

СЕДИМЕНТАЦИЯ МАЛОКОНЦЕНТРИРОВАННОЙ ПОЛИДИСПЕРСНОЙ ВЗВЕСИ СТОКСОВСКИХ ЧАСТИЦ В ПЛОСКОМ СЛОЕ

В.И. Ряжских, А.В. Ряжских

Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Российская Федерация
E-mail: ryazhskih_vi@mail.ru

На основе диффузионно-кинетического подхода выполнен аналитический анализ осаждения малоцентрированной полидисперсной взвеси стоксовских частиц в плоском слое покоящейся дисперсионной фазы (вязкая несжимаемая жидкость). При отсутствии перемешивания математическая модель для монодисперсных частиц, обобщенная на полидисперсный случай с использованием принципа суперпозиции концентрационных полей, представлена в виде начально-краевой задачи для дифференциального уравнения первого порядка в частных производных относительно функции плотности распределения частиц по размерам, решение которой записано аналитическим соотношением с помощью обобщенной функции Хэвисайда. Получены расчетные выражения для локальной счетной функции плотности распределения частиц в пространстве размеров, массовой концентрации в объеме и роста осадка, инвариантных физико-химическим свойствам гетерогенной системы. Показано, что найденное обобщенное решение может быть применено для дисперсного анализа взвеси как альтернативная методика седиментометрическому анализу, если известна эмпирическая относительная седиментационная кривая. Если исходная счетная функция плотности распределения частиц по размерам относится к экспоненциальному типу, то из безусловной задачи минимизации легко может быть вычислен среднечисленный размер частиц взвеси. Данный подход может быть обобщен на случай грубодисперсных взвесей, скорость осаждения которых не подчиняется закону Стокса, а также для произвольных исходных счетных функций плотности распределения частиц взвеси по размеру. В этом случае для нахождения функции плотности частиц по размеру применяется целевая функция, записанная в виде функционала, и задача его минимизации приводит с некоторой степенью приближения к искомой экспериментальной счетной функции плотности распределения частиц по размерам.

Ключевые слова: седиментация; полидисперсная взвесь; осадок; плоский слой; концентрация.

Введение. Процесс осаждения малоцентрированной полидисперсной взвеси находит широкое использование в энергетике, химической и пищевой технологиях [1, 2], а если при этом несущая среда является условно неподвижной, то этот процесс имеет фундаментальное значение в седиментометрическом анализе дисперсной фазы [3]. В частности, если скорость частиц постоянна, что означает уравнивание силы тяжести силами гидродинамического сопротивления, то такие частицы принято называть стоксовскими [4]. Анализ процесса осаждения с позиций механики гетерогенных сред вызывает ряд трудностей, связанных с идентификацией межфазной границы [5], что, в конечном счете, делает невозможным постановку краевых условий и применение интегро-дифференциального исчисления. Альтернативой этому является применение диффузионно-кинетической модели процесса осаждения [6], что с успехом апробировано при решении ряда задач [7, 8].

Постановка задачи. Рассмотрим плоский слой дисперсионной среды высотой h со свободной поверхностью, которая содержит равномерно распределенную дисперсную фазу малоцентрированных полидисперсных частиц. Направим ось Ox декартовой координаты с началом на

Механика

поверхности осаждения перпендикулярно к свободной поверхности, тогда диффузионно-кинетическая модель осаждения монодисперсной взвеси имеет вид [9]:

$$\frac{\partial n(x, \tau)}{\partial \tau} = w \frac{\partial n(x, \tau)}{\partial x} + D \frac{\partial^2 n(x, \tau)}{\partial x^2}; \quad (1)$$

$$n(x, 0) = n_0; \quad (2)$$

$$(w - k)n(0, \tau) + D \frac{\partial n(0, \tau)}{\partial x} = 0; \quad (3)$$

$$wn(h, \tau) + D \frac{\partial n(h, \tau)}{\partial x} = 0, \quad (4)$$

где τ, x – время и декартова координата; $n(x, \tau)$ – локальная счетная концентрация частиц размера l ; w – стоксовская скорость осаждения частиц размера l ; D – коэффициент конвективного перемешивания взвеси; k – кинетический коэффициент встраивания частиц в структуру осадка.

