

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ПОРШНЯ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ГОРЯЩЕГО ГАЗА С УЧЕТОМ ЗАЗОРА МЕЖДУ ПОРШНЕМ И ТРУБОЙ

А.В. Геренштейн, Н.С. Мидоночева

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

E-mail: gerenshteinav@susu.ru

Рассматриваются математические модели пневматической системы, состоящей из трубки, закрытой с одной стороны и открытой с другой. В трубке находится поршень, ограничивающий некоторый объем сжатого газа. Для нахождения параметров движения поршня под действием давления расширяющегося газа строится математическая модель системы несколькими способами: с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений и с помощью уравнений в частных производных. В последнюю включаются такие уравнения, как уравнение движения, уравнение неразрывности и уравнение сохранения энергии, т. е. уравнения газовой динамики. Кроме того, определяются соответствующие краевые условия. При этом учитывается возможный нагрев газа и возможные потери некоторого объема газа сквозь имеющийся зазор между цилиндром и поршнем. Все уравнения, входящие в состав математической модели, приводятся к безразмерной форме. Для выполнения расчетов используются методы конечных разностей и характеристик, при которых все частные производные в уравнениях заменяются конечными разностями в узлах некоторой сетки. По имеющемуся шаблону находится приближенное значение каждого уравнения в каждом узле сетки по пространству, затем происходит переход на следующий временной слой. Расчеты выполняются до тех пор, пока поршень не достиг открытого конца трубы или до тех пор, пока поршень не начал замедляться. Затем проводится сравнение результатов, полученных с помощью рассматриваемых методов, по критериям быстродействия и точности, а также даются рекомендации относительно целесообразности использования каждого метода построения математической модели.

Ключевые слова: математическая модель; сжатый газ; пневматическая система.

Введение

Существующие методы расчета параметров пневматических систем не являются полностью приемлемыми. Связано это с тем, что при расчетах математических моделей точными аналитическими методами можно решить лишь некоторые простейшие задачи. Для решения более сложных задач применяются различные численные методы. Численный метод позволяет получить лишь приближенное решение задачи. Методы сравниваются между собой по критериям точности и быстродействия. Следовательно, некоторые методы решений являются более

предпочтительными, а некоторые – менее предпочтительными. Необходимо исследовать каждый метод и принять решение о его предпочтительности.

В данной работе рассматривается класс систем «поршень-труба» (рис. 1), предназначенных для создания

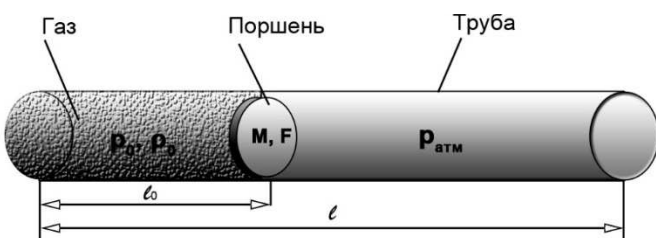


Рис. 1. Система «Труба-поршень» с зазором

Математика

ускоренного движения поршня. В общем виде подобного рода системы состоят из двух основных частей: герметичного с одной стороны цилиндра, который содержит сжатый и подогреваемый газ, и подвижного поршня, который под действием давления сжатого газа приводится в движение внутри цилиндра. В этом случае скорость поршня до достижения им конца цилиндра (до достижения максимальной скорости) имеет принципиальное значение (рис. 1) [1–10].

Кроме того, необходимо учитывать возможный нагрев газа в процессе движения поршня, а также возможный зазор между цилиндром и поршнем.

Цель работы – сравнить результаты, полученные с помощью рассматриваемых методов по критериям быстродействия и точности, и дать рекомендации относительно целесообразности использования каждого метода.

