УДК 517.984.46, 517.983.28 DOI: 10.14529/mmph190103

О ВЫЧИСЛЕНИИ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ И ФУНКЦИЙ ДИСКРЕТНОГО ОПЕРАТОРА С ЯДЕРНОЙ РЕЗОЛЬВЕНТОЙ, ВОЗМУЩЕННОГО ОГРАНИЧЕННЫМ

А.И. Седов
Магнитогорский государственный технический университет, г. Магнитогорск, Российская Федерация
E-mail: sedov-ai@yandex.ru

Рассматривается задача вычисления собственных чисел и собственных функций возмущенного линейного самосопряженного оператора с ядерной резольвентой, возмущенного ограниченным оператором, действующим в сепарабельном гильбертовом пространстве. Для решения задачи применяется метод регуляризованных следов предложенный В.А. Садовничим и В.В. Дубровским и развитый их учениками. Классический метод регуляризованных следов для повышения точности вычислений предполагает вычисление нескольких членов ряда. Сложность вычисления каждого последующего члена ряда нелинейно возрастает. Предлагаемое в работе изменение классического метода приводит к другому ряду, скорость сходимости которого значительно больше, что позволяет уменьшить количество членов ряда используемых в вычислениях. Развивая предложенный метод, в работе приводятся формулы для вычисления коэффициентов Фурье разложения возмущенных собственных функций в ряд по невозмущенным. Для вычисления первых собственных функций используется обратная матрица Вандермонда. Приводятся оценки остатков рядов.

Ключевые слова: собственные числа; собственные функции; ядерный оператор; возмущенный оператор.

Введение

Рассмотрим дискретный самосопряженный оператор T с ядерной резольвентой и линейный ограниченный оператор P, действующие в гильбертовом пространстве H. Для простоты изложения предположим, что оператор T – положительный с простым спектром $\sigma(T)=\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$. Собственные числа λ_n оператора T занумеруем в порядке возрастания. Обозначим через $\sigma(T)=\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ собственные числа оператора $T+P$, занумерованные в порядке возрастания действительных частей с учетом алгебраической кратности.

Можно показать (см., например [1]), что если существует номер N такой, что для любых $n \geq N$ выполняется неравенство $q_n = \dfrac{2\|P\|}{\lambda_{n+1}-\lambda_n} < 1$, то первые N собственных чисел $\{\mu_n\}_{n=1}^{N}$ оператора $T+P$ являются решениями системы N уравнений:

$$\sum_{k=1}^{N}\mu_k^s = \sum_{k=1}^{N}\lambda_k^s + \sum_{k=1}^{t_N}\alpha_k^{(s)}(N) + \varepsilon_{t_N}^{(s)}(N),\ t_N \in \boldsymbol{N},\ \ s=\overline{1,N}. \tag{1}$$

Здесь $\alpha_k^{(s)}(N) = \dfrac{(-1)^k s}{2\pi i k} Sp \int\limits_{\Gamma_N} \lambda^{s-1}\left[PR_0(\lambda)\right]^k d\lambda$ – поправки теории возмущений, $\varepsilon_{t_N}^{(s)}(N) = \sum\limits_{k=t_N+1}^{\infty}\alpha_k^{(s)}(N)$, Γ_N – окружность радиуса $\rho_N = \dfrac{\lambda_N+\lambda_{N+1}}{2}$ с центром в начале координат, R_0 резольвента оператора T.

Правые части уравнений (1) явно выражаются через собственные числа и собственные функции невозмущенного оператора T и возмущающий оператор P. В.А. Садовничий и В.В. Дубровский в работе [2] высказали идею нового метода вычисления собственных чисел возмущенных операторов с помощью системы (1). Серия работ В.А. Садовничего, В.В. Дубровского, С.И. Кадченко, В.Ф. Кравченко, И.И. Кинзиной [1, 3–9] привела к созданию и обоснованию метода вычисления собственных чисел возмущенного оператора, а также созданию численных алгоритмов, реализующих данный метод. Идея метода состоит в следующем. Используя теорию симметрических многочленов и формулы Ньютона, нахождение корней системы (1) сводится к нахождению корней многочлена степени N, коэффициенты которого могут быть найдены со сколь угодно большой точностью. Поэтому погрешность вычисления N первых собственных чисел μ_n зависит от того, как точно вычислены правые части системы (1). Несмотря на приведенные в работах [1, 4, 6–9] численные примеры, найденные там оценки остатков