Если перемешивание отсутствует ($D = 0$), то из (3) следует, что $k \rightarrow w$, т. е. частицы, подошедшие к поверхности осаждения, беспрепятственно оказываются в осадке. Поэтому (1)–(4) трансформируется в систему:

$$\frac{\partial n(x, \tau)}{\partial \tau} = w \frac{\partial n(x, \tau)}{\partial x}, \quad (5)$$

$$n(x, \tau) = n_0, \quad (6)$$

$$n(0, \tau) \neq n_0, \quad (7)$$

$$n(h, \tau) = 0. \quad (8)$$

Из (5)–(8) следует, что

$$n(0, \tau) = [H(\tau) - H(\tau - h/w)]n_0,$$

где $H(\dots)$ – функция Хэвисайда. В силу малоконцентрированности взвеси система (5)–(8) может быть обобщена на полидисперсный случай, используя принцип суперпозиции концентрационных полей, т. е.

$$\frac{\partial f(x, l, \tau)}{\partial \tau} = w(l) \frac{\partial f(x, l, \tau)}{\partial x}, \quad (9)$$

$$f(x, l, 0) = f_0(l), \quad (10)$$

$$f(0, l, \tau) = \{H(\tau) - H[\tau - h/w(l)]\} f_0(l), \quad (11)$$

где $f_0(l)$, $f(x, l, \tau)$ – исходная и локальная счетные функции плотности распределения частиц по размерам.

В безразмерном виде система (9)–(11) такова:

$$\frac{\partial F(X, L, \bar{\theta})}{\partial \bar{\theta}} = L^2 \frac{\partial F(X, L, \bar{\theta})}{\partial X}, \quad (12)$$

$$F(X, L, 0) = F_0(L); \quad (13)$$

$$F(0, L, \bar{\theta}) = [H(\bar{\theta}) - H(\bar{\theta} - L^2)] F_0(L), \quad (14)$$

где $\bar{\theta} = w(\bar{l})\tau/h$; $X = x/h$; $L = l/\bar{l}$; $F(X, L, \bar{\theta}) = \bar{l}f^{(N)}(x, l, \tau)$; $F_0(L) = \bar{l}f_0^{(N)}(l)$;

$f^{(N)}(x, l, \tau) = f(x, l, \tau) / \int_{l_{\min}}^{l_{\max}} f_0(l) dl$; $f_0^{(N)}(l) = f_0(l) / \int_{l_{\min}}^{l_{\max}} f_0(l) dl$; $\bar{l} = \int_{l_{\min}}^{l_{\max}} f_0^{(N)}(l) dl$; l_{\min} , l_{\max} –

минимальный и максимальный размеры частиц взвеси.

Применяя одностороннее преобразование Лапласа по $\bar{\theta}$, получим решение (12)–(14)

$$F(X, L, \bar{\theta}) = \{H(\bar{\theta}) - H[\bar{\theta} - (1 - X)L^2]\} F_0(L). \quad (15)$$

С помощью (15) определены: локальная относительная массовая концентрация частиц во взвеси

$$C(X, \bar{\theta}) = \frac{c(x, \tau)}{c_0} = \frac{\int_{L_{\min}}^{L_{\max}} L^3 F(X, L, \bar{\theta}) dL}{\int_{L_{\min}}^{L_{\max}} F_0(L) dL}, \quad (16)$$