1. Обозначения

$u = u(x, t)$ – смещение частицы смеси в момент времени t . $\beta = 1 + \partial u / \partial x$ – деформация (удлинение) частицы смеси. $v = \partial u / \partial t$ – скорость частицы смеси. T – температура газа (Кельвин). c_p – удельная теплоемкость газа при постоянном давлении. c_v – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме. ρ – плотность частицы смеси в момент времени t . ρ_0 – плотность частицы смеси в момент времени $t = 0$, $\rho\beta = \rho_0$. p – давление в частице газа в момент времени t . $R = c_p - c_v$ – универсальная газовая постоянная. $\gamma = c_p / c_v$ – отношение удельных теплоемкостей. q – удельная мощность тепла, выделяемого сгорающим порошком. q_s – удельная мощность тепла, выделяемого внешним источником. F – площадь сечения трубы (и поршня). P – давление на поршень справа. l_0 – начальная длина участка трубы, занятой смесью. M – масса поршня. ν – доля массы твердой фазы (пороха, $\nu = \nu(t)$ – заданная функция времени).

2. Математическая модель задачи, построенная с помощью уравнений в частных производных

1.1. С учетом нагрева газа

В основе данной математической модели лежат уравнения газовой динамики [6–10]:

1.1.1. Уравнение неразрывности (совместности)

Имеет место:

$$\beta = 1 + u_x, v = u_t.$$

Ввиду равенства смешанных производных (предполагая их непрерывность) получим

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (1)$$

1.1.2. Уравнение движения

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (2)$$

1.1.3. Уравнение энергии

$$\frac{\partial}{\partial t}((1-\nu)c_v T) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} (pv) = qv + q_s. \quad (3)$$

Учитывая уравнения совместности, движения и Клапейрона, получим

$$\frac{1}{(\gamma-1)} \frac{\partial}{\partial t} (p\beta) + \frac{1}{\rho_0} p \frac{\partial}{\partial t} \beta = qv + q_s \quad (4)$$

или, дифференцируя произведение, деля на $p\beta$ и приводя подобные, получим

$$\frac{\gamma}{\beta} \frac{\partial \beta}{\partial t} + \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\rho_0 (qv + q_s) (\gamma - 1)}{p\beta}.$$

1.1.4. Начальные и краевые условия

В начальный момент времени (при $t=0$) в любом сечении плотность, давление и температура одна и та же, а скорость и деформация равны нулю, поэтому (рис. 2)

$$\rho(x, 0) = \rho_0, p(x, 0) = p_0, v(x, 0) = 0, \beta(x, 0) = 1.$$

На левом конце ($x = 0$) газ прилегает вплотную к закрытому концу трубы и неподвижен:

$$v(0, t) = 0. \quad (5)$$

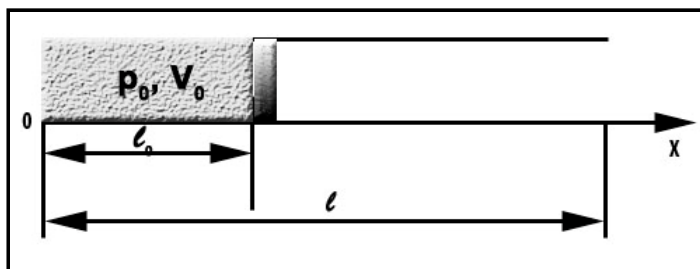


Рис. 2. Пневматическая система

На правом конце ($x = l_0$) поршень движется под действием давления газа и противодействия. Поэтому при $x = l_0$ имеем

$$\beta = \beta(l_0, t), v = v(l_0, t), p = p(l_0, t) \text{ и } Mv_t = (p - P)F. \quad (6)$$

1.2. С учетом зазора между цилиндром и поршнем

Рассмотрим пневматическую систему, изображенную на рис. 1. В данной системе поршень неплотно прилегает к стенкам трубки, и возникает промежуток (зазор) между поршнем и трубкой (например, при нарезном канале ствола, поршне нестандартной толщины и др.).

Заметим, что в начальный момент времени газ между поршнем и трубкой не просачивается, эта проблема возникает лишь после начала движения поршня. Имеем, что при движении поршня сквозь зазор в единицу времени просачивается некоторый объем газа. При этом уравнения математической модели не меняются, корректируются лишь методы расчета.

