УДК 519.63 **DOI: 10.14529/mmph190204**

АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭКРАНИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА

А.Л. Ушаков
Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация
E-mail: ushakoval@susu.ru

Экранированное уравнение рассматривается на прямоугольной области со смешанными краевыми условиями. При численном решении этой задачи предлагается использовать итерационную факторизацию после фиктивного продолжения дискретной задачи аппроксимирующей решаемую задачу. В итоге решение основывается на решении систем линейных алгебраических уравнений с матрицами треугольного вида, в которых ненулевых элементов не боле трех в каждой строке. При достаточно малой погрешности аппроксимации рассматриваемой задачи требуемая относительная погрешность предлагаемого итерационного процесса достигается за количество итераций, независящее от параметров дискретизации. Итерационный процесс оказывается методом, дающим оптимальную асимптотику по количеству операций в арифметических действиях. Разработанный итерационный процесс основывается на характерных особенностях указанной модельной задачи. Эта задача может быть получена в методах фиктивных компонент, пространств, когда решают краевые задачи для эллиптических уравнений в областях сложной формы. Приводится алгоритм реализации итерационного метода с выбором итерационных параметров в автоматическом режиме, с применением метода минимальных невязок, поправок. Это дает критерий для остановки итерационного процесса при получении указанной предварительно относительной погрешности. Приведен простейший тестовый пример для вычислительных экспериментов, подтверждающих асимптотическую оптимальность для итерационного метода в количестве вычислительных затрат. Реализация метода существенно основывается на использовании комплексного анализа.

Ключевые слова: экранированное уравнение Пуассона; итерационные факторизации; фиктивное продолжение.

Введение

Рассматривается экранированное уравнение Пуассона, в частности, уравнение Пуассона в области прямоугольной формы с однородным условием Дирихле на двух смежных сторонах прямоугольника и однородным условием Неймана на двух других смежных сторонах этого прямоугольника. Для дискретного аналога этой решаемой модельной задачи, системы алгебраических и линейных уравнений указывается переобуславливатель с факторизацией попеременно треугольного типа. При вычислениях на ЭВМ в предлагаемом итерационном процессе выбор итерационных параметров производится с помощью методов минимальных невязок, поправок и скорейшего спуска [1]. Решаемая краевая задача получается, когда на ЭВМ моделируются перемещения мембран на упругих основаниях не обязательно прямоугольной формы. Предлагаемый метод имеет аналогии с методами типа фиктивных компонент, пространств, но использует комплексный анализ.

Непрерывная задача

Рассматривается смешанная краевая задача для экранированного уравнения Пуассона в вариационной постановке на прямоугольной области:

$$\breve{u}_1 \in \breve{W}_1 : \mathrm{A}(\breve{u}_1, \breve{v}_1) = g_1(\breve{v}_1) \ \forall \breve{v}_1 \in \breve{W}_1,\ g_1 \in \breve{W}_1', \tag{1}$$

где

$$\breve{W}_1 = \breve{W}_1(\Omega) = \left\{ \breve{v}_1 \in W_2^1(\Omega) : \breve{v}\big|_{\Gamma_1} = 0 \right\}$$

– пространство Соболева из функций на области прямоугольного вида

$$\Omega=(0;b_1)\times(0;b_2),\text{ с }\Gamma_1=\{b_1\}\times(0;b_2)\cup(0;b_1)\times\{b_2\},\ \Gamma_2=\{0\}\times(0;b_2)\cup(0;b_1)\times\{0\},$$

а

$$\mathrm{A}(\breve{u}_1,\breve{v}_1)=\int_\Omega(\breve{u}_{1x}\breve{v}_{1x}+\breve{u}_{1y}\breve{v}_{1y}+\kappa\breve{u}_1\breve{v}_1d\Omega,\ \kappa\ge 0$$

есть билинейная форма, при заданных константах $b_1, b_2>0,\ \kappa\ge 0.$ Решение этой задачи существует и единственно [2, 3].

Если

$$g_1(\breve{v}_1)=\int_\Omega \breve{f}_1\breve{v}_1 d\Omega,$$

когда $\breve{f}_1$ является заданной функцией, суммируемой с квадратом, задача (1) записывается в виде

$$\Delta\breve{u}_1=\breve{f}_1,\ \ \breve{u}_1\big|_{\Gamma_1}=0,\ \ \frac{\partial\breve{u}_1}{\partial\vec{n}}\Big|_{\Gamma_2}=0, \tag{2}$$

где $\vec{n}$ – внешняя нормаль на границе области $\partial\Omega$.