$$\varepsilon_{t_N}^{(s)}(N) \approx sN\rho_N^s \frac{q_N^{t_N+1}}{1-q_N} \approx N\lambda_N^s q_N^{t_N+1},$$

нельзя назвать хорошими. Добиться малости $\varepsilon_{t_N}^{(s)}(N)$ возможно только за счет увеличения степени t_N+1 числа $q_N<1$, что в свою очередь ведет к увеличению числа поправок теории возмущения $\alpha_k^{(s)}$, которые приходится вычислять. Сложность вычисления поправок нелинейно растет с увеличением номера поправки, что значительно увеличивает трудности практического применения метода и ведет к накоплению ошибок округления.

В представленной работе делается попытка уменьшить оценки остатков рядов.

1. Вычисление собственных чисел

Введем обозначения: $r_n = \frac{1}{2}\min_{k\neq n}\left\{\left|\lambda_n-\lambda_k\right|\right\}$, $\gamma_n=\left\{\lambda:\left|\lambda-\lambda_n\right|=r_n\right\}$, $\Gamma_n=\left\{\lambda:|\lambda|=\lambda_n+r_n\right\}$, $R_0(\lambda)=(T-\lambda E)^{-1}$, $R(\lambda)=(T+P-\lambda E)^{-1}$, $r=\inf_{n\geq N} r_n$, $\Omega_N=\left\{\lambda:|\lambda|>\lambda_N+r_N\right\}\cap\bigcap_{n>N}\left\{|\lambda_n-\lambda|>r_n\right\}$, $\rho(T)$ – резольвентное множество.

Приведем известные, но необходимые для целостного изложения результаты в виде нескольких лемм.

Лемма 1. *Если $\|P\|<r$, то $T+P$ – дискретный и справедливо разложение в сходящийся по норме ряд*

$$R(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k R_0(\lambda)(PR_0(\lambda))^k, \ \lambda\in\Omega_N. \tag{2}$$

Обозначим собственные числа оператора $T+P$, через μ_n занумерованные в порядке возрастания действительных частей с учетом алгебраической кратности.

Лемма 2. *[10] Если $\|P\|<r_N$, то внутри контура Γ_N будет находиться одинаковое количество собственных чисел λ_n и μ_n (с учетом кратности), $n\leq N$. Если $\|P\|<r_n$, то внутри контура γ_n будет находиться одинаковое количество собственных чисел λ_n и μ_n (с учетом кратности).*

Интегрированием по частям доказывается следующая:

Лемма 3. *Если g – однозначная аналитическая функция, γ – замкнутый контур, то имеет место равенство:*

$$Sp\int_\gamma g(\lambda)R_0(\lambda)(PR_0(\lambda))^k\,d\lambda=-\frac{1}{k}Sp\int_\gamma g'(\lambda)(PR_0(\lambda))^k\,d\lambda, \quad k\in\mathbf{N}.$$

Обозначим через v_n и u_n ортонормированные в H собственные функции операторов T и $T+P$, соответствующие собственным числам λ_n и μ_n, и перейдем к доказательству основного результата.

