

# ОСОБЕННОСТИ ПОВЕДЕНИЯ ПОПЕРЕЧНОЙ ДЕФОРМАЦИИ И КОЭФФИЦИЕНТА ПУАССОНА ИЗОТРОПНЫХ РЕОНОМНЫХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ, ОПИСЫВАЕМЫЕ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИЕЙ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

**А.В. Хохлов**

НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация

E-mail: andrey-khokhlov@ya.ru

Аналитически исследуются возможности линейного интегрального определяющего соотношения вязкоупругости Больцмана–Вольтерры для изотропных стабильных реономных материалов по описанию комплекса моделируемых реологических эффектов, связанных с возможными (наблюдаемыми в испытаниях материалов) типами поведения поперечной деформации и коэффициента Пуассона при одноосном нагружении. Рассматриваемое соотношение пренебрегает влиянием шаровой и девиаторной частей тензоров напряжений и деформаций друг на друга и влиянием их третьих инвариантов (параметров Лоде–Надаи) и содержит две произвольные материальные функции одного аргумента (функции объемной и сдвиговой ползучести). При минимальных (необходимых) ограничениях, наложенных на функции ползучести изучены выражения для коэффициента Пуассона при одноосном растяжении или сжатии постоянной нагрузкой через две функции ползучести и время. Доказаны критерии отрицательности, постоянства, возрастания, убывания и немонотонности коэффициента Пуассона (в зависимости от свойств функции объемной и сдвиговой ползучести) и точная универсальная двусторонняя оценка для диапазона его значений: для произвольных (возрастающих) функций ползучести величина коэффициента Пуассона в любой момент времени лежит в отрезке от минус единицы до одной второй. Все эти эффекты и доказанные общие утверждения проиллюстрированы на конкретных примерах моделей с классическими функциями ползучести и фрактальных моделей.

*Ключевые слова:* вязкоупругость; сжимаемость; осевая ползучесть; объемная ползучесть; немонотонность поперечной деформации; отрицательность коэффициента Пуассона.

## Введение

Данная статья продолжает цикл работ [1–8] по системному изучению комплекса моделируемых реологических эффектов, границ области применимости и сфер влияния материальных функций (МФ) линейного определяющего соотношения (ОС) вязкоупругости

$$\varepsilon_{ij}(t) = e_{ij} + \varepsilon_0 \delta_{ij}, \quad e_{ij}(t) = \frac{3}{2} \Pi s_{ij}(t), \quad \theta = \Pi_0 \sigma_0, \quad (1)$$

$$\sigma_0(t) = \sigma_{ii}(t)/3, \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij}, \quad \theta(t) = 3\varepsilon_0 = \varepsilon_{ii}(t),$$

$$\Pi y = \int_0^t \Pi(t-\tau) dy(\tau), \quad \Pi_0 y = \int_0^t \Pi_0(t-\tau) dy(\tau), \quad t > 0, \quad (2)$$

с двумя произвольными МФ  $\Pi(t)$  и  $\Pi_0(t)$  (функциями сдвиговой и объемной ползучести) и физически нелинейного ОС

$$\varepsilon_{ij}(t) = \frac{3}{2} \Phi(L(t)) \sigma(t)^{-1} [\sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij}] + \frac{1}{3} \Phi_0(L_0(t)) \delta_{ij}, \quad L(t) = \Pi \sigma, \quad L_0(t) = \Pi_0 \sigma_0, \quad (3)$$

с четырьмя произвольными МФ  $\Pi(t)$ ,  $\Phi(x)$ ,  $\Pi_0(t)$ ,  $\Phi_0(x)$ , представляющего собой один из вариантов распространения на трехосный случай нелинейного уравнения наследственности

$$\varphi(\varepsilon(t)) = \int_0^t \Pi(t-\tau) d\sigma(\tau),$$

предложенного Ю.Н. Работновым в качестве обобщения одноосного линейного ОС (1) путем введения второй МФ  $\varphi(u)$  [9, 10].

ОС (1) описывает процессы изотермического деформирования нестареющих изотропных вязкоупругих сред [11–14]; оно связывает истории изменения тензоров (малых) деформаций  $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$  и напряжений  $\boldsymbol{\sigma}(t)$  в произвольной точке тела в предположении отсутствия взаимного влияния шаровых и девиаторных частей тензоров  $\mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - \varepsilon_0 \mathbf{I}$  и  $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \sigma_0 \mathbf{I}$  (т. е. независимости объемной деформации  $\theta(t)$  от касательных напряжений, а сдвиговых деформаций – от среднего напряжения  $\sigma_0(t)$ ) и пренебрегая влиянием третьих инвариантов тензоров (или их параметров Лодэ). Входные процессы  $\boldsymbol{\sigma}(t)$  предполагаются кусочно-гладкими при  $t > 0$ , а время и компоненты тензора напряжений – безразмерными. Множитель  $3/2$  вынесен из  $\Pi(t)$  в (1) для удобства сравнения с результатами анализа нелинейного ОС (3).

Цель статьи – аналитическое исследование характерных свойств и возможных типов поведения коэффициента Пуассона  $\nu = -\varepsilon_{\perp} / \varepsilon_{\parallel}$ , которые порождает ОС (1) с произвольными функциями сдвиговой и объемной ползучести при одноосном нагружении  $\sigma_{11}(t) = \bar{\sigma}h(t)$  постоянной нагрузкой ( $h(t)$  – функция Хевисайда).

Коэффициент Пуассона (КоП) изотропных реономных материалов при одноосном нагружении не постоянен, а зависит от времени (от продольной деформации  $\varepsilon_{\parallel}(t)$ ) и программы нагружения. Зависимости поперечной и объемной деформаций ( $\varepsilon_{\perp}$  и  $\theta$ ) от времени и осевой деформации  $\varepsilon_{\parallel}$ , поведение и диапазоны значений КоП для многих полимеров, дисперсно наполненных композитов (твердых топлив, асфальтобетонов, АБС-пластиков), прессованных порошковых композитов, сплавов, металлических и полимерных пен, льдов, грунтов, горных пород весьма разнообразны даже в случае одноосных нагружений и малых деформаций, даже в испытаниях на ползучесть при постоянной нагрузке или на релаксацию [14–47]. У большинства металлов, многих стекол, полимеров (например, полиэтиленов высокой плотности) и порошковых композитов наблюдается монотонное возрастание  $\nu$  с ростом  $\varepsilon_{\parallel}(t)$  [24–29]. У многих реономных материалов, как достаточно хрупких, так и высокоэластичных (твердое топливо, асфальтобетон, АБС-пластики, чугун и т. п.) наблюдается убывание  $\nu(t)$ , свидетельствующее о необратимом изменении объема при растяжении или сжатии [21, 30–35]. У некоторых объемная деформация и КоП меняются немонотонно и меняют знак [36]. В последние три десятилетия обнаружены, активно конструируются и исследуются новые материалы с отрицательным КоП [37–47]. Поведение и величина КоП изотропных композитных материалов зависят от объемной доли (дисперсного) наполнителя, от форм и размеров его частиц, свойств адгезионных связей с матрицей, степени кристалличности матрицы, текущего уровня поврежденности, предыстории нагружения и термообработки и многих иных факторов.

Объемную ползучесть, изменение КоП и вида напряженного или деформированного состояний, и типичные механические эффекты, связанные с ними, следует учитывать при обработке и интерпретации кривых испытаний наследственных материалов (в частности, при определении твердости, модуля упругости и других механических свойств пленок, покрытий и поверхностных слоев материалов методами (нано)индентирования [48–51]) и при выборе и идентификации определяющего соотношения для моделирования их поведения. Для выбора того или иного ОС для описания поведения некоторого материала (и дальнейшего совершенствования и обобщения ОС) важно знать, какие механические эффекты оно способно моделировать и при каких требованиях к материальным функциям, в частности, – какие из упомянутых эффектов, связанных с объемной и поперечной деформациями. Для этого необходимо системное аналитическое исследование общих свойств кривых релаксации, ползучести и деформирования, которые порождает применяемое ОС с произвольными МФ при разных типовых программах нагружения, и их зависимости от параметров программ нагружения и характеристик материальных функций. В частности – системное исследование арсенала возможностей (круга моделируемых и не моделируемых эффектов) и удобных для проверки по данным тех или иных испытаний материалов индикаторов применимости линейного ОС (1). Ведь оно играет роль базы для сопоставления, своеобразной «системы отсчета», по отношению к которой естественно изучать эффекты нелинейности, наблюдаемые в испытаниях материалов и описываемые

различными нелинейными ОС (но не описываемые линейным). Нередко случается, что нелинейности поведения материала приписывают эффекты, адекватно описываемые в рамках линейной теории, которые вытекают лишь из наличия наследственности (памяти) и оказываются присущими *всем* материалам с наследственностью, работающим в линейной области (при достаточно малых деформациях и скоростях) [1, 3, 4].