Дискретная задача с продолжением

Рассматривается линейная алгебраическая система уравнений, получающаяся при аппроксимации (1), (2), если использовать метод сумматорных тождеств

$$\overline{u}_1\in\mathbb{R}^N:\ \mathrm{A}\overline{u}_1=\overline{f}_1,\ \ \overline{f}_1\in\mathbb{R}^N. \tag{3}$$

При этом используются векторы следующего вида:

$$\overline{v}_1\in\mathbb{R}^N:\ \overline{v}_1=(v_{1,1},\dots,v_{1,N})',\ \ N=m\cdot n,\ \ m,\ \ n\in\mathbb{N},$$

а компоненты этих векторов таковы, что

$$v_{1,n(i-1)+j}=v_{1,i,j},\ \ i=1,\dots,m,\ \ j=1,\dots,n,$$

здесь $v_{1,i,j}$ – есть значения функций дискретных аргументов в следующих узлах сетки:

$$(x_i,y_j)=\big((i-0{,}5)h_1,(j-0{,}5)h_2\big),$$

и шаги сетки берутся следующие

$$h_1=b_1/(n+0{,}5),\ \ h_2=b_2/(n+0{,}5),$$

сетка состоит из узлов выбранных ранее, тогда матрица Λ размерности $N\times N$ определяется следующим образом:

$$\langle\mathrm{A}\overline{u}_1,\overline{v}_1\rangle=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n((u_{1,i+1,j}-u_{1,i,j})(v_{1,i+1,j}-v_{1,i,j})h_1^{-2}+$$

$$+(u_{1,i,j+1}-u_{1,i,j})(v_{1,i,j+1}-v_{1,i,j})h_2^{-2}+\kappa u_{1,i,j}v_{1,i,j})h_1h_2,$$

$$u_{1,i,n+1}=v_{1,i,n+1}=0,\ i=1,\dots,m,\quad u_{1,m+1,j}=v_{1,m+1,j}=0,\ j=1,\dots,n.$$

Здесь $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – это скалярное произведение задаваемое формулой

$$\langle\overline{u}_1,\overline{v}_1\rangle=\sum_{k=1}^N u_{1,k}v_{1,k}h_1h_2\quad\forall\overline{u}_1,\overline{v}_1\in\mathbb{R}^N.$$

Если функция f_1 непрерывна на области Ω, то можно положить, что

$$f_{1,i,j}=f(x_i,y_j),\ \ i=1,\dots,m,\ \ j=1,\dots,n.$$

Решение задачи (3) будет существовать и являться единственным, т.к. $\mathrm{A}>0$.

Строим продолжение задачи (3):

$$\vec{u}\in\mathbb{R}^{2N}:\ D\vec{u}=\vec{f},\ \ \vec{f}\in\mathbb{R}^{2N},\ \ \vec{f}_2=\vec{0}, \tag{4}$$

когда векторы имеют следующую форму:

$$\vec{v}\in\mathbb{R}^{2N}:\ \vec{v}=(\overline{v}_1',\overline{v}_2')',$$

а матрица D размерности $2N\times 2N$ блочная и верхняя треугольная такая, что:

$$D_{11}=\mathrm{A},\ D_{12}=0,\ D_{21}=\theta,\ D_{22}=A,$$

и

$$D=\begin{bmatrix} \mathrm{A} & 0 \\ \theta & A \end{bmatrix},$$

при этом матрицы

$$\theta=\nabla_x{}'\nabla_y-\nabla_y{}'\nabla_x\,,\ A=\nabla_x{}'\nabla_x+\nabla_y{}'\nabla_y\,,$$

а матрицы ∇_x, ∇_y с размерности $N\times N$ определяются следующим образом:

$$\left\langle\nabla_x\bar{u}_1,\bar{v}_1\right\rangle=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(-(u_{1,i+1,j}-u_{1,i,j})h_1^{-1}v_{1,i,j})h_1h_2,\ u_{1,m+1,j}=v_{1,m+1,j}=0,\ \ j=1,...,n;$$

$$\left\langle\nabla_y\bar{u}_1,\bar{v}_1\right\rangle=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(-(u_{1,i,j+1}-u_{1,i,j})h_2^{-1}v_{1,i,j})h_1h_2,\ u_{1,i,n+1}=v_{1,i,n+1}=0,\ \ i=1,...,m.$$