Теорема 1. *Если $\|P\|<r_N$, то первые N собственных чисел μ_n оператора $T+P$ являются решениями системы уравнений:*

$$\sum_{l=1}^{N}\frac{1}{(z-\mu_l)^s}=\sum_{l=1}^{N}\frac{1}{(z-\lambda_l)^s}+\sum_{l=1}^{N}\frac{s(Pv_l,v_l)}{(z-\lambda_l)^{s+1}}+\sum_{k=2}^{M-1}\alpha_k^{(s)}(N)+\varepsilon_s,\ s=\overline{1,N},$$

где $\alpha_k^{(s)}(N)=\frac{(-1)^k s}{2\pi ik}Sp\int\limits_{\Gamma_N}\frac{1}{(\lambda-z)^{s+1}}[PR_0(\lambda)]^k d\lambda$ *– поправки теории возмущений,* z *некоторое фиксированное число,* ε_s *– зависящие от* z *и* M *сколь угодно малые числа.*

Доказательство. Умножим ряд (2) на число $-\frac{1}{2\pi i\left(z-\lambda\right)^s}$, $s=\overline{1,N}$, проинтегрируем по контуру Γ_N и найдем след. Число $z>\lambda_N+r_N$ выберем позднее. Получим:

$$-\frac{1}{2\pi i}Sp\int\limits_{\Gamma_N}\frac{R(\lambda)}{(\lambda-z)^s}d\lambda=-\frac{1}{2\pi i}Sp\int\limits_{\Gamma_N}\frac{1}{(\lambda-z)^s}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k R_0(\lambda)[PR_0(\lambda)]^k d\lambda .$$

Вычислим интеграл в левой части и первые слагаемые в правой части. Используя леммы 1 и 2, можно показать, что оператор $\int\limits_{\Gamma_N}R(\lambda)d\lambda$ является проектором на пространство, натянутое на линейную оболочку $\{u_n\}_{n=1}^{N}$. Имеем

$$-\frac{1}{2\pi i}Sp\int\limits_{\Gamma_N}\frac{R(\lambda)}{(z-\lambda)^s}d\lambda=-\frac{1}{2\pi i}\sum_{l=1}^{\infty}\left(\int\limits_{\Gamma_N}\frac{R(\lambda)}{(z-\lambda)^s}d\lambda u_l,u_l\right)=-\frac{1}{2\pi i}\sum_{l=1}^{N}\left(\int\limits_{\Gamma_N}\frac{R(\lambda)u_l}{(z-\lambda)^s}d\lambda,u_l\right)=$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\sum_{l=1}^{N}\left(\int\limits_{\Gamma_N}\frac{u_l}{(z-\lambda)^s(\mu_l-\lambda)}d\lambda,u_l\right)=-\sum_{l=1}^{N}(u_l,u_l)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_N}\frac{1}{(z-\lambda)^s(\mu_l-\lambda)}d\lambda=\sum_{l=1}^{N}\frac{1}{(z-\mu_l)^s}.$$

Аналогично, при $k=0$:

$$-\frac{1}{2\pi i}Sp\int\limits_{\Gamma_N}\frac{R_0(\lambda)}{(z-\lambda)^s}d\lambda=\sum_{l=1}^{N}\frac{1}{(z-\lambda_l)^s}.$$

При $k=1$, используя лемму 3, имеем:

$$\frac{1}{2\pi i}Sp\int\limits_{\Gamma_N}\frac{R_0(\lambda)PR_0(\lambda)}{(z-\lambda)^s}d\lambda=-\frac{s}{2\pi i}Sp\int\limits_{\Gamma_N}\frac{PR_0(\lambda)}{(z-\lambda)^{s+1}}d\lambda=$$

$$-\frac{s}{2\pi i}\sum_{l=1}^{N}(Pv_n,v_n)\int\limits_{\Gamma_N}\frac{1}{(z-\lambda)^{s+1}(\lambda_l-\lambda)}d\lambda=\sum_{l=1}^{N}\frac{s(Pv_n,v_n)}{(z-\lambda_l)^{s+1}}.$$

Оценим M-й остаток ряда.