Также необходимо отметить, что расчет параметров движения поршня происходит в одномерном пространстве, и поэтому не учитывается характер течения газа сквозь зазор, а учитываются лишь потери некоторых объемов газа. Так, некоторый объем газа, вытекая через зазор, перестает участвовать в продвижении поршня вперед, и, следовательно, параметры движения поршня меняются.

3. Математическая модель задачи, построенная с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений

t – время, u – координата поршня ($u(0)=1$), $q = q(t)$ – мощность тепла, выделяемая единицей массы горящего пороха, v – скорость поршня ($v(0)=0$), p – давление, $p(0)=1$, c_v – удельная теплоемкость при постоянном давлении, γ – отношение удельных теплоемкостей, m – сумма масс газа и пороха, M – масса поршня, $\mu = m/(\gamma M)$, p_1 – противодействие на поршне. $a^2 = \gamma p / \rho = \gamma p \beta / \rho_0$ – квадрат скорости звука, v – начальная доля массы еще несгоревшего пороха, λ – показатель скорости сгорания пороха, F – площадь сечения трубы.

$$\frac{du}{dt} = v, \quad (7)$$

$$M \frac{dv}{dt} = F(p - p_1).$$

При равномерном расширении газ рассматривается как единое целое, поэтому применим условие (7) и выразим p через квадрат скорости звука. При этом система уравнений (1)–(3), (6) сводится к уравнению:

$$\frac{da^2}{dt} = \gamma(\gamma-1)q - (\gamma-1)\frac{a^2v}{u} - \frac{1}{3}v\mu\left(\frac{a^2}{u}(1-me^{\lambda t}) - p_1\right)\gamma(\gamma-1),$$

с краевыми условиями:

$$v(0,t) = 0, \quad (8)$$

$$Mv_t = (p - P)F. \quad (9)$$

4. Методы вычислений

1.1. Приведение к безразмерному виду

Обозначим $a_0 = \sqrt{\gamma p_0 / \rho_0}$ (исходная скорость звука).

Положим

$$t' = \frac{ta_0}{l_0}, x' = \frac{x}{l}, v' = \frac{v}{a_0}, p' = \frac{p}{p_0}, \mu = \frac{\rho_0 Fl_0}{M\gamma}, P' = \frac{P}{p_0}, q' = \frac{ql_0\gamma(\gamma-1)}{a_0^3}, q_s' = \frac{qsl_0\gamma(\gamma-1)}{a_0^3}.$$

Теперь под t, x, v, p, q, q_s будем подразумевать t', x', v', p', q', q_s' .

В безразмерных переменных получим уравнение совместности:

$$\frac{\partial\beta}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x}c. \quad (10)$$

Уравнение движения

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (11)$$

Уравнение энергии

$$\frac{\gamma}{\beta} \frac{\partial\beta}{\partial t} + \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{qv + q_s}{p\beta}. \quad (12)$$

Начальные условия (при $t = 0$)

$$p(x,0) = 1, v(x,0) = 0, \beta(x,0) = 1. \quad (13)$$

Условие на дне трубы ($x = 0$)

$$v(0,t) = 0.$$

Условие на поршне примет вид (при $x = 1$):

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \mu(p - P).$$

После решения задачи (8)–(13) надо параметры t, x, v, p заменить на t', x', v', p' , а затем эти «штрихованные» параметры с помощью соотношений (12) снова заменить на исходные параметры t, x, v, a . Эти манипуляции выполняются исключительно для упрощения записей.

Замечание. Обозначим

$$g(t) = \int_0^t \frac{q(\tau)v(\tau) + q_s(\tau)}{p(\tau)\beta(\tau)} d\tau.$$

В уравнении (3) перейдем к квадратурам. Получим

$$p = p_0 \left(\frac{\beta_0}{\beta} \right)^\gamma e^{g(t)}.$$

Произведя некоторую перегруппировку сомножителей, получим такое представление [1–5]

$$p = \int_0^t \frac{q(\tau)v(\tau) + q_s(\tau)}{\beta(\tau)} d\tau.$$

1.2. Метод конечных разностей

В соответствии с шаблоном (рис. 3) получим следующее соотношение для уравнения совместности:

$$\beta_i = \beta_i + \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2h} c\tau.$$

