждений вытекает справедливость следующей теоремы.

Теорема 1. *Если* $\chi=\operatorname{Ind}G(t)<0$ *и* $T_r^+=\{z:|z|<r\}$, *то решение задачи* $\boldsymbol{\rho}_2^0$ *в классе* $\boldsymbol{Q}_2(T_r^\pm)\cap H^{(2)}(L_r)$ *квазигармонических функций второго рода сводится к решению двух однородных уравнений Эйлера 2-го порядка вида* (8) *и* (9) *в классах аналитических функций* $\boldsymbol{A}(T^+)\cap H^{(2)}(L)$ *и* $\boldsymbol{A}(T^-)\cap H^{(2)}(L)$ *соответственно. Если же* $\chi=\operatorname{Ind}G(t)\geq 0$ *и* $T_r^+=\{z:|z|<r\}$, *то решение задачи* $\boldsymbol{\rho}_2^0$ *в классе* $\boldsymbol{Q}_2(T_r^\pm)\cap H^{(2)}(L_r)$ *квазигармонических функций второго рода сводится к последовательному решению однородной задачи Римана* (6) *для аналитических функций и двух неоднородных уравнений Эйлера 2-го порядка вида* (11) *и* (12) *в классах аналитических функций* $\boldsymbol{A}(T^+)\cap H^{(2)}(L)$ *и* $\boldsymbol{A}(T^-)\cap H^{(2)}(L)$ *соответственно.*

3. О неустойчивости решений задачи $\boldsymbol{\rho}_2^0$ в круговых областях по отношению к изменению величины радиуса рассматриваемой области. Как видно из формулы (10), при фиксированном значении $\chi=\operatorname{Ind}G(t)$ число линейно независимых (над полем $\boldsymbol{C}$) решений однородной краевой задачи $\boldsymbol{\rho}_2^0$ определяется числом линейно независимых решений однородных дифференциальных уравнений Эйлера (8) и (9).

Далее покажем, что при различных значениях величины радиуса r рассматриваемого круга $T_r^+=\{z:|z|<r\}$, дифференциальные уравнения (8) и (9) будут иметь различное число линейно независимых (над полем $\boldsymbol{C}$) решений, принадлежащих классу $A(T_r^+)\cap H^{(2)}(L_r)$. Для этого, во-первых, покажем, что однородное дифференциальное уравнение (8) будет иметь ненулевые решения, принадлежащие классу $\boldsymbol{A}(T_r^+)\cap H^{(2)}(L_r)$, лишь при следующих трех значениях радиуса r: $r=1$, $r=\sqrt{2-\sqrt{3}}$ и $r=\sqrt{2+\sqrt{3}}$. В самом деле, нетрудно проверить (см. также [4, с. 136]), что общее решение дифференциального уравнения Эйлера (8) задается в виде

$$\varphi^+(z)=C_1 z^{\frac{1+7r^2-\sqrt{1+14r^2+r^4}}{2(1+r^2)}}+C_2 z^{\frac{1+7r^2+\sqrt{1+14r^2+r^4}}{2(1+r^2)}}, \tag{13}$$

где C_1, C_2 – произвольные комплексные постоянные.

Так как функция $\omega_1(r)=\dfrac{1+7r^2-\sqrt{1+14r^2+r^4}}{2(1+r^2)}$ принимает целые неотрицательные значения лишь при $r=\sqrt{2+\sqrt{3}}$ и $r=1$ ($\omega_1(\sqrt{2+\sqrt{3}})=2$ и $\omega_1(1)=1$), то при $C_1\neq 0$ ($C_2=0$) функция вида (13) может принадлежать классу $\boldsymbol{A}(T_r^+)\cap H^{(2)}(L_r)$ только при $r=1$ или $r=\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Аналогично, функция $\omega_2(r)=\dfrac{1+7r^2+\sqrt{1+14r^2+r^4}}{2(1+r^2)}$ принимает целые неотрицательные значения лишь при $r=\sqrt{2-\sqrt{3}}$ и $r=1$ (причем $\omega_2(\sqrt{2-\sqrt{3}})=2$; $\omega_2(1)=3$), а значит при $C_2\neq 0$ ($C_1=0$) функция вида (13) может принадлежать классу $\boldsymbol{A}(T_r^+)\cap H^{(2)}(L_r)$ лишь при $r=1$ или $r=\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

Таким образом, если $r=1$, то общее решение однородного дифференциального уравнения (8), принадлежащее классу $\boldsymbol{A}(T_r^+)\cap H^{(2)}(L_r)$, задается в виде

$$\varphi^+(z)=C_1z+C_2z^3, \tag{14}$$

где C_1, C_2 – произвольные комплексные постоянные.