где $L_{\min} = l_{\min}/\bar{l}$, $L_{\max} = l_{\max}/\bar{l}$, $c(x, \tau) = k_V \rho_T \int_{l_{\min}}^{l_{\max}} l^3 f(x, l, \tau) dl$, $c_0 = k_V \rho_T \int_{l_{\min}}^{l_{\max}} l^3 f_0(l) dl$,

k_V – коэффициент формы частиц, ρ_T – плотность частиц; среднеобъемная относительная массовая концентрация частиц

$$\bar{C}(\bar{\theta}) = \int_0^1 C(X, \bar{\theta}) dX; \quad (17)$$

относительная толщина осадка

$$\Delta(\bar{\theta}) = \frac{\delta(\tau)}{\delta_0} = \frac{\int_{L_{\min}}^{L_{\max}} L^5 \left[\int_0^{\bar{\theta}} F(0, L, \xi) d\xi \right] dL}{\int_{L_{\min}}^{L_{\max}} L^3 F_0(L) dL}, \quad (18)$$

где

$$\delta(\tau) = \frac{k_V}{1-\varepsilon} \int_{l_{\min}}^{l_{\max}} w(l) l^3 \left[\int_0^{\tau} f(0, l, \xi) d\xi \right] dl; \quad \delta_0 = \frac{k_V}{1-\varepsilon} h \int_{l_{\min}}^{l_{\max}} l^3 f_0(l) dl; \quad \varepsilon - \text{порозность осадка взвеси.}$$

Пример расчета. В практике наиболее часто встречается экспоненциальный закон распределения взвеси, например, в процессах кристаллизации твердой фазы из растворов, объемной конденсации парообразных сред и т. д. В этом случае $F_0(L) = \exp(-L)$ и приближенно можно считать $L_{\min} = 0$, $L_{\max} \rightarrow \infty$. Заметим, что условие нормировки при этом выполняется автоматически. Тогда из (15) следует

$$F(X, L, \bar{\theta}) = \left\{ \text{H}(\bar{\theta}) - \text{H}[\bar{\theta} - (1-X)L^2] \right\} \exp(-L).$$

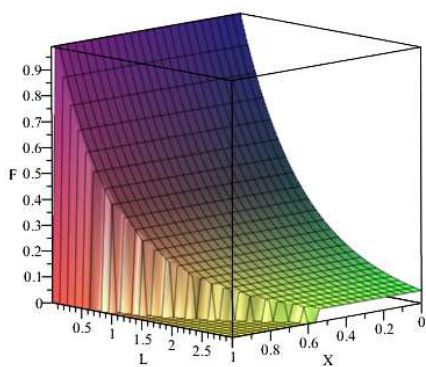


Рис. 1. Безразмерная функция плотности распределения частиц по размеру при $\bar{\theta} = 0,05$

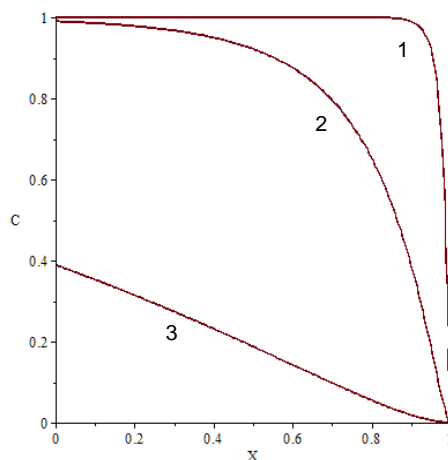


Рис. 2. Относительная массовая концентрация частиц при: 1 – $\bar{\theta} = 0,001$; 2 – $\bar{\theta} = 0,01$; 3 – $\bar{\theta} = 0,1$

Трансформирование $F(X, L, \bar{\theta})$ в процессе седиментации показано на рис. 1. Выражение для локальной относительной массовой концентрации частиц во взвеси (16) принимает вид (рис. 2)

$$C(X, \bar{\theta}) = \left[6 - (L^{*3} + 3L^{*2} + 6L^* + 6) \exp(-L^*) \right] / 6,$$