Для уравнения движения:

$$v_i = v_i + \frac{p_{i-1} - p_{i+1}}{2h} \frac{\tau}{\gamma}.$$

Уравнение энергии:

$$p = \int_0^t \frac{q(\tau)v(\tau) + q_s(\tau)}{\beta(\tau)} d\tau.$$

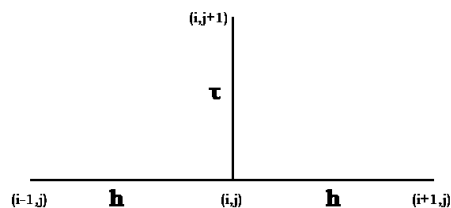


Рис. 3. Шаблон

1.3. Учет зазора между поршнем и трубкой

Для выполнения расчетов с учетом зазора между поршнем и трубкой так же строится сетка по методу конечных разностей, то есть полость трубки разбивается на участки, как показано на рис. 4

Затем на первом шаге работы метода считаем, что прилегающий к поршню слой под номером n полностью вытек сквозь зазор между поршнем и трубкой. Тогда необходимо скорректировать положение поршня, и, поскольку реальное продвижение поршня в направлении незакрытого конца трубки меньше рассчитанного, то мы «сдвигаем» поршень в противоположном направлении. То есть новое, скорректированное положение поршня более соответствует действительности.

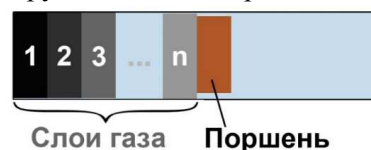


Рис. 4. Схема расчета параметров движения поршня

Затем наступает очередь слоя $n-1$, затем $n-2$ и т. д.

5. Сравнение математических моделей

Сравнение математических моделей, в основе которых лежат обыкновенные ДУ и уравнения газовой динамики с учетом нагрева газа (подогрев $2 \cdot 10^{+7}$ Дж/кг): решение, полученное с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений: время 0,00240744 с, деформация 11,5002, путь 0,500009 м, скорость 235,899 м/с, давление 1,65846 атм. Среднее время работы метода 0,06 с.

С помощью уравнений газовой динамики: время 0.00240771 с, деформация 11,5789, путь 0,500003 м, скорость 235,87 м/сек, давление 1,64565 атм. Среднее время работы метода 7 с.

Разность скоростей: 0,02879 м/с, что в процентах составляет: 0,012206 %. Разность путей: 0,006263, что в процентах: 0,001253 % (рис. 5).

Полученные данные показывают, что метод обыкновенных дифференциальных уравнений позволяет получить решение задачи в несколько раз быстрее (в 117 раз для данного примера). При этом метод конечных разностей более предпочтителен, чем метод характеристик.

6. Практическая значимость

Применяемые математического моделирования способы применяются к расчету параметров пневматических систем с поршнем.

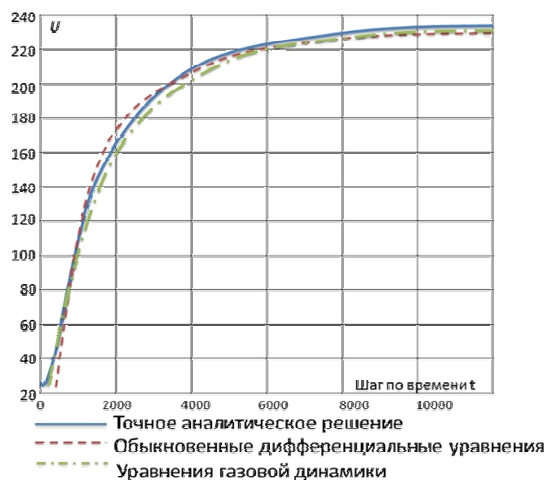


Рис. 5. График зависимости скорости поршня от времени

Выводы

– В ходе исследования были рассмотрены методы построения моделей «труба-поршень» и выявлены их недостатки;