### 1. Минимальные ограничения на функции ползучести линейного ОС вязкоупругости

Обращение ОС (1), как известно, имеет вид

$$\sigma_0 = \mathbf{R}_0 \theta, \quad s_{ij}(t) = \frac{2}{3} \mathbf{R} e_{ij}, \quad \mathbf{R} y := \int_0^t R(t-\tau) dy(\tau), \quad \mathbf{R}_0 y := \int_0^t R_0(t-\tau) dy(\tau), \quad t > 0, \quad (4)$$

где функции релаксации  $R(t)$  и  $R_0(t)$  связаны с  $\Pi$  и  $\Pi_0$  интегральными уравнениями

$$\int_0^t R(t-\tau) \Pi(\tau) d\tau = t, \quad \int_0^t R_0(t-\tau) \Pi_0(\tau) d\tau = t, \quad t > 0. \quad (5)$$

Функции ползучести и релаксации  $\Pi(t)$ ,  $\Pi_0(t)$ ,  $R(t)$ ,  $R_0(t)$  в ОС (1),(4) предполагаются [11–14] положительными и дифференцируемыми на  $(0; \infty)$ , функции  $\Pi$  и  $\Pi_0$  – возрастающими и выпуклыми вверх [1, 3, 4, 13], а  $R$  и  $R_0$  – убывающими и выпуклыми вниз на  $(0; \infty)$ ,  $R$  и  $R_0$  могут иметь интегрируемую особенность или  $\delta$ -сингулярность в т.  $t = 0$  (слагаемое  $\eta \delta(t)$ ,  $\eta > 0$ ,  $\delta(t)$  – дельта-функция). Из этих условий следует, в частности, существование пределов  $R(+\infty) = \inf R(t) \geq 0$ ,  $R(0) = \sup R(t) > 0$  ( $y(0) := y(0+)$  – краткое обозначение для предела функции  $y(t)$  справа в т.  $t = 0$ ;  $R(0) = +\infty$ , если  $R(t)$  не ограничена сверху) и  $\Pi(0) = \inf \Pi(t) \geq 0$ . Если  $\Pi(0) \neq 0$  и  $\Pi_0(0) \neq 0$  (такие модели будем называть регулярными), то  $R(0) = 1/\Pi(0) < \infty$  и  $R_0(0) = 1/\Pi_0(0) < \infty$  (т. е. мгновенный модуль сдвига  $G = \frac{2}{3} R(0)$  и объемный модуль  $K = R_0(0)$  диаграмм деформирования с постоянной скоростью конечны [2]).

Все структурные реологические модели, собранные из линейных пружин и демпферов посредством последовательных и параллельных соединений, описываются ОС (1). Функция ползучести любой реологической модели – сумма экспонент с отрицательными показателями и коэффициентами, и, возможно, функции  $\alpha t + \beta$ ,  $\alpha, \beta \geq 0$ , а функция релаксации – сумма экспонент с отрицательными показателями и положительными коэффициентами и, возможно, постоянной  $\beta \geq 0$  и сингулярности  $\eta \delta(t)$ ,  $\eta \geq 0$ . Например, семейство функций

$$\Pi(t) = \alpha t + \beta - \gamma e^{-\lambda t}, \quad \lambda > 0, \quad \alpha, \beta \geq 0, \quad \gamma \in [0, \beta], \quad (6)$$

удовлетворяет всем ограничениям на МФ и в случае  $\gamma \in (0; \beta)$ ,  $\alpha, \beta > 0$ , порождает все четыре структурно различные (но эквивалентные [1]) четырехзвенные модели из двух пружин и двух демпферов (они регулярны, т. е. у них  $\Pi(0) \neq 0$ ), а при  $\alpha = 0$  – трехзвенные модели Кельвина и Пойнтинга–Томпсона с одним демпфером (они регулярны и эквивалентны). Так как  $\Pi(0) = \beta - \gamma$ , то семейство (6) порождает нерегулярные модели лишь в случае  $\gamma = \beta$ : при  $\lambda \beta = 0$  – ньютоновскую жидкость ( $R = \eta \delta(t)$ ), при  $\alpha = 0$  – модель Фойгта, при  $\alpha > 0$  – обе трехзвенные модели с одной пружиной и двумя демпферами. При  $\gamma = 0$  (6) даёт модель Максвелла.

### 2. Кривые ползучести, порождаемые соотношением (1) при одноосном растяжении

Рассмотрим мгновенное одноосное нагружение  $\sigma_{11}(t) = \bar{\sigma} h(t)$ ,  $h(t)$  – функция Хевисайда (ее в дальнейшем будем опускать, полагая, что  $t > 0$ ), т. е.  $\sigma_{11}(t) = \bar{\sigma} = \text{const}$ , а остальные компоненты тензора напряжений равны нулю. Тогда  $\sigma_0 = \frac{1}{3} \bar{\sigma} h(t)$ , девиатор напряжений – диагональный тензор  $s = \frac{1}{3} \bar{\sigma} h(t) \text{diag}(2, -1, -1)$ , а из (1) следует, что девиатор деформаций – тоже диагональный тензор  $e = 0,5 \bar{\sigma} \Pi(t) \text{diag}(2, -1, -1)$ , т. е.  $e_{ij} = 0$  при  $i \neq j$  и

$$e_{11} = \bar{\sigma} \Pi(t), \quad e_{22} = e_{33} = -\frac{1}{2} \bar{\sigma} \Pi(t), \quad \theta(t; \bar{\sigma}) = \frac{1}{3} \bar{\sigma} \Pi_0(t), \quad t > 0. \quad (7)$$

У тензора деформаций  $\varepsilon_{ij} = e_{ij} + \varepsilon_0 \delta_{ij}$  отличны от нуля только диагональные компоненты  $\varepsilon_{ii}$ :

$$\varepsilon_{11}(t; \bar{\sigma}) = \bar{\sigma} \Pi(t) + \frac{1}{9} \bar{\sigma} \Pi_0(t) = \frac{1}{9} \bar{\sigma} (9\Pi(t) + \Pi_0(t)), \quad t > 0, \quad (8)$$

$$\varepsilon_{22}(t; \bar{\sigma}) = \varepsilon_{33}(t; \bar{\sigma}) = -\frac{1}{2} \bar{\sigma} \Pi(t) + \frac{1}{9} \bar{\sigma} \Pi_0(t) = \frac{1}{18} \bar{\sigma} (-9\Pi(t) + 2\Pi_0(t)). \quad (9)$$

Уравнения (7)–(9) задают семейства кривых объемной, осевой и поперечной ползучести. Из ограничений, наложенных на ФП  $\Pi$  и  $\Pi_0$ , следует, что для любого  $\bar{\sigma} > 0$  (будем для определенности рассматривать случай растяжения)  $\varepsilon(t)$ ,  $\theta(t)$  и  $\varepsilon_{11}(t)$  положительны, монотонно возрастают и выпуклы вверх, а с ростом  $\bar{\sigma}$  смещаются вверх по оси деформации. Поперечная деформация  $\varepsilon_{\perp} = \varepsilon_{22}(t)$  и ее модуль не обязаны быть ни монотонными, ни выпуклыми вверх функциями: они могут убывать на всем интервале  $t > 0$ , могут иметь точки экстремума и менять знак. Так как из (9)  $\dot{\varepsilon}_{\perp}(t) = -\frac{1}{2} \bar{\sigma} \dot{\Pi}(t) + \frac{1}{9} \bar{\sigma} \dot{\Pi}_0(t)$ ,  $\ddot{\varepsilon}_{\perp}(t) = -\frac{1}{2} \bar{\sigma} \ddot{\Pi}(t) + \frac{1}{9} \bar{\sigma} \ddot{\Pi}_0(t)$ , то при  $\bar{\sigma} > 0$  критерии (нестроого) возрастания и выпуклости вниз  $\varepsilon_{\perp}(t)$  на некотором интервале времени имеют вид  $\dot{\Pi}_0(t) \geq \frac{9}{2} \dot{\Pi}(t)$ ,  $\ddot{\Pi}_0(t) \geq \frac{9}{2} \ddot{\Pi}(t)$ .