Если же $r=\sqrt{2-\sqrt{3}}$ или $r=\sqrt{2+\sqrt{3}}$, то общее решение дифференциального уравнения (8), принадлежащее классу $\boldsymbol{A}(T_r^+)\cap H^{(2)}(L_r)$, можно задавать в виде

$$\varphi^+(z)=Cz^2, \tag{15}$$

где C – произвольная комплексная постоянная.

Далее методом степенных рядов нетрудно убедиться, что однородное дифференциальное уравнение (9) ни при каком значении параметра $r\in(0,+\infty)$ не имеет нетривиальных решений, принадлежащих классу $\boldsymbol{A}(T_r^-)\cap H^{(2)}(L_r)$.

Таким образом, при $r\neq 1$ и $r\neq\sqrt{2\pm\sqrt{3}}$ и $\chi<0$ однородные дифференциальные уравнения (8) и (9) не имеют ненулевых решений. Значит, в этом случае *однородная задача* $\boldsymbol{\rho}_2^0$ *неразрешима* (т. е. она не имеет ненулевых решений).

Если $r=1$ и $\chi<0$, то искомая однородная задача $\boldsymbol{\rho}_2^0$ разрешима и ее общее решение зависит от двух произвольных комплексных постоянных. Если же $r=\sqrt{2+\sqrt{3}}$ или $r=\sqrt{2-\sqrt{3}}$ и $\chi<0$, то однородная задача $\boldsymbol{\rho}_2^0$ также разрешима, но ее общее решение зависит в данном случае лишь от одной произвольной комплексной постоянной.

Предположим теперь, что $\chi\geq 0$. Тогда в силу (5) и (7) аналитические компоненты $\varphi^+(z)$ и $\varphi^-(z)$ искомой кусочно квазигармонической функции $W(z)=\{W^+(z),W^-(z)\}$ должны удовлетворять соответственно линейным неоднородным дифференциальным уравнениям 2-го порядка вида (11) и (12).

Так как при $r\neq 1$ и $r\neq\sqrt{2\pm\sqrt{3}}$ и $\chi\geq 0$ соответствующие (11) и (12) однородные дифференциальные уравнения *неразрешимы* в классах $\boldsymbol{A}(T_r^{\pm})\cap H^{(2)}(L_r)$, то (в случае их разрешимости) неоднородные дифференциальные уравнения (11) и (12) будут иметь *единственные* решения. Но поскольку правые части данных дифференциальных уравнений линейно зависят от $\chi+1$ произвольных комплексных постоянных, то в данном случае общие решения этих уравнений будут содержать не более $\chi+1$ произвольных комплексных постоянных. Следовательно, в рассматриваемом случае решение искомой задачи $\boldsymbol{\rho}_2^0$ также линейно зависит не более чем от $\chi+1$ *произвольных комплексных постоянных*.

Если $r=1$ и $\chi \geq 0$, то общее решение соответствующего (11) однородного дифференциального уравнения (8) задается формулой (14). Следовательно, в этом случае общее решение $\hat{\varphi}^{+}(z)$ неоднородного уравнения (11) может линейно зависеть *не более чем от* $\chi+3$ *произвольных комплексных постоянных*. Поэтому (в силу (10)) в этом случае общее решение задачи $\boldsymbol{\rho}_2^0$ линейно зависит не более чем от $\chi+3$ *произвольных комплексных постоянных*.

Если же $r=\sqrt{2+\sqrt{3}}$ или $r=\sqrt{2-\sqrt{3}}$ и $\chi \geq 0$, то общее решение соответствующего (11) однородного уравнения (8) задается формулой (15). Значит, в этом случае общее решение $\hat{\varphi}^{+}(z)$ неоднородного уравнения (11) может линейно зависеть *не более чем от* $\chi+2$ *произвольных комплексных постоянных*. Следовательно, общее решение задачи $\boldsymbol{\rho}_2^0$ в этом случае также может линейно зависеть не более чем от $\chi+2$ *произвольных комплексных постоянных*.