$$\left|\frac{1}{2\pi i}Sp\int\limits_{\Gamma_N}\frac{1}{(z-\lambda)^s}\sum_{k=M}^{\infty}(-1)^k R_0(\lambda)(PR_0(\lambda))^k d\lambda\right|=\left|\frac{s}{2\pi i}Sp\int\limits_{\Gamma_N}\frac{1}{(z-\lambda)^{s+1}}\sum_{k=M}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}(PR_0(\lambda))^k d\lambda\right|\le$$

$$\frac{s}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_N}\frac{1}{|z-\lambda|^{s+1}}\sum_{k=M}^{\infty}\frac{1}{k}\left\|PR_0(\lambda)\right\|^k |d\lambda|\le\frac{s}{2\pi}\frac{1}{\left(z-\lambda_N-r_N\right)^{s+1}};\text{ длина }\Gamma_N\sum_{k=M}^{\infty}\frac{1}{k}\max_{\lambda\in\Gamma_N}\left\|PR_0(\lambda)\right\|^k\le$$

$$\frac{s(\lambda_N+r_N)}{\left(z-\lambda_N-r_N\right)^{s+1}}\frac{q_N^M}{1-q_N^M}.$$

За счет выбора числа M и, главным образом, числа z погрешности

$$\varepsilon_s\le\frac{s(\lambda_N+r_N)}{\left(z-\lambda_N-r_N\right)^{s+1}}\frac{q_N^M}{1-q_N^M}$$

можно сделать сколь угодно малыми. Доказательство закончено.

Заметим, что если ввести обозначения $\beta_n = \dfrac{1}{z-\mu_n}$, $\eta_n = \dfrac{1}{z-\lambda_n}$, то система перепишется в виде (1)

$$\sum_{l=1}^{N}\beta_l^s = \sum_{l=1}^{N}\eta_l^s + \sum_{l=1}^{N} s(Pv_n, v_n)\eta_l^{s+1} + \sum_{k=2}^{M-1}\alpha_k^{(s)}(N) + \varepsilon_s .$$

Обоснование существования и единственности решения данной системы, а также алгоритмы поиска решения можно найти в работах [1, 3–8].

Предположим далее $n > N$.

Теорема 2. *Если* $\|P\| < r_n$ *и* λ_n *однократное, то собственное число* μ_n *можно вычислить по формуле*

$$\beta_n^s = \eta_n^s + s(Pv_n, v_n)\eta_n^{s+1} + \sum_{k=2}^{M-1}\alpha_k^{(s)}(n) + \varepsilon_s ,$$

где $\alpha_k^{(s)}(n) = \dfrac{(-1)^k s}{2\pi i k} Sp\displaystyle\int_{\gamma_n}\dfrac{1}{(\lambda - z)^{s+1}}[PR_0(\lambda)]^k d\lambda$, z *– некоторое фиксированное число,* ε_s *– зависящее от* z *сколь угодно малое число.*

Доказательство аналогично теореме 2. Умножим ряд (2) на $-\dfrac{1}{2\pi i\left(z-\lambda\right)^s}$, проинтегрируем по контуру γ_n и найдем след. Числа $z > \lambda_n + r_n$, $M \ge 3$ и $s \in \boldsymbol{N}$ выберем таким образом, чтобы погрешности

$$\varepsilon_s \le \frac{s r_n}{M\left(z-\lambda_n - r_n\right)^{s+1}}\frac{q_n^M}{1-q_n^M} ,$$

были достаточно малыми.

Обобщение на случай кратного спектра можно сделать аналогично [9].

2. Вычисление собственных функций возмущенного оператора

Из леммы 2 и введенных обозначений следует, что внутри контура γ_n находятся только числа λ_n и μ_n, а внутри контура Γ_N – числа λ_k, μ_k, $k=\overline{1,N}$. Пусть сначала $n \le N$. Разложим собственные функции v_n в ряд Фурье по ортонормированному базису $\{u_n\}$.

$$v_n = \sum_{k=1}^{\infty} c_{nk}u_k , \; c_{nk} = (v_n, u_k) . \tag{3}$$

Умножим равенство на $\dfrac{1}{(z-\lambda)^m}$, $z > \lambda_{N+1}$, подействуем проектором $-\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\Gamma_N} R(\lambda)d\lambda$ и получим:

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_N}\frac{R(\lambda)v_n}{(z-\lambda)^m}d\lambda = -\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{\infty}c_{nk}\int_{\Gamma_N}\frac{R(\lambda)u_k}{(z-\lambda)^m}d\lambda . \tag{4}$$

Преобразуем правую часть равенства (4) следующим образом:

$$-\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{\infty}c_{nk}\int_{\Gamma_N}\frac{R(\lambda)u_k}{(z-\lambda)^m}d\lambda = -\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{\infty}c_{nk}u_k\int_{\Gamma_N}\frac{1}{(z-\lambda)^m(\mu_k-\lambda)}d\lambda = \sum_{k=1}^{N}\frac{c_{nk}u_k}{\left(z-\mu_k\right)^m} .$$

Для вычисления левой части (4) воспользуемся представлением (2):

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_N}\frac{R(\lambda)v_n}{(z-\lambda)^m}d\lambda = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_N}\frac{1}{(z-\lambda)^m}R_0(\lambda)\left(PR_0(\lambda)\right)^k v_n d\lambda . \tag{5}$$

Оценим s-й остаток ряда (5):

$$\left\| \sum_{k=s}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_N} \frac{1}{(z-\lambda)^m} R_0(\lambda)\left(PR_0(\lambda)\right)^k v_n d\lambda \right\|_H \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{k=s}^{\infty} \int_{\Gamma_N} \frac{\left\|R_0(\lambda)P\right\|^k}{|z-\lambda|^m |\lambda_n - \lambda|} \|v_n\|_H |d\lambda| \leq$$

$$\frac{\lambda_N + r}{\left(\lambda_N + r - \lambda_n\right)\left(z - \lambda_N - r\right)^m} \sum_{k=s}^{\infty} \max_{\lambda \in \Gamma_N} \left\|R_0(\lambda)P\right\|^k = \frac{\lambda_N + r}{\left(\lambda_N + r - \lambda_n\right)\left(z - \lambda_N - r\right)^m} \frac{q^s}{1-q},$$

где $q = \frac{\|P\|}{r} < 1$. Таким образом, при некотором s, а также за счет выбора z, можно получить достаточно малую оценку. Пусть, например, такая оценка получена при $s = 2$. Вычислим два первых члена ряда (5). При $k = 0$ имеем

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_N} \frac{R_0(\lambda) v_n}{(z-\lambda)^m} d\lambda = -\frac{v_n}{2\pi i} \int_{\Gamma_N} \frac{1}{(z-\lambda)^m (\lambda_n - \lambda)} d\lambda = \frac{v_n}{(z-\lambda_n)^m}.$$

При $k = 1$ воспользуемся представлением резольвенты в виде ряда [11, гл. 5, § 3]:

$$R_0(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\cdot, v_k\right) v_k}{\lambda_k - \lambda}.$$

Тогда:

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_N} \frac{R_0(\lambda) P R_0(\lambda) v_n}{(z-\lambda)^m} d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_N} \frac{R_0(\lambda) P v_n}{(z-\lambda)^m (\lambda_n - \lambda)} d\lambda =$$

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_N} \frac{1}{(z-\lambda)^m (\lambda_n - \lambda)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(Pv_n, v_k) v_k}{\lambda_k - \lambda} d\lambda =$$

$$\frac{m(Pv_n, v_n) v_n}{(z-\lambda_n)^{m+1}} + \sum_{\substack{k \leq N, \\ k \neq n}} \left(\frac{(Pv_n, v_k) v_k}{(z-\lambda_n)^m \left(\lambda_n - \lambda_k\right)} + \frac{(Pv_n, v_k) v_k}{(z-\lambda_k)^m \left(\lambda_k - \lambda_n\right)} \right) + \sum_{k > N} \frac{(Pv_n, v_k) v_k}{(z-\lambda_n)^m \left(\lambda_n - \lambda_k\right)}.$$