**Пример 1.** Для ОС (1) с (ограниченными) ФП классической модели Кельвина

$$\Pi = \beta - \gamma e^{-\lambda t}, \quad \Pi_0 = \beta_0 - \gamma_0 e^{-\lambda_0 t}, \quad \lambda, \beta, \lambda_0, \beta_0 > 0, \quad \gamma \in (0; \beta), \quad \gamma_0 \in (0; \beta_0), \quad (10)$$

имеем  $\varepsilon_{\perp}(t; \bar{\sigma}) = \frac{1}{18} \bar{\sigma} (-9\beta + 2\beta_0 + 9\gamma e^{-\lambda t} - 2\gamma_0 e^{-\lambda_0 t})$ . При  $t \rightarrow \infty$   $\varepsilon_{\perp}(t; \bar{\sigma})$  стремится к горизонтальной асимптоте  $\varepsilon_{\perp} = \frac{1}{18} \bar{\sigma} (2\beta_0 - 9\beta)$ , не зависящей от  $\lambda$  и  $\lambda_0$ . Скорость ползучести  $\dot{\varepsilon}_{\perp}(t; \bar{\sigma}) = \frac{1}{18} \bar{\sigma} (-9\gamma\lambda e^{-\lambda t} + 2\gamma_0\lambda_0 e^{-\lambda_0 t})$  может менять знак; из условия экстремума  $9\gamma\lambda e^{-\lambda t} = 2\gamma_0\lambda_0 e^{-\lambda_0 t}$  при  $\lambda \neq \lambda_0$  находится (единственная) точка экстремума  $t_m = (\ln \mu) / (\lambda_0 - \lambda)$ ,  $\mu = 4,5\gamma_0\lambda_0 / (\gamma\lambda)$ , если  $t_m > 0$  (т. е.  $\lambda_0 > \lambda$  &  $\mu > 1$  или  $\lambda_0 < \lambda$  &  $\mu < 1$ ). Так как  $\varepsilon_{\perp}(t_m) = \frac{1}{18} \bar{\sigma} [2\beta_0 - 9\beta + 9\gamma(1 - \lambda\lambda_0^{-1})e^{-\lambda t_m}]$ , то  $t_m$  – точка минимума при  $\lambda_0 < \lambda$  (когда  $\varepsilon_{\perp}(t_m) < \varepsilon_{\perp}(\infty)$ ) и  $t_m$  – точка максимума при  $\lambda_0 > \lambda$  (когда  $\varepsilon_{\perp}(t_m) > \varepsilon_{\perp}(\infty)$ ). При  $\lambda = \lambda_0$  (в случае совпадения времен ретардации  $\tau = 1/\lambda$  сдвиговых и объемных деформаций)  $\varepsilon_{\perp}(t)$  всегда монотонна на полуоси  $t \geq 0$ :  $\varepsilon_{\perp}(t)$  возрастает при  $9\gamma - 2\gamma_0 > 0$  и  $\varepsilon_{\perp}(t)$  убывает при  $2\gamma_0 > 9\gamma$ . В случае  $\gamma_0 = 0$ , когда  $\Pi_0(t) = \beta_0 = \text{const}$ , т. е. в случае упругой зависимости объемной деформации от среднего напряжения,  $\varepsilon_{\perp} = \frac{1}{18} \bar{\sigma} (-9\Pi(t) + 2\beta_0)$  монотонно убывает (и меняет знак, если  $\frac{9}{2}\Pi(0) < \beta_0 < \frac{9}{2}\Pi(\infty)$ , т. е.  $\frac{9}{2}(\beta - \gamma) < \beta_0 < \frac{9}{2}\beta$ ).

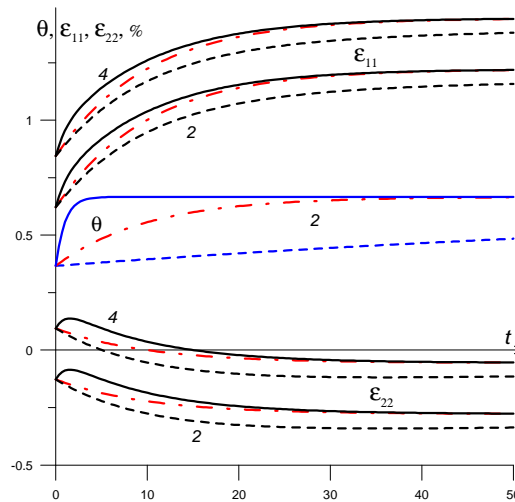


Рис. 1. Кривые ползучести (7)–(9) моделей семейства (10) при  $\bar{\sigma} = 0,01$

На рис. 1 приведены кривые ползучести  $\varepsilon_{11}(t)$  (шесть кривых 2, 4 в верхней части рис.),  $\varepsilon_{\perp}(t) = \varepsilon_{22}$  (шесть кривых 2, 4 в нижней части рис.),  $\theta(t)$  (три кривые 2 в средней части рис.) для  $\bar{\sigma} = 0,01$ , порожденные тремя моделями вида (10) с одинаковыми сдвиговыми ФП  $\Pi(t)$  ( $\lambda = 0,1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 0,5$  и  $\tau = 1/\lambda = 10$ ) и разными  $\Pi_0(t)$  (с разными временами объемной ретардации  $\tau_0 = 1/\lambda_0$ ): с  $\lambda_0 = \lambda = 0,1$  (штрих-пунктирные кривые 2, 4), с  $\lambda_0 = 1 > \lambda$  (сплошные кривые 2, 4) и с

$\lambda_0 = 0,01 < \lambda$  (штриховые кривые 2, 4). Значение  $\gamma_0 = 0,9$  одинаково у всех моделей, а номера кривых соответствуют двум значениям параметра  $\beta_0 = 2$  и  $\beta_0 = 4$  для каждой из моделей ( $\beta_0$  управляет величинами мгновенного и длительного объемных модулей  $1/(\beta_0 - \gamma_0)$  и  $1/\beta_0$  модели (10)). Кривые ползучести моделей с одинаковым  $\beta_0$  стремятся к одной и той же горизонтальной асимптоте:  $\theta(\infty) = \frac{1}{3}\bar{\sigma}\beta_0$ ,  $\varepsilon_{11}(\infty) = \frac{1}{9}\bar{\sigma}(9\Pi(\infty) + \Pi_0(\infty)) = \frac{1}{9}\bar{\sigma}(9\beta + \beta_0)$ ,  $\varepsilon_{\perp}(\infty) = \frac{1}{18}\bar{\sigma}(2\beta_0 - 9\beta)$ . Примечательны немонотонность и смена знака поперечной деформации.

### 3. Свойства коэффициента Пуассона при ползучести

Из уравнений кривых ползучести (8), (9) (с  $\bar{\sigma} > 0$ ,  $z = 1$ ) найдем КоП

$$\nu(t) = -\frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{11}} = \frac{1}{2} \frac{9\Pi(t) - 2\Pi_0(t)}{9\Pi(t) + \Pi_0(t)} = 0,5 - \frac{3\Pi_0(t)}{18\Pi(t) + 2\Pi_0(t)}, \quad (11)$$

или

$$\nu(t) = 0,5 - \frac{3z\xi}{6 + 2z\xi} = -1 + \frac{9}{6 + 2z\xi}, \quad (12)$$

$$\xi(t) := 3\varepsilon_0 / \varepsilon = \theta / \varepsilon = \frac{1}{3}\bar{\sigma}\Pi_0(t) / |\bar{\sigma}/\Pi(t)| = \frac{1}{3}z\Pi_0(t) / \Pi(t) \quad (13)$$

– параметр вида деформированного состояния,  $z = \text{sgn } \bar{\sigma} = \pm 1$ . Существенное отличие линейного ОС (1) от нелинейных ОС вязкоупругости – независимость КоП от уровня напряжения и его знака. В силу линейности ОС (1) изучаемые качественные свойства кривых ползучести и КоП Пуассона не зависят от масштабирования (способа обезразмеривания) времени и напряжений.

Так как  $\Pi(t) > 0$  и  $\Pi_0(t) > 0$  при  $t > 0$ , то  $\theta > 0$ ,  $\xi > 0$  и  $\nu(t) < 0,5$  в случае  $\bar{\sigma} > 0$ . Из возрастания  $\Pi(t)$  следуют неравенство  $\Pi(t) > \Pi(0)$  и оценка снизу для коэффициента Пуассона  $\nu(t) > 0,5 - 3\Pi_0(t)(18\Pi(0) + 2\Pi_0(t))^{-1}$  (учитывающая специфику ФП); а из  $\Pi(t) > 0$  следует универсальная (но более грубая) оценка  $\nu(t) > -1$  при всех  $t > 0$ , справедливая для любых ФП. Для моделей с  $\Pi(0) = 0$  (нерегулярных) и  $\Pi_0(0) \neq 0$  формула (11) дает в пределе при  $t \rightarrow 0$   $\nu(0+) = -1$  для любого  $\bar{\sigma} > 0$ , а для моделей с  $\Pi_0(0) = 0$  и  $\Pi(0) \neq 0$  имеем  $\nu(0+) = 0,5$ .