где $L^* = \sqrt{(1-X)/\bar{\theta}}$. Кинетика осветления взвеси в процессе осаждения есть

$$C(\bar{\theta}) = 2 \left[60\bar{\theta} - 3 - (60\bar{\theta} + 1/\bar{\theta} + 60/\sqrt{\bar{\theta}} + 27 + 7/\sqrt{\bar{\theta}}) \exp(-1/\sqrt{\bar{\theta}}) \right].$$

Относительная толщина осадка представлена в квадратурах

$$\sigma(\bar{\theta}) = \int_0^{\bar{\theta}} \left[120 - (\xi^{-5/2} + 5\xi^{-2} + 20\xi^{3/2} + 60\xi^{-1} + 120\xi^{-1} + 120) \exp(-0,5/\xi) \right] d\xi.$$

В частности, если известна экспериментальная относительная седиментационная кривая $\sigma_s(\tau)$, то решив оптимизационную задачу

$$|1 - \sigma(\alpha\tau)/\sigma_s(\tau)| \rightarrow \min_{\alpha},$$

в которой $\alpha = w(\bar{l})/h$, нетрудно найти $\bar{l} = \sqrt{\frac{18\rho\nu\alpha}{g(\rho_T - \rho)}}$, где ρ – плотность; ν – кинематическая вязкость несущей среды; g – ускорение свободного падения.

Заключение. Аналитический анализ позволил получить основные характеристики кинетики осаждения малоконцентрированной полидисперсной взвеси стоксовских частиц в неподвижной несущей среде инвариантно физико-химическим свойствам гетерогенной системы и на его основе предложить способ идентификации среднего размера взвеси по экспериментальной седиментационной кривой.

Литература

1. Берд, Р. Явления переноса / Р. Берд, В. Стьюарт, Е. Лайтфут. – М.: Химия, 1974. – 688 с.
2. Богомолов, А.В. Математическое обеспечение оценивания состояния материальных систем / А.В. Богомолов, И.Б. Ушаков, Ю.А. Кукушкин. – М.: Машиностроение. – Новые технологии, 2004. – 36 с.
3. Коузов, П.А. Основы анализа дисперсного состава промышленных пылей и измельченных материалов / П.А. Коузов. – Л.: Химия, 1974. – 279 с.
4. Хаппель, Дж. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса / Дж. Хаппель, Г. Бреннер. – М.: Мир, 1976. – 630 с.
5. Morel, C. Mathematical Modeling of Disperse Two-Phase Flows / C. Morel. – N.Y.: Springer International Publishing, 2015. – 350 с.
6. Броунштейн, В.Б. Диффузионная модель классификации частиц в разряженных суспензиях / В.Б. Броунштейн // Журнал прикладной химии. – 1983. – Т. 56, № 8. – С. 1788–1793.
7. Харин, В.М. К теории осаждения / В.М. Харин, В.И. Рязских // Теоретические основы химической технологии. – 1989. – Т. 23, № 5. – С. 651–658.
8. Харин, В.М. Кинетика осаждения примесей при испарительном охлаждении криогенных жидкостей / В.М. Харин, В.И. Рязских, Р.М. Завадских // Теоретические основы химической технологии. – 1996. – Т. 30, № 5. – С. 453–457.
9. Веригин, А.Н. Диффузия и седиментация мелкодисперсной однородной взвеси в отстойниках / А.Н. Веригин, С.В. Васильев // Теоретические основы химической технологии. – 1982. – Т. 16, № 3. – С. 374–380.