– построены математические модели движения поршня в трубе с учетом давления газа при равномерном и неравномерном расширении газа, с учетом нагрева газа и его проникновением в зазор между поршнем и трубой;

– сравнительный анализ математических моделей позволил сделать следующие выводы: решение, полученное в случае уравнений газовой динамики, является более точным, нежели в случае обыкновенных дифференциальных уравнений: отклонения от точных аналитических решений в простых задачах составляют не более 0,4–1,1 % (тогда как в случае обыкновенных дифференциальных уравнений до 1,3 %);

– но при рассмотрении нагрева газа метод обыкновенных дифференциальных уравнений позволяет получить решение почти в 117 раз быстрее, нежели метод уравнений газовой динамики при незначительной разнице в результатах. При этом метод конечных разностей более предпочтителен, чем метод характеристик.

Литература

1. Клейман, Я.З. Скорость звука в смесях, содержащих взвешенные частицы / Я.З. Клейман // Акустический журнал. – 1961. – Т. 7, № 2. – С. 262–264.
2. Клейман, Я.З. О распространении сильных разрывов в многокомпонентной среде / Я.З. Клейман // Прикл. математика и механика. – 1958. – Т. 22, № 2. – С. 197–205.
3. Клейман Я.З. Некоторые особенности движения смесей / Я.З. Клейман // Акустический журнал. – 1959. – Т. 5, № 2. – С. 157–165.
4. Рахматулин, Х.А. Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред / Х.А. Рахматулин // Прикладная математика и механика. – 1956. – Т. 20, № 2. – С. 184–195.
5. Голубятников, А.Н. Интегральные неравенства в задачах газовой динамики / А.Н. Голубятников // Аэромеханика и газовая динамика. – 2001. – № 1. – С. 74–81.
6. Голубятников, А.Н. К оптимизации ускорения тела в классе движений толкающего газа с однородной деформацией / А.Н. Голубятников, Н.Е. Леонтьев // Аэромеханика и газовая динамика. – 2001. – № 2. – С. 27–34.
7. Кушнер, Е.Н. Нормальные формы некоторых уравнений газовой динамики / Е.Н. Кушнер // Научный вестник Московского государственного технического университета гражданской авиации. – 2013. – № 194. – С. 20–23.
8. Баутин, С.П. Одно точное стационарное решение системы уравнений газовой динамики / С.П. Баутин, А.Г. Обухов // Известия высших учебных заведений. Нефть и газ. – 2013. – № 4. – С. 81–86.
9. Рылов, А.И. Функциональная зависимость между законами сохранения газовой динамики, отвечающими разделению переменных / А.И. Рылов // Доклады Академии наук. – 2014. – Т. 454, № 6. – С. 647–650.
10. Газодинамические основы внутренней баллистики / С.А. Бетехтин, А.М. Веницкий, М.С. Горохов и др. – М.: Оборонгиз, 1957. – 384 с.
11. Жаровцев, В.В. Математическое моделирование и оптимальное проектирование баллистических установок / В.В. Жаровцев, Л.В. Комаровский, Е.И. Погорелов. – Томск: Издательство Томского университета, 1989. – 253 с.
12. Корнер, Дж. Внутренняя баллистика орудий / Дж. Корнер. – М.: Издательство иностранной литературы, 1953. – 462 с.
13. Геренштейн, А.В. Математическая модель движения поршня в трубе при действии давления газа / А.В. Геренштейн, Н.С. Кастрюлина // XVII Международная научно-практическая конференция: «Научное обозрение физико-математических и технических наук в XXI веке». – 2015. – №5(17). – С. 134–138.

Поступила в редакцию 11 октября 2017 г.