КоП (11) может быть отрицательным, поскольку возможно  $\varepsilon_{\perp}(t) > 0$ . Критерий отрицательности  $\nu(t)$  на некотором интервале времени при растяжении имеет вид

$$\Pi_0(t) > \frac{9}{2}\Pi(t). \quad (14)$$

Из (9) (и сказанного выше) следует, что кривые ползучести в продольном и поперечном направлении, вообще говоря, не подобны, т. е. КоП  $\nu(t)$  не постоянен. Критерий постоянства  $\nu(t)$  при одноосном растяжении (т. е. постоянства параметра  $\xi(t) = k$ ,  $k > 0$ , в силу (12)) налагает связь на ФП ОС (1), управляющими сдвиговыми и объемными деформациями:

$$\Pi_0(t) = 3k\Pi(t), \quad t > 0. \quad (15)$$

$k = 3(0,5 - \nu)(1 + \nu)^{-1} > 0$ . В частности, тождество (15) выполняется для несжимаемого материала (с  $\Pi_0(t) \equiv 0$ ), когда  $\nu(t) \equiv 0,5$  по (11), но никогда не выполняется при всех  $t > 0$  для реономного материала с упругим изменением объема ( $\Pi_0(t) = c > 0$ ,  $\Pi(t) \neq \text{const}$ ).

Коэффициент Пуассона не обязан быть монотонной функцией. Поскольку из (12)

$$\dot{\nu}(t) = -3 \frac{\dot{\xi}(t)(6 + 2\xi(t)) - 2\xi(t)\dot{\xi}(t)}{(6 + 2\xi(t))^2} = -\frac{18\dot{\xi}(t)}{(6 + 2\xi(t))^2}, \quad (16)$$

то знаки  $\dot{\nu}(t)$  и  $-\dot{\xi}(t)$  одинаковы, и потому совпадают интервалы монотонности  $\nu(t)$  и  $-\xi(t)$ .

$$\dot{\xi}(t) = \frac{1}{3}\Pi(t)^{-2}y(t), \quad y(t) := \dot{\Pi}_0(t)\Pi(t) - \Pi_0(t)\dot{\Pi}(t). \quad (17)$$

Так как  $\Pi_0(t)/\Pi(t) > 0$  при всех  $t > 0$ , то критерий нестрогого возрастания КоП (убывания  $\xi(t)$ ) на некотором интервале времени имеет вид  $\dot{\Pi}_0(t)/\Pi_0(t) \leq \dot{\Pi}(t)/\Pi(t)$ . Необходимое условие

экстремума –  $\dot{\Pi}_0(t)/\Pi_0(t) = \dot{\Pi}(t)/\Pi(t)$  (если оно выполняется не только в точке, но и на некотором интервале времени, то получается условие постоянства КоП (15)).

**Пример 2.** Для ОС (1) с (ограниченными) ФП классической модели Кельвина (10) имеем  $\xi(0) = \frac{1}{3}(\beta_0 - \gamma_0)/(\beta - \gamma)$ ,  $\nu(0) = -1 + 9(6 + 2\xi(0))^{-1} = -1 + 27[18 + 2(\beta_0 - \gamma_0)/(\beta - \gamma)]^{-1}$ ,

$\xi(\infty) = \frac{1}{3}\beta_0/\beta$ ,  $\nu(\infty) = -1 + 27[18 + 2\beta_0/\beta]^{-1}$  (т. е. при  $t \rightarrow \infty$   $\xi(t)$  и  $\nu(t)$  имеют горизонтальные асимптоты, не зависящие от  $\lambda$  и  $\lambda_0$ );  $\dot{\Pi} = \gamma\lambda e^{-\lambda t}$ ,  $\dot{\Pi}_0 = \gamma_0\lambda_0 e^{-\lambda_0 t}$  и по (17)

$$y(t) = \gamma_0\lambda_0 e^{-\lambda_0 t} (\beta - \gamma e^{-\lambda t}) - \gamma\lambda e^{-\lambda t} (\beta_0 - \gamma_0 e^{-\lambda_0 t}) = \gamma_0\gamma(\lambda - \lambda_0) e^{-\lambda_0 t} e^{-\lambda t} + \gamma_0\lambda_0\beta e^{-\lambda_0 t} - \gamma\lambda\beta_0 e^{-\lambda t}.$$

При  $\lambda \neq \lambda_0$   $\xi(t)$  и  $\nu(t)$  могут иметь точки максимума и минимума. При  $\lambda = \lambda_0$  (в случае совпадения времен ретардации сдвиговых и объемных деформаций)  $y(t) = \lambda(\gamma_0\beta - \gamma\beta_0)e^{-\lambda t}$ ; поэтому  $y(t) > 0$  при  $\gamma_0\beta > \gamma\beta_0$  и КоП убывает на всем луче  $t > 0$ , а при  $\gamma_0\beta < \gamma\beta_0$  будет  $y(t) < 0$  и КоП возрастает на луче  $t > 0$ . Условие наличия отрицательных значений КоП (14) имеет вид  $\beta_0 - \gamma_0 e^{-\lambda t} > \frac{9}{2}(\beta - \gamma e^{-\lambda t})$ , или  $\beta_0 - \frac{9}{2}\beta > (\gamma_0 - \frac{9}{2}\gamma)e^{-\lambda t}$ .

На рис. 2, а приведены графики КоП  $\nu(t)$  трех моделей вида (10) с одинаковыми сдвиговыми ФП  $\Pi(t)$  ( $\lambda = 0, 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 0, 5$  и  $\tau = 1/\lambda = 10$ ) и разными  $\Pi_0(t)$  (с разными временами объемной ретардации  $\tau_0 = 1/\lambda_0$ ): 1) с  $\lambda_0 = \lambda = 0, 1$  (штрих-пунктирные кривые 1–6), 2) с  $\lambda_0 = 1 > \lambda$  (сплошные кривые 1–6), 3) с  $\lambda_0 = 0, 01 < \lambda$  (штриховые кривые 1–6). Значение  $\gamma_0 = 0, 9$  фиксировано, а номера кривых соответствуют шести значениям  $\beta_0$  для каждой из трех моделей:  $\beta_0 = 1; 2; 3; 4; 5; 6$  (с ростом  $\beta_0$  график  $\nu(t)$  смещается вниз). Функции  $\nu(t)$  всех трех моделей с одинаковым  $\beta_0$  имеют одинаковые начальные значения  $\nu(0)$  и асимптоты  $\nu = \nu(\infty)$  (они не зависят от  $\lambda$  и  $\lambda_0$ ) и могут менять знак, но в остальном ведут себя совершенно по-разному: при достаточно малом отношении  $\tau_0/\tau < 1$   $\nu(t)$  быстро убывает в окрестности нуля, а затем возрастает (сплошные кривые 1–6 с  $\tau_0/\tau = 0, 1$ ), при достаточно большом  $\tau_0/\tau > 1$   $\nu(t)$  медленно возрастает в окрестности нуля, а затем убывает к асимптоте (штриховые кривые 1–6 с  $\tau_0/\tau = 10$ ), а при  $\tau_0 = \tau$   $\nu(t)$  не имеет точек экстремума: убывает при малых  $\beta_0 < \beta_*$ ,  $\beta_* = \beta\gamma_0/\gamma$  (штрих-пунктирная кривая 1) и возрастает при  $\beta_0 > \beta_*$  (а при  $\beta_0 = \beta_*$   $\xi(t) = \frac{1}{3}\gamma_0/\gamma = \text{const}$  и  $\nu(t) = \text{const}$ ). Таким образом, уже на примере простейшей модели с шестью параметрами и одноточечными спектрами сдвиговой и объемной релаксации и ретардации можно увидеть каким разнообразным может быть поведение КоП  $\nu(t)$  при ползучести, описываемое линейным ОС (1).

**Пример 3.** Для модели со степенными ФП (и непрерывным спектром релаксации)

$$\Pi = B + At^u, \quad \Pi_0 = B_0 + A_0t^w, \quad u, w \in (0; 1), \quad B, B_0 \geq 0, \quad A, A_0 > 0, \quad (18)$$

имеем  $\xi(0) = \frac{1}{3}B_0/B$ ,  $\nu(0) = -1 + 27[18 + 2B_0/B]^{-1}$ , а при  $t \rightarrow \infty$  графики  $\nu(t)$  обладают горизонтальными асимптотами:  $\xi(\infty) = 0$ ,  $\nu(\infty) = 0, 5$  при  $u > w$ ,  $\xi(\infty) = +\infty$ ,  $\nu(\infty) = -1$  при  $u < w$  и  $\xi(\infty) = \frac{1}{3}A_0/A$ ,  $\nu(\infty) = -1 + 27[18 + 2A_0/A]^{-1}$  при  $u = w$  (в первых двух случаях асимптоты не зависят от параметров модели, и при больших временах моделируемый материал ведет себя как несжимаемый или как не меняющий форму). В силу (17)  $y(t) = AA_0(w - u)t^{u+w-1} + A_0Bwt^{w-1} - AB_0ut^{u-1}$ , и  $\dot{\nu}(t)$  может менять знак, если  $w \neq u$ . При  $w = u$   $y(t) = (A_0B - AB_0)ut^{u-1}$ , и потому КоП – монотонная функция: при  $A_0B > AB_0$   $y(t) > 0$  и КоП убывает на всем луче  $t > 0$ , при  $A_0B < AB_0$   $y(t) < 0$  и КоП возрастает на луче  $t > 0$ , а при  $A_0B = AB_0$   $\nu(t) = \text{const}$ . Если  $A_0 = 0$ , то  $\Pi_0(t) = B_0 = \text{const}$  (такая функция ползучести моделирует линейно упругое изменение объема),  $y(t) < 0$ ,  $\nu(t) = 0, 5 - 3B_0[18(B + At^u) + 2B_0]^{-1}$  возрастает на всем луче  $t > 0$  и  $\nu(\infty) = 0, 5$  при любом  $B_0$ .