Подставляя все вычисленные интегралы в (4), получим:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{nk} u_k}{(z-\mu_k)^m} = \frac{v_n}{(z-\lambda_n)^m} +$$

$$\frac{m(Pv_n, v_n) v_n}{(z-\lambda_n)^{m+1}} + \sum_{\substack{k \leq N, \\ k \neq n}} \left(\frac{(Pv_n, v_k) v_k}{(z-\lambda_n)^m \left(\lambda_n - \lambda_k\right)} + \frac{(Pv_n, v_k) v_k}{(z-\lambda_k)^m \left(\lambda_k - \lambda_n\right)} \right) + \sum_{k > N} \frac{(Pv_n, v_k) v_k}{(z-\lambda_n)^m \left(\lambda_n - \lambda_k\right)} + R_2^m, \quad (6)$$

где $\left\|R_2^m\right\|_H \leq \frac{\lambda_N + r}{\left(\lambda_N + r - \lambda_n\right)\left(z - \lambda_N - r\right)^m} \frac{q^s}{1-q}$.

Далее **предположим**, что все числа μ_n, $n \leq N$ различны. Тогда матрица Вандермонда $\left(\frac{1}{(z-\mu_k)^m}\right)_{\substack{k=\overline{1,N}, \\ m=\overline{0,N-1}}}$ обратима. Обозначим элементы обратной матрицы через w_{km}. Умножим на обратную матрицу систему уравнений (6), разрешив ее относительно неизвестных $c_{nk} u_k$.

$$c_{nk} u_k = \sum_{m=0}^{N-1} w_{km} \left[\frac{v_n}{(z-\lambda_n)^m} + \right.$$

$$\left. \sum_{m=0}^{N-1} \frac{m(Pv_n, v_n) v_n}{(z-\lambda_n)^{m+1}} + \sum_{\substack{k \leq N, \\ k \neq n}} \left(\frac{(Pv_n, v_k) v_k}{(z-\lambda_n)^m \left(\lambda_n - \lambda_k\right)} + \frac{(Pv_n, v_k) v_k}{(z-\lambda_k)^m \left(\lambda_k - \lambda_n\right)} \right) + \sum_{k > N} \frac{(Pv_n, v_k) v_k}{(z-\lambda_n)^m \left(\lambda_n - \lambda_k\right)} + R_2^m \right]. \quad (7)$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов c_{nk} умножим скалярно равенство (7) на v_n. Получим:

$$c_{nk}^2 = \sum_{m=0}^{N-1} w_{km} \left(\frac{1}{(z-\lambda_n)^m} + \frac{m(Pv_n, v_n)}{(z-\lambda_n)^{m+1}} + (R_2^m, v_n) \right) \Bigg].$$

Таким образом, все неизвестные ортонормированные собственные функции u_k, $k \le N$ будут найдены.

Остальные функции u_k, $k > N$ можно находить аналогично, действуя на равенство (3) проектором $-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n} R(\lambda)d\lambda$. В силу леммы (2) внутри контура γ_n будет находиться по одному собственному числу. После преобразований получим аналогичное равенству (6), но более простое представление:

$$c_{nn}u_n = v_n + \sum_{k \ne n} \frac{(Pv_n, v_k)v_k}{\lambda_n - \lambda_k} + R_2 ,$$

где $\|R_2\|_H \le \frac{q^2}{1-q}$.

При необходимости можно вычислить не два первых члена ряда (5), а несколько. Однако сложность вычисления каждого следующего члена возрастает.

Литература

1. Кадченко, С.И. Вычисление собственных значений возмущенных дискретных полуограниченных операторов / С.И. Кадченко, И.И. Кинзина // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2006. – Т. 46, № 7. – С. 1265–1272.

2. Дубровский, В.В. К обоснованию метода вычислений собственных чисел дискретного оператора с помощью регуляризованных следов / В.В. Дубровский, В.А. Садовничий // Совместные заседания семинара имени И.Г. Петровского по дифференциальным уравнениям и математическим проблемам физики и Московского математического общества (тринадцатая сессия, 2–5 февраля 1990 г.). – Успехи математических наук. – 1990. – Т. 45, № 4(274). – С. 120.