Задаются подпространства векторов из пространства $\mathbb{R}^{2N}$:

$$\vec{W}_1=\left\{\vec{v}=(\bar{v}_1{}',\bar{v}_2{}')':\theta\bar{v}_1+A\bar{v}_2=\bar{0}\right\},\ \vec{W}_2=\left\{\vec{v}=(\bar{v}_1{}',\bar{v}_2{}')':\bar{v}_1=\bar{0}\right\}.$$

Лемма 1. *Решение задачи (4) $\vec{u}\in\vec{W}_1$ будет существовать и являться единственным, а $\bar{u}_1$ будет решением задачи (3).*

Метод итерационных факторизаций при фиктивном продолжении

Дополнительно определяется блочная матрица C размерности $2N\times 2N$, когда

$$C_{11}=C_{22}=A\,,\ C_{12}=-\theta\,,\ C_{21}=\theta,$$

тогда

$$C=\begin{bmatrix} A & -\theta \\ \theta & A \end{bmatrix}.$$

Чтобы решать задачу (4), предлагается итерационный процесс:

$$\vec{u}^k\in\mathbb{R}^{2N}:\ C(\vec{u}^k-\vec{u}^{k-1})=-\tau_k(D\vec{u}^{k-1}-\vec{f})\,,\ k\in\mathbb{N}\,,\ \tau_k>0\,,\forall\vec{u}^0\in\vec{W}_1. \tag{5}$$

В итерационном процессе (5) на каждом шаге получается задача с факторизованным оператором такого вида:

$$\bar{U}\in\mathbb{C}^N:\ LL^*\bar{U}=\bar{F}\,,\ \bar{F}\in\mathbb{C}^N\,,$$

которая расщепляется на простые задачи

$$\text{а) } \bar{Q}\in\mathbb{C}^N\,,\ L\bar{Q}=\bar{F}\,,\ \bar{P}\in\mathbb{C}^N;$$

$$\text{б) } \bar{U}\in\mathbb{C}^N\,,\ L^*\bar{U}=\bar{Q}\,,\ \bar{Q}\in\mathbb{C}^N\,,$$

здесь матрицы

$$L=\nabla_x{}'-\mathrm{i}\nabla_y{}'\,,\ L^*=\bar{L}'=\nabla_x+\mathrm{i}\nabla_y\,,\ LL^*=(\nabla_x{}'-\mathrm{i}\nabla_y{}')(\nabla_x+\mathrm{i}\nabla_y)=A+\mathrm{i}\,\theta\,,$$

поэтому

$$(A+\mathrm{i}\,\theta)(\bar{u}_1+\mathrm{i}\bar{u}_2)=\bar{f}_1+\mathrm{i}\bar{f}_2$$

или

$$\begin{cases} A\bar{u}_1-\theta\bar{u}_2=\bar{f},\ \ \bar{u}_1+\mathrm{i}\bar{u}_2=\bar{U}; \\ \theta\bar{u}_1+A\bar{u}_2=\bar{f}_2,\ \ \bar{f}_1+\mathrm{i}\bar{f}_2=\bar{F}, \end{cases}$$

тогда на каждом шаге процесса (5) возникает следующая задача:

$$C\vec{u}=\vec{f}\,,\ \vec{u}=(\bar{u}_1',\bar{u}_2')',\ \vec{f}=(\bar{f}_1{}',\bar{f}_2{}')'.$$

Лемма 2. *В итерационном процессе (5) выполняется*

$$\theta\bar{\psi}_1^k+A\bar{\psi}_2^k=(1-\tau_k)(\theta\bar{\psi}_1^{k-1}+A\bar{\psi}_2^{k-1}),\ \vec{\psi}^k\in\vec{W}_1,$$

где $\vec{\psi}^k=\vec{u}^k-\vec{u},\ \forall k\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$ *– обозначение ошибки.*

Лемма 3. *В итерационном процессе (5) выполняется*

$$\left\langle C\vec{\psi},\vec{\psi}\right\rangle=\left\langle A\bar{\psi}_1,\bar{\psi}_1\right\rangle-\left\langle A\bar{\psi}_2,\bar{\psi}_2\right\rangle,\ \vec{\psi}\in\vec{W}_1,$$