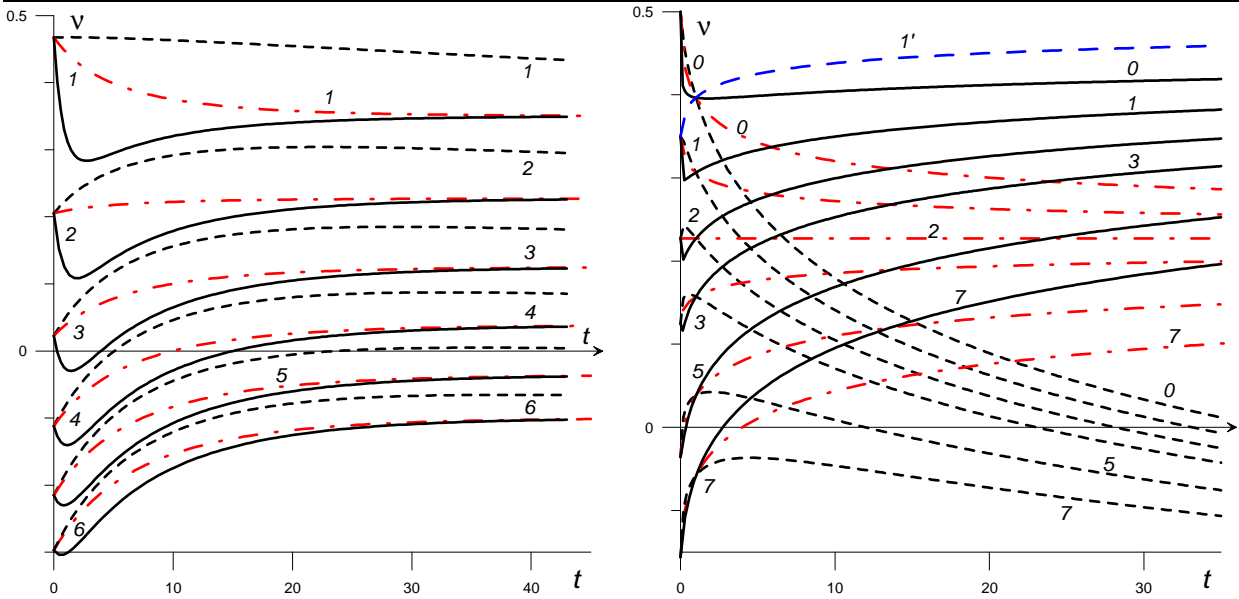


Рис. 2. Графики коэффициента Пуассона моделей семейства (10) с одинаковыми сдвиговыми ФП  $\Pi(t)$  и разными  $\lambda_0 = 0, 0,1; 0,1; 1$  и  $\beta_0 = 1; 2; \dots; 6$  (а) и моделей (18) с одинаковыми  $\Pi(t)$  и разными  $w$  и  $B_0$  (б)

На рис. 2, б приведены графики КоП  $\nu(t)$  трех моделей семейства (18) с одинаковыми сдвиговыми ФП  $\Pi(t)$  (с  $u=0,5$ ,  $A=0,5$ ,  $B=1$ ) и разными объемными ФП  $\Pi_0(t)$ : 1) с  $w=u=0,5$  (штрих-пунктирные кривые 0,1,2,3,5,7), 2) с  $w=0,2 < u$  (сплошные кривые 0,1,2,3,5,7), 3) с  $w=0,8 > u$  (штриховые кривые 0,1,2,3,5,7). Параметр  $A_0=1$  фиксирован, а номера кривых соответствуют разным значениям параметра  $B_0 = 0; 1; 2; 3; 5; 7$  для каждой из трех моделей (с ростом  $B_0$  график  $\nu(t)$  смещается вниз). При каждом  $B_0$  начальные значения  $\nu(0)$  одинаковы у всех трех моделей (и убывают с ростом  $B_0$ ), а горизонтальные асимптоты при  $t \rightarrow \infty$  различны (и не зависят от  $B_0$ ):  $\nu(\infty)=0,5$  у всех моделей с  $w < u$ ,  $\nu(\infty)=-1$  у всех моделей с  $w > u$  и  $\nu(\infty)=-1+27[18+2A_0/A]^{-1}=5/22$  при  $w=u$ . Асимптота  $\nu=5/22$  кривых 0–7 модели с  $w=u=0,5$  совпадает со штрих-пунктирной кривой (прямой) 2, поскольку при  $w=u$  и  $B_0=2$  будет  $A_0B=AB_0$  и  $\nu(t)=\text{const}$ . Примечательны перемены знака и немонотонность  $\nu(t)$  (у штриховой кривой 5 – даже две перемены знака). Для сравнения приведен график  $\nu(t)$  модели с линейно упругим изменением объема, т. е. с  $A_0=0$  (штриховая кривая 1' для  $B_0=1$ ): он монотонно возрастает и  $\nu(\infty)=0,5$  при любом  $B_0$ .

**Заключение.** В работе изучены возможности линейного ОС вязкоупругости (1) с двумя произвольными материальными функциями (ползучести) для изотропных нестареющих реономных материалов по описанию комплекса реологических эффектов, связанных с поведением поперечной деформации и коэффициента Пуассона при одноосном нагружении. Аналитически исследованы общие выражения (11) и (13) для коэффициента Пуассона  $\nu(t)$  в условиях ползучести и для параметра вида деформированного состояния  $\xi(t)$  (равного отношению объемной деформации к интенсивности деформаций) через материальные функции и время. Существенное отличие линейного ОС от нелинейных ОС вязкоупругости – независимость  $\nu(t)$  от уровня напряжения и от его знака. Доказано, что  $\nu(t)$  может изменяться в диапазоне от  $-1$  до  $0,5$ , а  $\xi(t)$  – от нуля до бесконечности (при  $\bar{\sigma} > 0$ ). Найдены критерии отрицательности коэффициента Пуассона при ползучести, критерий его постоянства (т. е. подобия кривых ползучести в продольном и поперечном направлениях) и критерии его возрастания, убывания и немонотонности. Все эти эффекты и доказанные общие утверждения проиллюстрированы на конкретных примерах моделей с классическими функциями ползучести.

Таким образом, показано, что линейное ОС вязкоупругости (1) для нестареющих изотропных сред, пренебрегающее влиянием шаровой и девиаторной частей тензоров напряжений и

деформаций друг на друга и влиянием их третьих инвариантов (параметра Лоде), способно, в принципе, качественно воспроизводить основные эффекты, связанные с поведением коэффициента Пуассона (монотонность, немонотонность, знакопеременность, отрицательность, стабилизацию с течением времени), за исключением зависимости от уровня напряжения.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 17-08-01146\_a).*