Итак, установлена справедливость следующей теоремы.

Теорема 2. *Если* $\chi \geq 0$, *то для разрешимости однородной задачи* $\boldsymbol{\rho}_2^0$ *в классе квазигармонических функций второго рода в круге* $T_r^+=\{z:|z|<r\}$ *необходимо и достаточно, чтобы линейные дифференциальные уравнения* (11) *и* (12) *были разрешимы в классах функций* $A(T_r^+)\cap H^{(2)}(L_r)$ *и* $A(T_r^-)\cap H^{(2)}(L_r)$ *соответственно. Причем общее решение задачи* $\boldsymbol{\rho}_2^0$, *задаваемое формулой* (10), *будет линейно зависеть не более чем от* l *произвольных комплексных постоянных, причем*

$$l=\begin{cases}\chi+1, & \text{если } r\neq 1, r\neq\sqrt{2\pm\sqrt{3}},\\ \chi+3, & \text{если } r=1,\\ \chi+2, & \text{если } r=\sqrt{2\pm\sqrt{3}}.\end{cases}$$

Если $\chi<0$ *и* $r\neq 1$, $r\neq\sqrt{2\pm\sqrt{3}}$, *то однородная задача* $\boldsymbol{\rho}_2^0$ *неразрешима.*

Если $\chi<0$ *и* $r=1$, *то однородная задача* $\boldsymbol{\rho}_2^0$ *безусловно разрешима, и её общее решение, задаваемое формулой*

$$W(z)=\begin{cases}6C_2 z-\dfrac{6\bar{z}(C_1+3C_2 z^2)}{1+z\bar{z}}+12\left(\dfrac{\bar{z}}{1+z\bar{z}}\right)^2\cdot\left(C_1\cdot z+C_2\cdot z^3\right), & z\in T_1^+,\\ 0, & z\in T_1^-,\end{cases} \tag{16}$$

линейно зависит от двух произвольных комплексных постоянных C_1, C_2, *т. е.* $l=2$.

Если же $\chi<0$ *и* $r=\sqrt{2\pm\sqrt{3}}$, *то однородная задача* $\boldsymbol{\rho}_2^0$ *безусловно разрешима, и её общее решение, задается в виде*

$$W(z)=\begin{cases}2C-\dfrac{12Cz\bar{z}}{1+z\bar{z}}+12\left(\dfrac{\bar{z}}{1+z\bar{z}}\right)^2\cdot Cz^2, & z\in T_r^+,\\ 0, & z\in T_r^-,\end{cases}$$

и зависит от одной произвольной комплексной постоянной C, *т.е.* $l=1$.

На основании теоремы 2 можно сделать несколько важных выводов. Во-первых, из этой теоремы следует, что в случае $r=1$ картина разрешимости задачи $\boldsymbol{\rho}_2^0$ имеет «резонансный» характер, так как при изменении радиуса круга $T_r^+=\{z:|z|<r\}$ в пределах интервала $\sqrt{2-\sqrt{3}}<r<\sqrt{2+\sqrt{3}}$, именно при $r=1$, задача $\boldsymbol{\rho}_2^0$ имеет наибольшее число линейно независимых решений. Аналогичный характер картина разрешимости задачи $\boldsymbol{\rho}_2^0$ имеет при $r=\sqrt{2-\sqrt{3}}$ и $r=\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Наконец, пусть $W(r_1;z)$ и $W(r_2;z)$ – решения задачи $\boldsymbol{\rho}_2^0$ в областях $T_{r_1}^+ = \{z : |z| < r_1\}$ и $T_{r_2}^+ = \{z : |z| < r_2\}$ соответственно. Как видно из утверждения теоремы 2, если, например, $\chi < 0$, $r_1 = 1$ и $r_2 \in (1; \sqrt{2+\sqrt{3}})$, то для любого достаточно малого положительного числа ε при условии $|r_2 - r_1| < \varepsilon$ может случиться, что $|W(r_2;z) - W(r_1;z)| > \varepsilon$, так как в рассматриваемом случае $W(r_2;z) \equiv 0$, а $W(r_1;z)$ определяется формулой (16). Значит, решения задачи $\boldsymbol{\rho}_2^0$ неустойчивы по отношению к изменению границы рассматриваемой круговой области.