где рассматривается скалярное произведение векторов следующего вида:

$$\langle \vec{u},\vec{v}\rangle = (\vec{u},\vec{v})h_1h_2 = \langle \vec{u}_1,\vec{v}_1\rangle + \langle \vec{u}_2,\vec{v}_2\rangle = (\vec{u}_1,\vec{v}_1)h_1h_2 + (\vec{u}_2,\vec{v}_2)h_1h_2 =$$
$$= \sum_{k=1}^{N} u_{1,k}v_{1,k}h_1h_2 + \sum_{k=1}^{N} u_{2,k}v_{2,k}h_1h_2 = \sum_{k=1}^{2N} u_k v_k h_1h_2,\ \forall \vec{u},\vec{v}\in \mathbb{R}^{2N}.$$

Доказательство. Учитывая, что

$$\theta\overline{\psi}_1 + A\overline{\psi}_2 = \overline{0},\ \theta' = -\theta,$$

получается

$$\langle C\vec{\psi},\vec{\psi}\rangle = \langle A\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_1\rangle - \langle \theta\overline{\psi}_2,\overline{\psi}_1\rangle = \langle A\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_1\rangle + \langle \overline{\psi}_2,\theta\overline{\psi}_1\rangle = \langle A\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_1\rangle + \langle A\overline{\psi}_2,\overline{\psi}_2\rangle.$$

Лемма 4. *Имеют место неравенства:*

$$1.\ \exists\alpha\in(0;1): \langle A\overline{\psi}_2,\overline{\psi}_2\rangle \le \langle A\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_1\rangle,\ \forall\vec{\psi}\in\vec{W}_1;$$
$$2.\ \exists\gamma\in(1;+\infty): \langle A\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_1\rangle \le \gamma\langle C\vec{\psi},\vec{\psi}\rangle,\ \forall\vec{\psi}\in\vec{W}_1.$$

Доказательство. По лемме 3 второе неравенство равносильно

$$\langle A\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_1\rangle \le \gamma\langle A\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_1\rangle - \gamma\langle A\overline{\psi}_2,\overline{\psi}_2\rangle$$

и равносильно первому неравенству при $\alpha = 1-\gamma^{-1},\ \gamma = (1-\alpha)^{-1}$.

Второе неравенство имеет место, т.к. матрицы $A>0, C>0$. Последнее неравенство имеет место, т.к.

$$(C\vec{\psi},\vec{\psi}) = (\nabla_x\overline{\psi}_1 - \nabla_y\overline{\psi}_2)^2 + (\nabla_y\overline{\psi}_1 + \nabla_x\overline{\psi}_2)^2 > 0\ \forall\vec{\psi}\ne\vec{0}$$

и

$$(\nabla_x + i\nabla_y)(\overline{\psi}_1 + i\overline{\psi}_2) \ne \overline{0}\ \forall\vec{\psi}\ne\vec{0}.$$

Также можно отметить, что для $\forall\vec{\psi}\in\vec{W}_1$

$$\exists\lambda_0^{-1}\in(0;+\infty):\ 0\le\langle A\overline{\psi}_2,\overline{\psi}_2\rangle = \langle A^{-1}\theta\overline{\psi}_1,\theta\overline{\psi}_1\rangle \le \lambda_0^{-1}\langle\theta\overline{\psi}_1,\theta\overline{\psi}_1\rangle \to 0,$$

при $h_1,h_2\to 0$, т.е.

$$\langle A\overline{\psi}_2,\overline{\psi}_2\rangle \to 0,\ \overline{\psi}_2\to\overline{0},$$

т.к.

$$\theta\overline{\psi}_1 = \left(\nabla_x{}'\nabla_y - \nabla_y{}'\nabla_x\right)\overline{\psi}_1 \to \overline{0},$$

при $h_1,h_2\to 0\ \ \forall\vec{\psi}\in\vec{W}_1$,

по формуле Тейлора для дискретных аналогов достаточно дифференцируемых функций.