### Литература

1. Хохлов, А.В. Анализ свойств кривых ползучести с произвольной начальной стадией нагружения, порождаемых линейной теорией наследственности / А.В. Хохлов // Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. – 2018. – Т. 22, № 1. – С. 65–95.
2. Хохлов, А.В. Двусторонние оценки для функции релаксации линейной теории наследственности через кривые релаксации при гауп-деформировании и методики её идентификации / А.В. Хохлов // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2018. – Вып. 3. – С. 81–104.
3. Хохлов, А.В. Анализ общих свойств кривых ползучести при циклических ступенчатых нагружениях, порождаемых линейной теорией наследственности / А.В. Хохлов // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2017. – Vol. 21, № 2. – С. 326–361.
4. Хохлов, А.В. Кривые длительной прочности, порождаемые линейной теорией вязкоупругости в сочетании с критериями разрушения, учитывающими историю деформирования / А.В. Хохлов // Труды МАИ. – 2016. – № 91. – С. 1–32.
5. Хохлов, А.В. Асимптотика кривых ползучести, порожденных нелинейной теорией наследственности Работнова при кусочно-постоянных нагружениях, и условия затухания памяти / А.В. Хохлов // Вестник Московского ун-та. Серия 1: Математика. Механика. – 2017. – № 5. – С. 26–31.
6. Хохлов, А.В. Анализ общих свойств кривых ползучести при ступенчатом нагружении, порождаемых нелинейным соотношением Работнова для вязкоупругопластичных материалов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. – 2017. – № 3(72). – С. 93–123.
7. Хохлов, А.В. Анализ свойств кривых релаксации с начальной стадией гауп-деформирования, порождаемых нелинейной теорией наследственности Работнова / А.В. Хохлов // Механика композитных материалов. – 2018. – Т. 54, № 4. – С. 687–708.
8. Хохлов, А.В. Свойства семейства диаграмм деформирования, порождаемых нелинейным соотношением Работнова для вязкоупругопластичных материалов / А.В. Хохлов // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2018. – № 6.
9. Работнов, Ю.Н. Равновесие упругой среды с последствием / Ю.Н. Работнов // Прикладная математика и механика. – 1948. – Т. 12, № 1. – С. 53–62.
10. Работнов, Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций / Ю.Н. Работнов. – М.: Наука, 1966. – 752 с.
11. Фрейденталь, Л. Математические теории неупругой сплошной среды / Л. Фрейденталь, Х. Гейрингер. – М.: Физматгиз, 1962. – 432 с.
12. Ильюшин, А.А. Основы математической теории термовязкоупругости / А.А. Ильюшин, Б.Е. Победря. – М.: Наука, 1970. – 280 с.
13. Кристенсен, Р. Введение в теорию вязкоупругости / Р. Кристенсен. – М.: Мир, 1974. – 338 с.
14. Работнов, Ю.Н. Элементы наследственной механики твёрдых тел / Ю.Н. Работнов. – М.: Наука, 1977. – 384 с.
15. Айнбиндер, С.Б. Свойства полимеров в различных напряженных состояниях / С.Б. Айнбиндер, Э.Л. Тюнина, К.И. Цируле. – М.: Химия, 1981. – 232 с.
16. Гольдман, А.Я. Объемная деформация пластмасс / А.Я. Гольдман. – Л.: Машиностроение, 1984. – 232 с.
17. Lakes, R.S. Viscoelastic Materials / R.S. Lakes. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009. – 462 p.
18. Tschoegl, N.W. Time Dependence in Material Properties: An Overview / N.W. Tschoegl // Mechanics of Time-Dependent Materials. – 1997. – Vol. 1, Issue 1. – P. 3–31.



19. Hilton, H.H. Implications and constraints of time-independent Poisson's Ratios in linear isotropic and anisotropic viscoelasticity / H.H. Hilton // *Journal of elasticity and the physical science of solids*. – 2001. – Vol. 63. – Issue 3. – P. 221–251.

20. Tschoegl, N.W. Poisson's ratio in linear viscoelasticity – a critical review / N.W. Tschoegl, W.G. Knauss, I. Emri // *Mechanics of Time-Dependent Materials*. – 2002. – Vol. 6. – Issue 1. – pp. 3–51.

21. Ломакин, Е.В. Механика сред с зависящими от вида напряженного состояния свойствами / Е.В. Ломакин // *Физическая мезомеханика*. – 2007. – Т. 10, № 5. – С. 41–52.

22. O'Brien, D.J. Cure-dependent Viscoelastic Poisson's Ratio of Epoxy / D.J. O'Brien, N.R. Sottos, S.R. White // *Experimental mechanics*. – 2007. – Vol. 47. – Issue 2. – pp. 237–249.

23. Time-dependent Poisson's ratio of polypropylene compounds for various strain histories / D. Tscharnuter, M. Jerabek, Z. Major, R.W. Lang // *Mechanics of Time-Dependent Materials*. – 2011. – Vol. 15. – Issue 1. – pp. 15–28.

24. Жуков, А.М. О коэффициенте Пуассона в пластической области / А.М. Жуков // *Известия АН СССР. Отд. техн. наук*. – 1954. – № 12. – С. 86–91.

25. Брехова, В.Д. Исследование коэффициента Пуассона при сжатии некоторых кристаллических полимеров постоянной нагрузкой / В.Д. Брехова // *Механика полимеров*. – 1965. – Т. 1, № 4. – С. 43–46.

26. Дзене, И.Я. Коэффициент Пуассона при одномерной ползучести полиэтилена / И.Я. Дзене, А.В. Путанс // *Механика полимеров*. – 1967. – Т. 3, № 5. – С. 947–949.

27. Калинин, А.Е. О соотношении поперечной и продольной деформаций при одноосной ползучести разносопротивляющихся материалов / А.Е. Калинин, А.В. Вахрушев // *Механика композитных материалов*. – 1985. – № 2. – С. 351–354.

28. Продольная и объемная сжимаемость натриево-известкового стекла при давлениях до 10 ГПа / А.С. Савиных, Г.В. Гаркушин, С.В. Разоренов, Г.И. Канель // *Журнал технической физики*. – 2007. – Том 77. – Вып. 3. – С. 38–42.

29. Кожевникова, М.Е. Характер изменения границы зоны пластичности и коэффициента Пуассона в зависимости от пластического разрыхления / М.Е. Кожевникова // *Физическая мезомеханика*. – 2012. – Т. 15, № 6. – С. 59–66.

30. Ломакин, Е.В. Нелинейная деформация материалов, сопротивление которых зависит от вида напряженного состояния / Е.В. Ломакин // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. – 1980. – № 4. – С. 92–99.

31. Щербак, В.В. Объемные изменения дисперсно наполненных композитов при испытании в условиях ползучести / В.В. Щербак, А.Я. Гольдман // *Механика композитных материалов*. – 1982. – № 3. – С. 549–552.

32. Ozupek, S. Constitutive Equations for Solid Propellants / S. Ozupek, E.V. Becker // *Journal of Engineering Materials and Technology*. – 1997. – Vol. 119, no. 2. – P. 125–132.

33. Быков, Д.Л. Определяющие соотношения деформирования и разрушения наполненных полимерных материалов в процессах преобладающего осевого растяжения в различных баротермических условиях / Д.Л. Быков, В.А. Пелешко // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. – 2008. – № 6. – С. 40–65.

34. Shekhar, H. Longitudinal Strain Dependent Variation of Poissons Ratio for HTPB Based Solid Rocket Propellants in Uni-axial Tensile Testing / H. Shekhar, A.D. Sahasrabudhe // *Propellants, Explosives, Pyrotechnics*. – 2011. – Vol. 36, no. 6. – P. 558–563.

35. Cui, H.R. Study on viscoelastic Poisson's ratio of solid propellants using digital image correlation method / H.R. Cui, G.J. Tang, Z.B. Shen // *Propellants Explosives Pyrotechnics*. – 2016. – Vol. 41, № 5. – P. 835–843.

36. Дзене, И.Я. Особенности процесса деформирования при ползучести и повторной ползучести полимеров в условиях одноосного растяжения. Часть 1 / И.Я. Дзене, А.Ф. Крегерс, У.К. Вилкс // *Механика полимеров*. – 1974. – № 3. – С. 399–405.

37. Lakes, R. Foam structure with a negative Poisson's ratio / R. Lakes // *Science*. – 1987. – Vol. 235. – Issue 4792. – pp. 1038–1040.

38. Friis, E.A. Negative Poisson's ratio polymeric and metallic materials / E.A. Friis, R.S. Lakes, J.B. Park // *Journal of Materials Science*. – 1988. – Vol. 23. – Issue 12. – pp. 4406–4414.

39. Берлин, Ал.Ал. Структура изотропных материалов с отрицательным коэффициентом Пуассона / Ал.Ал. Берлин, Л. Ротенбург, Р. Басэрт // *Высокомолекулярные соединения Б.* – 1991. – Т. 33, № 8. – С. 619–621.
40. Берлин, Ал.Ал. Особенности деформации неупорядоченных полимерных и неполимерных тел / Ал.Ал. Берлин, Л. Ротенбург, Р. Басэрт // *Высокомолекулярные соединения А.* – 1992. – Т. 34, № 7. – С. 6–32.
41. Milton, G.W. Composite materials with Poisson's ratios close to  $-1$  / G.W. Milton // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids.* – 1992. – Vol. 40. – Issue 5. – P. 1105–1137.
42. Lakes, R.S. Indentability of Conventional and Negative Poisson's Ratio Foams / R.S. Lakes, K. Elms // *Journal of Composite Materials.* – 1993. – Vol. 27. – Issue 12. – P. 1193–1202.
43. Caddock, B.D. Negative Poisson ratios and strain-dependent mechanical properties in arterial prostheses / B.D. Caddock, K.E. Evans // *Biomaterials.* – 1995. – Vol. 16. – Issue 14. – P. 1109–1115.
44. Chan, N. Indentation resilience of conventional and auxetic foams / N. Chan, K.E. Evans // *Journal of Cellular Plastics.* – 1998. – Vol. 34. – Issue 3. – P. 231–260.
45. Alderson, K.L. The strain dependent indentation resilience of auxetic microporous polyethylene / K.L. Alderson, A. Fitzgerald, K.E. Evans // *Journal of Materials Science.* – 2000. – Vol. 35. – Issue 16. – P. 4039–4047.
46. Материалы с отрицательным коэффициентом Пуассона (обзор) / Д.А. Конёк, К.В. Войцеховски, Ю.М. Плескачевский, С.В. Шилько // *Механика композитных материалов и конструкций.* – 2004. – Т. 10, № 1. – С. 35–69.
47. Poisson's ratio and modern materials / A.L. Greer, R.S. Lakes, T. Rouxel, G.N. Greaves // *Nature Materials.* – 2011. – Vol. 10, no. 11. – P. 823–837.
48. Fischer-Cripps A.C. *Nanoindentation* / A.C. Fischer-Cripps. – Springer-Verlag, New York, 2002. – 197 p.
49. Oliver, W.C. Measurement of hardness and elastic modulus by instrumented indentation: advances in understanding and refinements to methodology / W.C. Oliver, G.M. Pharr // *Journal of Materials Research.* – 2004. – Vol. 19. – Issue 1. – P. 3–20.
50. Oyen, M. Analytical techniques for indentation of viscoelastic materials / M. Oyen // *Philosophical Magazine.* – 2006. – Vol. 86. – Issue 33-35. – P. 5625–5641.
51. Головин, Ю.И. Наноиндентирование и его возможности / Ю.И. Головин. – Москва, Машиностроение, 2009. – 311 с.