MATHEMATICAL SIMULATION OF PNEUMATIC SYSTEM WITH A CLEARANCE BETWEEN THE PISTON AND THE PIPE

A.V. Herreinstein, N.S. Midonocheva

South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

E-mail: gerenshteinav@susu.ru

The article regards mathematical models of pneumatic system, consisting of a pipe which is closed from one end and open from the other. In the pipe, there is a piston that limits some volume of compressed gas. In order to determine parameters of the piston's motion under the pressure of expanding gas, mathematical model of the system gets constructed using several methods: with the use of ordinary differential equations, and with the use of partial differential equations. The last method includes such equations as motion equation, continuity equation, and energy conservation equation, i.e. the equations of gas dynamics. Besides, corresponding boundary conditions get determined. At that, possible heating of the gas and probable loss of some volume of the gas through an existing clearance between the cylinder and the piston are taken into account. All equations included into the mathematical model get reduced to the dimensionless form. Methods of finite differences and characteristics are used for calculations, at which all partial derivatives in equations get replaced with finite differences in nodes of a grid. By the existing template, approximate value of each equation gets determined in each node of the grid by the space; then a transition to the next temporal layer takes place. Calculations are being performed either until the piston reaches the open end of the tube or until the piston started to slow down. After that, results obtained with the use of methods under consideration get compared by the criteria of fast operation and accuracy, and recommendations regarding advisability of using each method for construction of a mathematical model get provided.

Keywords: mathematical model; compressed gas; pneumatic system.

References

1. Kleyman Ya.Z. *Akusticheskiy zhurnal*, 1961, Vol. 7, no. 2, pp. 262–264. (in Russ.).
2. Kleyman Ya.Z. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 1958, Vol. 22, no. 2, pp. 197–205. (in Russ.).
3. Kleyman Ya.Z. *Akusticheskiy zhurnal*, 1959, Vol. 5, № 2, pp. 157–165. (in Russ.).
4. Rakhmatulin Kh.A. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 1956, Vol. 20, no. 2, pp. 184–195. (in Russ.).
5. Golubyatnikov A.N. *Aeromekhanika i gazovaya dinamika*, 2001, no.1, pp. 74–81. (in Russ.).
6. Golubyatnikov A.N., Leont'ev N.E. *Aeromekhanika i gazovaya dinamika*, 2001, no. 2, pp. 27–34. (in Russ.).
7. Kushner E.N. Normal FORMS of Some Gas Dynamics Equations. *Civil Aviation High Technologies*, 2013, no. 194, pp. 20–23. (in Russ.).
8. Bautin S.P., Obukhov A.G. A single exact stationary solution of the gas dynamics equations system. *Proceedings of Higher Educational Establishments. Oil and Gas*, 2013, no. 4, pp. 81–86. (in Russ.).
9. Rylov A.I. *Doklady Akademii nauk*, 2014, Vol. 454, no. 6, pp. 647–650. DOI: 10.7868/S0869565214060073
10. Betekhtin S.A., Vinitskiy A.M., Gorokhov M.S. *et al. Gazodinamicheskie osnovy vnutrenney ballistiki* (Gas dynamic fundamentals of internal ballistics). Moscow, Oborongiz Publ., 1957, 384 p. (in Russ.).
11. Zharovtsev V.V., Komarovskiy L.V., Pogorelov E.I. *Matematicheskoe modelirovanie i optimal'noe proektirovanie ballisticheskikh ustanovok* (Mathematical modeling and optimal design of ballistic installations). Tomsk, Izdatel'stvo Tomskogo universiteta Publ., 1989, 253 p. (in Russ.).

12. Korner, Dzh. *Vnutrennyaya ballistika orudiy* (Theory of Interior Ballistics of Guns). Moscow, Izdatel'stvo inostrannoy literatury Publ., 1953, 462 p. (in Russ.). [Corner, J., Theory of Interior Ballistics of Guns, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1950, 443 p.]

13. Gerenshteyn A.V., Kastyulina N.S. Matematicheskaya model' dvizheniya porshnya v trube pri deystvii davleniya gaza (Mathematical model of piston motion in a pipe under the action of gas pressure). *XVII Mezhdunarodnaya nauchno-prakticheskaya konferentsiya: "Nauchnoe obozrenie fiziko-matematicheskikh i tekhnicheskikh nauk v XXI veke"* (Proc. XVII International Scientific and Practical Conference: "Scientific Review of Physical, Mathematical and Technical Sciences in the 21st Century"), 2015, no. 5(17), pp. 134–138. (in Russ.).

Received October 11, 2017