Лемма 5. *Имеют место следующие неравенства:*

$$\frac{1-\alpha}{\alpha}\langle A\overline{\psi}_2,\overline{\psi}_2\rangle \le (1-\alpha)\langle A\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_1\rangle \le \langle C\vec{\psi},\vec{\psi}\rangle,\ \forall\vec{\psi}\in\in\vec{W}_1.$$

Доказательство. Используется, что

$$\langle A\overline{\psi}_2,\overline{\psi}_2\rangle \le \alpha\langle A\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_1\rangle,\ \forall\vec{\psi}\in\vec{W}_1,$$

тогда получается:

$$\frac{1-\alpha}{\alpha}\langle A\overline{\psi}_2,\overline{\psi}_2\rangle \le (1-\alpha)\langle A\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_1\rangle = \langle A\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_1\rangle - \alpha\langle A\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_1\rangle \le$$
$$\le \langle A\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_1\rangle - \langle A\overline{\psi}_2,\overline{\psi}_2\rangle = \langle C\vec{\psi},\vec{\psi}\rangle,\ \forall\vec{\psi}\in\vec{W}_1.$$

Лемма 6. *Имеют место неравенства*

$$\exists\gamma\in(1;+\infty):\ \langle C\vec{\psi},\vec{\psi}\rangle \le \langle D\vec{\psi},\vec{\psi}\rangle \le \gamma\delta\langle C\vec{\psi},\vec{\psi}\rangle\ \ \forall\vec{\psi}\in\vec{W}_1.$$

Доказательство. Замечается, что

$$\frac{1-\alpha}{\delta}\langle D\vec{\psi},\vec{\psi}\rangle \le \frac{1-\alpha}{\delta}\langle \mathrm{A}\,\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_1\rangle \le (1-\alpha)\langle A\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_1\rangle \le \langle C\vec{\psi},\vec{\psi}\rangle =$$

$$=\left\langle A\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_1\right\rangle-\left\langle A\overline{\psi}_2,\overline{\psi}_2\right\rangle\le\left\langle \mathrm{A}\,\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_1\right\rangle=\left\langle D\vec{\psi},\vec{\psi}\right\rangle\ \ \forall\,\vec{\psi}\in\vec{W}_1.$$

При этом использовалось, что

$$A\le \mathrm{A}\le\delta A,\ \ \delta=1+\kappa\lambda_0^{-1},\ \gamma=(1-\alpha)^{-1}.$$

Лемма 7. *Если в итерационном процессе (5) выбирать*

$$\tau_k=\tau=2/(1+\delta\gamma),$$

то

$$\left\langle C\vec{\psi}^k,\vec{\psi}^k\right\rangle\le q^2\left\langle C\vec{\psi}^{k-1},\vec{\psi}^{k-1}\right\rangle,\ k\in\mathbb{N},$$

где

$$q=(\delta\gamma-1)/(\delta\gamma+1).$$

Доказательство. Из итерационного процесса (5) следует

$$C(\vec{\psi}^k-\vec{\psi}^{k-1})=-\tau D\vec{\psi}^{k-1},\ \vec{\psi}^k=T\vec{\psi}^{k-1},\ T=E-\tau C^{-1}D,\ T=T'>0.$$

Здесь $E=E_{2N\times 2N}$ – единичная матрица. В данном случае получается, что

$$\left\langle C\vec{\psi}^k,\vec{\psi}^k\right\rangle=\left\langle CT\vec{\psi}^{k-1},T\vec{\psi}^{k-1}\right\rangle\le\sup_{\vec{\psi}\in\vec{W}_1}\frac{\left\langle CT\vec{\psi},T\vec{\psi}\right\rangle}{\left\langle C\vec{\psi},\vec{\psi}\right\rangle}\left\langle C\vec{\psi}^{k-1},\vec{\psi}^{k-1}\right\rangle=$$

$$=\sup_{\vec{\psi}\in\vec{W}_1}\left(\frac{\left\langle CT\vec{\psi},\vec{\psi}\right\rangle}{\left\langle C\vec{\psi},\vec{\psi}\right\rangle}\right)^2\left\langle C\vec{\psi}^{k-1},\vec{\psi}^{k-1}\right\rangle=\sup_{\vec{\psi}\in\vec{\psi}\in\vec{W}_1}\left(\frac{\left\langle (C-\tau DT)\vec{\psi},\vec{\psi}\right\rangle}{\left\langle C\vec{\psi},\vec{\psi}\right\rangle}\right)^2\left\langle C\vec{\psi}^{k-1},\vec{\psi}^{k-1}\right\rangle=$$

$$=\sup_{\vec{\psi}\in\vec{\psi}\in\vec{W}_1}\left(1-\tau\frac{\left\langle D\vec{\psi},\vec{\psi}\right\rangle}{\left\langle C\vec{\psi},\vec{\psi}\right\rangle}\right)^2\left\langle C\vec{\psi}^{k-1},\vec{\psi}^{k-1}\right\rangle=\max\left\{\left|1-\tau\right|^2\left|1-\tau\gamma\delta\right|^2\right\}\left\langle C\vec{\psi}^{k-1},\vec{\psi}^{k-1}\right\rangle=q^2\left\langle C\vec{\psi}^{k-1},\vec{\psi}^{k-1}\right\rangle.$$