*Поступила в редакцию 30 августа 2018 г.*

---

*Bulletin of the South Ural State University  
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"  
2018, vol. 10, no. 4, pp. 65–77*

---

DOI: 10.14529/mmph180408

### **BEHAVIOR TYPES AND FEATURES OF LATERAL STRAIN AND POISSON'S RATIO OF ISOTROPIC RHEONOMOUS MATERIALS UNDER CREEP CONDITIONS DESCRIBED BY THE LINEAR THEORY OF VISCOELASTICITY**

**A.V. Khokhlov**

*Lomonosov Moscow State University, Institute of mechanics, Moscow, Russian Federation  
E-mail: andrey-khokhlov@ya.ru*

The Boltzmann–Volterra linear constitutive equation for isotropic non-aging viscoelastic materials (with an arbitrary shear and bulk creep compliances) is studied analytically in order to find out its capabilities to provide an adequate qualitative description of rheological phenomena related to creep under uni-axial loading and types of evolution of the Poisson's ratio (lateral contraction ratio in creep) and to outline the control scopes of the material functions. The constitutive equation doesn't involve the third invariants of stress and strain tensors (or the Lode–Nadai coefficients) and implies that their hydrostatic and deviatoric parts don't depend on each other. It is controlled by two material functions of a positive real argument (that is shear creep compliance and bulk creep compliance); they are implied to be positive, differentiable, increasing and convex functions. General properties of the creep curves for volumet-

ric, longitudinal and lateral strain generated by the model under uni-axial loading are studied. Conditions for creep curves monotonicity and for existence of extrema and sign changes of strains and the Poisson's ratio evolution in time are studied. The influence of qualitative restrictions imposed on its material functions is analyzed. The expressions for Poisson's ratio through the strain triaxiality ratio and in terms of creep compliances are derived. Assuming creep compliances are arbitrary (permissible), general accurate two-sided bounds for the Poisson's ratio range are obtained; it is proved that the lateral contraction ratio in creep is greater than  $-1$  and less than  $0,5$  at any moment of time. Additional restrictions on material functions and stress levels are derived to provide negative values of Poisson's ratio. Criteria for the Poisson's ratio increase or decrease and for its non-dependence on time are found. In particular, it is proved that the linear relation is able to simulate non-monotonic behavior and sign changes of lateral strain and Poisson's ratio under constant axial load.

*Keywords:* viscoelasticity; compressibility; axial creep; volumetric creep; non-monotonic lateral strain; negative Poisson's ratio.

### References

1. Khokhlov A.V. Analysis of properties of creep curves generated by the linear viscoelasticity theory under arbitrary loading programs at initial stage. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* (J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.), 2018, Vol. 22, no. 1, pp. 65–95 (in Russ.). DOI: 10.14498/vsgtu1543
2. Khokhlov A.V. Dvustoronnie otsenki dlya funktsii relaksatsii lineynoy teorii nasledstvennosti cherez krivye relaksatsii pri ramp-deformirovani i metodiki eye identifikatsii (Two-sided bounds for relaxation modulus in the linear viscoelasticity via relaxation curves at ramp strain histories and identification techniques). *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela*, 2018, no. 3, pp. 81–104. (in Russ.). DOI: 10.7868/S0572329918030108
3. Khokhlov A.V. Analiz obshchikh svoystv krivykh polzuchesti pri tsiklicheskih stupenchatykh nagruzheniyakh, porozhdaemykh lineynoy teoriey nasledstvennosti (Analysis of creep curves produced by the linear viscoelasticity theory under cyclic stepwise loadings). *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* (J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.), 2017, Vol. 21, no. 2, pp. 326–361. (in Russ.). DOI: 10.14498/vsgtu1533
4. Khokhlov A.V. Krivye dlitel'noy prochnosti, porozhdaemye lineynoy teoriey vyazkouprugosti v sochetanii s kriteriyami razrusheniya, uchityvayushchimi istoriyu deformirovaniya (Long-term strength curves produced by the linear viscoelasticity theory combined with failure criteria accounting for strain history). *Trudy MAI*, 2016, no. 91, pp. 1–32. (in Russ.).
5. Khokhlov A.V. Asymptotic behavior of creep curves in the Rabotnov nonlinear heredity theory under piecewise constant loadings and memory decay conditions. *Moscow University Mechanics Bulletin*, 2017, Vol. 72, no. 5, pp. 103–107. DOI: 10.3103/S0027133017050016
6. Khokhlov A.V. Analysis of Creep Curves General Properties under Step Loading Generated by the Rabotnov Nonlinear Relation for Viscoelastic Plastic Materials. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*, 2017, no. 3(72), pp. 93–123. (in Russ.). DOI: 10.18698/1812-3368-2017-3-93-123
7. Khokhlov A.V. Analysis of properties of ramp stress relaxation curves produced by the Rabotnov non-linear hereditary theory. *Mechanics of Composite Materials*, 2018, Vol. 54, Issue 4, pp. 473–486. DOI: 10.1007/s11029-018-9757-1
8. Khokhlov A.V. Svoystva semeystva diagramm deformirovaniya, porozhdaemykh nelineynym sootnosheniem Rabotnova dlya vyazkouprugoplastichnykh materialov (Properties of stress-strain curves family generated by the Rabotnov non-linear relation for viscoelastic materials). *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela*, 2018, no. 6. (in Russ.)
9. Rabotnov Yu.N. Ravnovesie uprugoy sredy s posledeystviem (Equilibrium of elastic medium with heredity). *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 1948, Vol. 12, no. 1, pp. 53–62. (in Russ.).
10. Rabotnov Yu.N. *Polzuchest' elementov konstruksiy* (Creep problems in structural members), Moscow, Nauka Publ., 1966, 752 p. (in Russ.).
11. Freydenal' L., Geyringer X. *Matematicheskie teorii neuprugoy sploshnoy sredy* (The mathematical theories of the inelastic continuum), Moscow, Fizmatgiz Publ., 1962, 432 p. (in Russ.). [Freydenal A.M., Geiringer H. The mathematical theories of the inelastic continuum. Berlin a. o., Springer Verl., 1958. (Handbuch der Physik. Hrsg.von S. Flügge. Bd. VI)]