Таким образом, из теоремы 2 вытекает следующее важное утверждение.

Следствие. *Решения краевой задачи* $\boldsymbol{\rho}_2^0$ *неустойчивы по отношению к изменению границы круговой области.*

Литература

1. Расулов, К.М. Об одном методе решения краевой задачи типа Римана в классах квазигармонических функций произвольного рода / К.М. Расулов // Известия Смоленского государственного университета, 2015. – № 2/1. – С. 159–168.
2. Расулов, К.М. О краевой задаче типа Римана квазигармонических функций в круге неединичного радиуса / К.М. Расулов, Ш.С. Ханкишиева // Материалы XVII международной научной конференции «Системы компьютерной математики и их приложения». – Смоленск: Издательство СмолГУ, 2016. – Вып. 17. – С. 211–216.
3. Гахов, Ф.Д. Краевые задачи / Ф.Д. Гахов. – М: Наука, 1977. – 640 с.
4. Коддингтон, Э.А. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений / Э.А. Коддингтон, Н. Левинсон. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1958. – 474 с.

Поступила в редакцию 24 ноября 2017 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series “Mathematics. Mechanics. Physics”
2018, vol. 10, no. 3, pp. 52–58

DOI: 10.14529/mmph180306

ON THE INSTABILITY OF SOLUTIONS OF THE HOMOGENEOUS BOUNDARY VALUE PROBLEM OF RIEMANN TYPE FOR QUASIHARMONIC FUNCTIONS IN CIRCULAR DOMAINS

K.M. Rasulov, Sh.S. Khankishieva
Smolensk State University, Smolensk, Russian Federation
E-mail: kahrimanr@yandex.ru

We consider the boundary value problem of Riemann type (the conjugation problem) in the classes of piecewise quasiharmonic functions. A homogeneous problem of a Riemann type problem in the classes of piecewise quasiharmonic functions of the second kind in circular domains is studied in details. In particular, in this case a clear solution method is developed for a homogeneous problem of Riemann type, the logical essence of which consists in reducing the solution of the homogeneous problem under consideration to a sequential solution of the common homogeneous Riemann problem for analytic functions and two second-order linear differential Euler equations. Moreover, instability of the solutions of the homogeneous problem is determined with respect to the change in the radius value of the considered circular domain, and a complete picture of its solvability for different values of the index of the problem and the radius of the circular domain is constructed. It is proved that the main reason for the instability of the solutions of a homogeneous problem of Riemann type in classes of piecewise quasiharmonic functions of the second kind in circular domains with respect to the change in the radius value of the considered circular domain is the fact that the number of linear independent analytic solutions of homogeneous differential Euler equations, to which the desired Riemann type problem is reduced, depends

essentially on the radius of the considered circular region. In this paper we use the methods of the theory of functions of a complex variable, the theory of integral equations, and the analytic theory of differential equations.

Keywords: the boundary value problem of Riemann type; piecewise quasiharmonic function; differential equation of Euler; circular domains; radius of a circular domain.

References

1. Rasulov K.M. On the Method of Solution of the Riemann Type Boundary Value Problem in Classes of Quasiharmonic Functions of Arbitrary Genus. *Izvestiya Smolenskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2015, no. 2/1, pp. 159–168. (in Russ.).

2. Rasulov K.M., Khankishieva Sh.S. O kraevoy zadache tipa Rimana kvazigarmonicheskikh funktsiy v kruge needi-nichnogo radiusa (On a boundary-value problem of Riemann type of quasiharmonic functions in a circle of a non-unitary radius). *Materialy XVII mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii "Sistemy komp'yuternoy matematiki i ikh prilozheniya"* (Proc. XVII international scientific conference "Computer mathematics systems and their applications"), Smolensk, Izdatel'stvo SmolGU Publ., 2016, Issue 17, pp. 211–216. (in Russ.).

3. Gakhov F.D. *Kraevye zadachi* (Boundary value problems). Moscow, Nauka Publ., 1977, 640 p. (in Russ.).

4. Koddington E.A., Levinson N. *Teoriya obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy* (Theory of Ordinary Differential Equations). Moscow, Izd-vo inostrannoy literatury Publ., 1958, 474 p. (in Russ.).

Received November 24, 2017