Теорема 1. *Если в итерационном процессе (5) выбирать*

$$\tau_k=\tau=2/(1+\delta\gamma),$$

то

$$\left\|\overline{u}_1^{\,k}-\overline{u}_1\right\|_{\mathrm{A}}\le\varepsilon\left\|\overline{u}_1^{\,0}-\overline{u}_1\right\|_{\mathrm{A}},$$

где

$$\varepsilon\le\sqrt{\gamma\delta}\,q^k,\ q=(\gamma\delta-1)/(\delta\gamma+1),$$

а

$$\left\|\overline{v}_1\right\|_{\mathrm{A}}=\sqrt{\left\langle \mathrm{A}\overline{v}_1,\overline{v}_1\right\rangle}\ \forall\overline{v}_1\in\mathbb{R}^N.$$

Доказательство. Из доказательства леммы 6 видно, что выполняются неравенства, из которых следует доказательство

$$\frac{1-\alpha}{\delta}\left\langle \mathrm{A}\,\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_1\right\rangle\le(1-\alpha)\left\langle A\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_1\right\rangle\left\langle C\vec{\psi},\vec{\psi}\right\rangle=$$

$$\left\langle A\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_1\right\rangle-\left\langle A\overline{\psi}_2,\overline{\psi}_2\right\rangle\le\left\langle \mathrm{A}\,\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_1\right\rangle,\ \forall\,\vec{\psi}\in\vec{W}_1.$$

Теорема 2. *Для итерационного процесса (5) в оценке относительной ошибки*

$$\left\|\overline{u}_1^{\,k}-\overline{u}_1\right\|_{\mathrm{A}}\le\varepsilon\left\|\overline{u}_1^{\,0}-\overline{u}_1\right\|_{\mathrm{A}},$$

если τ_k, $k\in\mathbb{N}$ выбирать на основе метода минимальных поправок, скорейшего спуска, то получается, что

$$\varepsilon\le c\rho^k,\ c\in(0;+\infty),\ \rho\in(0;1).$$

Вывод. Учитывая вид матриц L, L^*, можно заметить, что задача (3) при N неизвестных с помощью процесса (5) решается с относительной погрешностью ε, за $O(N\ln\varepsilon^{-1})$ арифметических операций, а итерационный процесс при реализации является асимптотически оптимальным алгоритмом [4].

Алгоритм численного решения модельной задачи для экранированного уравнения Пуассона с минимальными поправками

Итерационным процессом (5) решается дискретная задача (3):

$$\mathrm{A}\overline{u}_1 = \overline{f}_1.$$

При выборе итерационных параметров применяется метод минимальных поправок. Тогда для решаемой задачи в итерационном процессе применяется следующий алгоритм вычислений, где $\vec{\psi}^k = \vec{u}^k - \vec{u}$ – ошибка:

1. Выбирается начальное приближение:

$$\vec{u}^0 = \vec{0} \in \vec{W}_1.$$

2. Вычисляется невязка:

$$\vec{r}^{\,k-1} : \overline{r}_1^{k-1} = \mathrm{A}\overline{u}_1^{k-1} - \overline{f}_1,\ \overline{r}_2^{k-1} = \overline{0},\ k \in \mathbb{N}.$$

3. Ищется поправка:

$$\vec{w}^{k-1} \in \mathbb{R}^{2N} :\ C\vec{w}^{k-1} = \vec{r}^{\,k-1},\ k \in \mathbb{N}.$$

4. Определяется квадрат нормы ошибки:

$$\mathrm{E}_{k-1} = \left\|\vec{\psi}^{k-1}\right\|^2_{D'C^{-1}D} = \left\langle \vec{r}^{\,k-1}, \vec{w}^{k-1} \right\rangle = \left\langle \overline{r}_1^{k-1}, \overline{w}_1^{k-1} \right\rangle,\ k \in \mathbb{N}.$$