12. И'юшин А.А., Победрыа В.Е. *Osnovy matematicheskoy teorii termovyazkouprugosti* (Fundamentals of the Mathematical Theory of Thermo-viscoelasticity), Moscow, Nauka Publ., 1970, 280 p. (in Russ.).
13. Christensen R.M. *Theory of viscoelasticity*. N.-Y., L., Acad. Press, 1971, 245 p.
14. Rabotnov Yu.N. *Elements of hereditary solid mechanics*. Moscow, Mir Publishers, 1980, 387 p.
15. Aynbinder S.B., Tyunina E.L., Tsirule K.I. *Svoystva polimerov v razlichnykh napryazhennykh sostoyaniyakh* (Properties of Polymers under various stress states), Moscow, Khimiya Publ., 1981, 232 p. (in Russ.).
16. Gol'dman A.Ya. *Ob"emnaya deformatsiya plastmass* (Volumetric deformation of plastics). Leningrad, Mashinostroenie Publ., 1984, 232 p. (in Russ.).
17. Lakes R.S. *Viscoelastic Materials*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2009. 462 p.
18. Tschoegl N.W. Time Dependence in Material Properties: An Overview. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 1997, Vol. 1, Issue 1, pp. 3–31. DOI: 10.1023/A:1009748023394
19. Hilton N.N. Implications and constraints of time-independent Poisson's Ratios in linear isotropic and anisotropic viscoelasticity. *Journal of elasticity and the physical science of solids*, 2001, Vol. 63, Issue 3, pp. 221–251. DOI: 10.1023/A:1014457613863
20. Tschoegl N.W., Knauss W.G., Emri I. Poisson's ratio in linear viscoelasticity – a critical review. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 2002, Vol. 6, Issue 1, pp. 3–51. DOI: 10.1023/A:1014411503170
21. Lomakin E.V. Mechanics of media with stress-state dependent properties. *Physical Mesomechanics*, 2007, Vol. 10, Issues 5–6, pp. 255–264. DOI: 10.1016/j.physme.2007.11.004
22. O'Brien D.J., Sottos N.R., White S.R. Cure-dependent Viscoelastic Poisson's Ratio of Epoxy. *Experimental mechanics*, 2007, Vol. 47, Issue 2, pp. 237–249. DOI: 10.1007/s11340-006-9013-9
23. Tscharnuter D., Jerabek M., Major-Z., Lang R.W. Time-dependent Poisson's ratio of polypropylene compounds for various strain histories. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 2011, Vol. 15, no. 1, pp. 15–28. DOI 10.1007/s11043-010-9121-x
24. Zhukov A.M. O koeffitsiente Puassona v plasticheskoy oblasti (On Poisson's Ratio in plastic domain). *Izvestiya AN SSSR. Otd. tekhn. Nauk*, 1954, no. 12, pp. 86–91. (in Russ.).
25. Brekhova V.D. Investigation of the Poisson's ratio of certain crystalline polymers under a constant compressive load. *Polimer mechanics*, 1965, Vol. 1, Issue 4, pp. 23–24. DOI: 10.1007/BF00858886
26. Dzene I.Ya., Putans A.V. Poisson's ratio of polyethylene in one-dimensional creep. *Polimer mechanics*, 1967, Vol. 3, Issue 5, pp. 626–627. DOI: 10.1007/BF00859258
27. Kalinnikov A.E., Vakhrushev A.V. O sootnoshenii poperechnoy i prodol'noy deformatsiy pri odnoosnoy polzuchesti raznosoprotivlyayushchikhsya materialov (Relation between lateral and longitudinal strains in materials with tension-compression asymmetry under uniaxial creep). *Mekhanika kompozitnykh materialov*, 1985, no. 2, pp. 351–354. (in Russ.).
28. Savinykh A.S., Garkushin G.V., Razorenov S.V., Kanel G.I. Longitudinal and bulk compressibility of soda-lime glass at pressures to 10 GPa. *Technical Physics*, 2007, Vol. 52, Issue 3, pp. 328–332. DOI: 10.1134/S1063784207030073
29. Kozhevnikova M.E. Plastic Zone Boundary and Poisson's Ratio Depending on Plastic Loosening. *Physical Mesomechanics*, 2013, Vol. 16, no. 2, pp. 162–169. DOI: 10.1134/S1029959913020070
30. Lomakin E.V. Nelineynaya deformatsiya materialov, soprotivlenie kotorykh zavisit ot vida napryazhennogo sostoyaniya (Non-linear deformation of materials with stress-state dependent properties). *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela*, 1980, no. 4, pp. 92–99. (in Russ.).
31. Shcherbak V.V., Gol'dman A.Ya. Ob"emnye izmeneniya dispersno napolnennykh kompozitov pri ispytanii v usloviyakh polzuchesti (Volume changes in dispersely filled composites under creep tests). *Mekhanika kompozitnykh materialov*, 1982, no. 3, pp. 549–552. (in Russ.).
32. Ozupek S., Becker E.B. Constitutive Equations for Solid Propellants. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 1997, Vol. 119, no. 2, pp. 125–132. DOI: 10.1115/1.2805983
33. Bykov D.L., Peleshko V.A. Constitutive Relations for Strain and Failure of Filled Polymer Materials in Dominant Axial Tension Processes under Various Barothermal Conditions. *Mechanics of Solids*, 2008, Vol. 43, Issue 6, pp. 870–891. DOI: 10.3103/S0025654408060058

34. Shekhar H., Sahasrabudhe A.D. Longitudinal Strain Dependent Variation of Poissons Ratio for HTPB Based Solid Rocket Propellants in Uni-axial Tensile Testing. *Propellants, Explosives, Pyrotechnics*, 2011, Vol. 36, no. 6, pp. 558–563. DOI: 10.1002/prop.200900079
35. Cui H.R., Tang G.J., Shen Z.B. Study on viscoelastic Poisson's ratio of solid propellants using digital image correlation method. *Propellants, Explosives, Pyrotechnics*, 2016, Vol. 41, no. 5, pp. 835–843. DOI: 10.1002/prop.201500313
36. Dzene I.Ya., Kregers A.F., Vilks U.K. Characteristic features of the deformation process on creep and secondary creep of polymers under conditions of uni-axial tension. Part I. *Polimer mechanics*, 1974, Vol. 10, no. 3, pp. 337–342. DOI: 10.1007/BF00865585
37. Lakes R. Foam structure with a negative Poisson's ratio. Foam Structures with a Negative Poisson's Ratio. *Science*, 1987, Vol. 235, Issue 4792, pp. 1038–1040. DOI: 10.1126/science.235.4792.1038
38. Friis E.A., Lakes R.S., Park J.B. Negative Poisson's ratio polymeric and metallic materials. *Journal of Materials Science*, 1988, Vol. 23, Issue 12, pp. 4406–4414. DOI: 10.1007/BF00551939
39. Berlin A.I., Rotenburg L., Basert R. Структура изотропных материалов с отрицательным коэффициентом Пуассона (Structure of isotropic materials with a negative Poisson's ratio). *Vysokomolekulyarnye soedineniya B*, 1991, Vol. 33, no. 8, pp. 619–621. (in Russ.).
40. Berlin A.I., Rotenburg L., Basert R. Особенности деформации неупорядоченных полимерных и неполимерных тел (Specific features of deformation of non-ordered polymeric and non-polymeric solids). *Vysokomolekulyarnye soedineniya A*, 1992, Vol. 34, no. 7, pp. 6–32. (in Russ.).
41. Milton G.W. Composite materials with Poisson's ratios close to  $-1$ . *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1992, Vol. 40, Issue 5, pp. 1105–1137. DOI: 10.1016/0022-5096(92)90063-8
42. Lakes R.S., Elms K. Indentability of Conventional and Negative Poisson's Ratio Foams. *Journal of Composite Materials*, 1993, Vol. 27, Issue 12, pp. 1193–1202. DOI: 10.1177/002199839302701203
43. Caddock B.D., Evans K.E. Negative Poisson ratios and strain-dependent mechanical properties in arterial prostheses. *Biomaterials*, 1995, Vol. 16, Issue 14, pp. 1109–1115. DOI: 10.1016/0142-9612(95)98908-W
44. Chan N., Evans K.E. Indentation resilience of conventional and auxetic foams. *Journal of Cellular Plastics*, 1998, Vol. 34, Issue 3, pp. 231–260. DOI: 10.1177/0021955X9803400304
45. Alderson K.L., Fitzgerald A., Evans K.E. The strain dependent indentation resilience of auxetic microporous polyethylene. *Journal of Materials Science*, 2000, Vol. 35, Issue 16, pp. 4039–4047. DOI: 10.1023/A:1004830103411
46. Konyek D.A., Voytsekhovskiy K.V., Pleskachevskiy Yu.M., Shil'ko S.V. Materialy s otritsatel'nym koeffitsientom Puassona (obzor) (Materials with negative Poisson's ratio. A review). *Mekhanika kompozitnykh materialov i konstruksiy*, 2004, Vol. 10, no. 1, pp. 35–69. (in Russ.).
47. Greer A.L., Lakes R.S., Rouxel T., Greaves G.N. Poisson's ratio and modern materials. *Nature Materials*, 2011, Vol. 10, no. 11, pp. 823–837. DOI: 10.1038/nmat3134
48. Fischer-Cripps A.C. *Nanoindentation*. Springer-Verlag, New York, 2002, 197 p. DOI: 10.1007/978-0-387-22462-6
49. Oliver W.C., Pharr G.M. Measurement of hardness and elastic modulus by instrumented indentation: advances in understanding and refinements to methodology. *Journal of Materials Research*, 2004, Vol. 19, Issue 1, pp. 3–20. DOI: 10.1557/jmr.2004.19.1.3
50. Oyen M. Analytical techniques for indentation of viscoelastic materials. *Philosophical Magazine*, 2006, Vol. 86, Issue 33-35, pp. 5625–5641. DOI: 10.1080/14786430600740666
51. Golovin Yu.I. *Nanoindentirovanie i ego vozmozhnosti* (Nanoindentation and its capabilities), Moscow, Mashinostroenie Publ., 2009, 311 p. (in Russ.).

Received August 30, 2018