3. Садовничий, В.А. Замечание об одном новом методе вычисления собственных значений и собственных функций дискретных операторов / В.А. Садовничий, В.В. Дубровский // Тр. семинара им. И.Г. Петровского. – 1994. – № 17. – С. 244–248.

4. Вычисление первых собственных чисел краевой задачи Орра–Зоммерфельда с помощью теории регуляризованных следов / В.В. Дубровский, С.И. Кадченко, В.Ф. Кравченко, В.А. Садовничий // Электромагнитные волны и электронные системы. – 1997. – Т. 2, № 6. – С. 13–19.

5. Вычисление первых собственных чисел дискретного оператора / В.В. Дубровский, С.И. Кадченко, В.Ф. Кравченко, В.А. Садовничий // Электромагнитные волны и электронные системы. – 1998. – Т. 3, № 2. – С. 6–8.

6. Садовничий, В.А. Вычисление первых собственных чисел краевой задачи гидродинамической устойчивости течения Пуазейля в круглой трубе / В.А. Садовничий, В.В. Дубровский, С.И. Кадченко, В.Ф. Кравченко // Дифференциальные уравнения. – 1998. – № 1. – С. 50–53.

7. Кадченко, С.И. Новый метод вычисления собственных чисел спектральной задачи Орра–Зоммерфельда / С.И. Кадченко // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2000. – Т. 5, № 6. – С. 4–10.

8. Новый метод приближенного вычисления первых собственных чисел спектральной задачи Орра–Зоммерфельда / В.В. Дубровский, С.И. Кадченко, В.Ф. Кравченко, В.А. Садовничий // Доклады Академии Наук. – 2001. – Т. 378, № 4. – С. 443–445.

9. Кинзина, И.И. Вычисление собственных чисел дискретного самосопряженного оператора, возмущенного ограниченным оператором / И.И. Кинзина // Известия вузов. Математика. – 2008. – № 6. – С. 16–24.

10. Садовничий, В.А. Регуляризованный след ограниченнего оператора с ядерной резольвентой / В.А. Садовничий, В.Е. Подольский // Дифференциальные уравнения. – 1999. – Т. 35, № 4. – С. 556–564.

11. Като, Т. Теория возмущений линейных операторов / Т. Като. – М.: Мир, 1972. – 740 с.

Поступила в редакцию 4 января 2019 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2019, vol. 11, no. 1, pp. 16–23

DOI: 10.14529/mmph190103

ON CALCULATION OF EIGENVALUES AND EIGENFUNCTIONS OF A DISCRETE OPERATOR WITH A NUCLEAR RESOLVENT PERTURBED BY A BOUNDED OPERATOR

A.I. Sedov
Magnitogorsk State Technical University of G.I. Nosova, Magnitogorsk, Russian Federation
E-mail: sedov-ai@yandex.ru

The problem of calculating eigenvalues and eigenfunctions of a perturbed linear self-adjoint operator with a nuclear resolvent, perturbed by a bounded operator operating in a separable Hilbert space, is being considered. In order to solve the problem, the method of regularized traces proposed by V.A. Sadovnichy and V.V. Dubrovsky and developed by their followers is used. The classical method of regularized traces for enhancement of calculations' accuracy assumes calculation of several terms of a series. The complexity of calculation of each subsequent term of a series non-linearly increases. Alteration of the classical method, which is proposed in this work, leads to another series, the rate of convergence of which is significantly higher, which allows decreasing the number of terms of the series that are used for calculation. Developing the proposed method, there are formulas for calculation of Fourier coefficients for expansion of perturbed eigenfunctions in a series by non-perturbed ones provided in the article. Inverse Vandermonde matrix is used for calculation of first eigenfunctions. Assessments of series remainders are given.

Keywords: eigenvalues; eigenfunctions; kernel operator; perturbed operator.