Поступила в редакцию 11 июня 2018 г.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2018, vol. 10, no. 3, pp. 67–71*

DOI: 10.14529/mmph180308

SEDIMENTATION OF A SMALL-CONCENTRATED POLYDISPERSE SUSPENSION OF STOKES PARTICLES IN A FLAT LAYER

V.I. Ryazhskikh, A.V. Ryazhskikh

Voronezh State Technical University, Voronezh, Russian Federation

E-mail: ryazhskikh_vi@mail.ru

On the basis of the diffusion-kinetic approach, an analytical analysis of the precipitation of a low-concentration polydisperse suspension of Stokes particles in a flat layer of a stationary dispersive phase (viscous incompressible liquid) is performed. In the absence of mixing, the mathematical model for

monodisperse particles, generalized to a polydisperse case using the principle of superposition of concentration fields, is presented in the form of an initial-boundary value problem for a first-order partial differential equation with respect to the particle size distribution function in dimensions, the solution of which is written in the analytic relation with the help of the generalized Heaviside function. The calculated expressions are obtained for the local counting function of the density of the particle distribution in the space of dimensions, mass concentration in the volume, and growth of the sediment, which are invariant to the physicochemical properties of the heterogeneous system. It is shown that the generalized solution found can be applied to the dispersion analysis of suspended matter as an alternative technique to sedimentometric analysis if the empirical relative sedimentation curve is known. If the initial counting function of the particle size distribution density refers to the exponential type, then the average number particle size of the suspension can easily be calculated from the unconditional minimization problem. This approach can be generalized to the case of coarse suspended solids, the rate of deposition of which does not obey the Stokes law, and also for arbitrary initial counting functions of the particle size distribution of the slurry in size. In this case, to find the particle density function with respect to size, we use the objective function written in the form of a functional and the minimization problem leads to a certain degree of approximation to the required experimental countable density distribution function for particles.

Keywords: sedimentation; polydisperse suspension; sediment; flat layer; concentration.

References

1. Bird R.B., Stewart W.E., Lightfoot E.N. *Transport phenomena*. NY: John Wiley, 1974, 688 p.
2. Bogomolov A.V., Ushakov I.B., Kukushkin Yu.A. *Matematicheskoe obespechenie otsenivaniya sostoyaniya material'nykh sistem* (Mathematical support for assessing the state of material systems), Moscow, Mashinostroenie – Noveye tekhnologii Publ., 2004, 36 p. (in Russ.).
3. Kouzov P.A. *Osnovy analiza dispersnogo sostava promyshlennykh pyley i izmel'chennykh materialov* (Fundamentals of analysis of the disperse composition of industrial dusts and crushed materials), Leningrad, Khimiya Publ., 1974, 279 p. (in Russ.).
4. Happel J., Brenner H. *Low Reynolds number hydrodynamics*. Prentice-hall, 1965, 553 p.
5. Morel C. *Mathematical Modeling of Disperse Two-Phase Flows*. NY: Springer International Publishing, 2015, 350 c. DOI: 10.1007/978-3-319-20104-7
6. Brounshtein V.B. Diffuzionnaya model klassifikatsii chastic v razryazhennyhm suspenziyahh (Diffusion model of classification of particles in discharged suspensions). *Zhurnal prikladnoi khimii*, 1983, Vol. 56, no. 8, pp. 1788–1793. (in Russ.).
7. Kharin V.M., Ryazhskikh V.I. K teorii osazhdeniya (To the theory of deposition). *Teoreticheskie osnovy khimicheskoy tekhnologii*, 1989, Vol. 23, no. 5, pp. 651–658. (in Russ.).
8. Kharin V.M., Ryazhskikh V.I., Zavadskikh R.M. Kinetics of sedimentation of impurities in the evaporative cooling of cryogenic liquids. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 1996, Vol. 30, no. 5, pp. 409–413. (in Russ.).
9. Verigin A.N., Vasil'ev S.V. Diffuziya i sedimentatsiya melkodispersnoy odnorodnoy vzvesi v otstoynikakh (Diffusion and sedimentation of a fine dispersed homogeneous suspension in sedimentation tanks). *Teoreticheskie osnovy khimicheskoy tekhnologii*, 1982, Vol. 16, no. 3, pp. 374–380. (in Russ.).

Received June 11, 2018