References

1. KadchenkoI S.I., Kinzina I. Computation of eigenvalues of perturbed discrete semibounded operators. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2006, Vol. 46, no. 7, pp. 1200–1206. DOI: 10.1134/S0965542506070116

2. Dubrovskiy V.V., Sadovnichiy V.A. K obosnovaniyu metoda vychisleniy sobstvennykh chisel diskretnogo operatora s pomoshch'yu regulyarizovannykh sledov (To the substantiation of the method of calculating the eigenvalues of a discrete operator using regularized traces). Joint sessions of the seminar I.G. Petrovsky on differential equations and mathematical problems of physics and the Moscow Mathematical Society (thirteenth session, February 2–5, 1990). *Uspekhi matematicheskikh nauk*, 1990, Vol. 45, no. 4(274), p. 120. (in Russ.).

3. Sadovnichiy V.A., Dubrovskiy V.V. Zamechanie ob odnom novom metode vychisleniya sobstvennykh znacheniy i sobstvennykh funktsiy diskretnykh operatorov (Remark on a new method of calculation eigenvalues and eigenfunctions for discrete operators). *Tr. seminara im. I.G. Petrovskogo* (Proc. the seminar named after I.G. Petrovsky), 1994, no. 17, pp. 244–248. (in Russ.).

4. Dubrovskiy V.V., Kadchenko S.I., Kravchenko V.F., Sadovnichiy V.A. Vychislenie pervykh sobstvennykh chisel kraevoy zadachi Orra–Zommerfel'da s pomoshch'yu teorii regulyarizovannykh sledov (Calculation of the first eigenvalues of the Orr–Sommerfeld boundary value problem using the theory of regularized traces). *Elektromagnitnye volny i elektronnye sistemy*, 1997, Vol. 2, no. 6, pp. 13–19. (in Russ.).

5. Dubrovskiy V.V., Kadchenko S.I., Kravchenko V.F., Sadovnichiy V.A. Vychislenie pervykh sobstvennykh chisel diskretnogo operatora (Calculation of the first eigenvalues of a discrete operator). *Elektromagnitnye volny i elektronnye sistemy*, 1998, Vol. 3, no. 2, pp. 6–8. (in Russ.).

6. Sadovnichy V.A., Dubrovskii V.V., Kadchenko S.I., Kravchenko V.F. Computation of the first eigenvalues of a boundary value problem on the hydrodynamic stability of a Poiseuille flow in a circular tube. *Differential Equations*, 1998, Vol. 34, no. 1, pp. 49–53.

7. Kadchenko, S.I. Novyy metod vychisleniya sobstvennykh chisel spektral'noy zadachi Orra–Zommerfel'da (New method for calculating the eigenvalues of the Orr–Sommerfeld spectral problem). *Elektromagnitnye volny i elektronnye sistemy,* 2000, Vol. 5, no. 6, pp. 4–10. (in Russ.).

8. Dubrovskiy V.V., Kadchenko S.I., Kravchenko V.F., Sadovnichiy V.A. Novyy metod priblizhennogo vychisleniya pervykh sobstvennykh chisel spektral'noy zadachi Orra–Zommerfel'da (A new method for the approximate calculation of the first eigenvalues of the Orr–Sommerfeld spectral problem). *Doklady Akademii Nauk*, 2001, Vol. 378, no. 4, pp. 443–445. (in Russ.).

9. Kinzina I.I. Calculation of eigenvalues of a discrete self-adjoint operator perturbed by a bounded operator. *Russian Mathematics* (Izvestiya VUZ. Matematika), 2008, Vol. 52, no. 6, pp. 13–21. DOI: 10.3103/S1066369X08060029

10. Sadovnichii V.A., Podolskii V.E. A regularized trace of a bounded perturbation of an operator with a trace-class resolvent. *Differential Equations*, 1999, Vol. 35, no. 4, pp. 557–566.

11. Kato T. *Teoriya vozmushcheniy lineynykh operatorov* (Theory of perturbations of linear operators), Moscow, Mir Publ., 1972, 740 p. (in Russ.). [Kato T. Perturbation theory for linear operators. Springer-Verlag, 1966, 592 p.]

Received January 4, 2019