5. Ставится условие остановки итераций:

$$\mathrm{E}_{k-1}/\mathrm{E}_0 < \mathrm{E}^2,\ \mathrm{E} \in (0;1),\ k \in \mathbb{N}.$$

6. Вычисляется дополнительно вектор эквивалентной невязки:

$$\vec{\eta}^{k-1} : \overline{\eta}_1^{k-1} = \mathrm{A}\overline{w}_1^{k-1},\ \overline{\eta}_2^{k-1} = \overline{0},\ k \in \mathbb{N}.$$

7. Находится дополнительно вектор эквивалентной поправки:

$$\vec{\xi}^{k-1} \in \mathbb{R}^{2N} :\ C\vec{\xi}^{k-1} = \vec{\eta}^{k-1},\ k \in \mathbb{N}.$$

8. Определяется итерационный параметр:

$$\tau_k = \frac{\left\langle D\vec{w}^{k-1}, \vec{w}^{k-1} \right\rangle}{\left\langle C^{-1}D\vec{w}^{k-1}, D\vec{w}^{k-1} \right\rangle} = \frac{\left\langle \vec{\eta}^{k-1}, \vec{w}^{k-1} \right\rangle}{\left\langle \vec{\xi}^{k-1}, \vec{\eta}^{k-1} \right\rangle} = \frac{\left\langle \overline{\eta}_1^{k-1}, \overline{w}_1^{k-1} \right\rangle}{\left\langle \overline{\xi}_1^{k-1}, \overline{\eta}_1^{k-1} \right\rangle},\ k \in \mathbb{N}.$$

9. Вычисляется новое приближение:

$$\vec{u}^k = \vec{u}^{k-1} - \tau_k \vec{w}^{k-1},\ \ k \in \mathbb{N}.$$

В условии из пункта 5, являющимся условием остановки процесса $\mathrm{E} \in (0;1)$ есть заранее выбираемая относительная погрешность.

Алгоритм численного решения модельной задачи для экранированного уравнения Пуассона со скорейшим спуском

При выборе итерационных параметров можно применить метод скорейшего спуска, используя критерий остановки итерационного процесса из метода минимальных поправок, когда решается прежняя задача

$$\mathrm{A}\overline{u}_1 = \overline{f}_1$$

итерационным процессом (5). Если при выборе итерационных параметров применяется метод скорейшего спуска, тогда для решаемой задачи в итерационном процессе предлагается алгоритм вычислений, если $\vec{\psi}^k = \vec{u}^k - \vec{u}$ – ошибка:

1. Выбирается начальное приближение:

$$\vec{u}^0 = \vec{0} \in \vec{W}_1.$$

2. Вычисляется невязка:

$$\vec{r}^{\,k-1} : \overline{r}_1^{k-1} = \mathrm{A}\overline{u}_1^{k-1} - \overline{f}_1,\ \overline{r}_2^{k-1} = \overline{0},\ k \in \mathbb{N}.$$

3. Ищется поправка:

$$\vec{w}^{k-1} \in \mathbb{R}^{2N} :\ C\vec{w}^{k-1} = \vec{r}^{\,k-1},\ k \in \mathbb{N}.$$

4. Определяется квадрат нормы ошибки:

$$\mathrm{E}_{k-1}=\left\|\vec{\psi}^{k-1}\right\|^2_{D'C^{-1}D}=\left\langle \vec{r}^{\,k-1},\vec{w}^{k-1}\right\rangle=\left\langle \overline{r}_1^{\,k-1},\overline{w}_1^{k-1}\right\rangle,\ k\in\mathbb{N}.$$

5. Ставится условие остановки итераций:

$$\mathrm{E}_{k-1}/\mathrm{E}_0<\mathrm{E}^2,\ \mathrm{E}\in(0;1),\ k\in\mathbb{N}.$$

6. Вычисляется дополнительно вектор эквивалентной невязки:

$$\vec{\eta}^{\,k-1}:\overline{\eta}_1^{\,k-1}=\mathrm{A}\overline{w}_1^{k-1},\ \overline{\eta}_2^{\,k-1}=\overline{0},\ k\in\mathbb{N}.$$

7. Определяется итерационный параметр:

$$\tau_k=\frac{\left\langle \vec{r}^{\,k-1},\vec{w}^{k-1}\right\rangle}{\left\langle D\vec{w}^{k-1},\vec{w}^{k-1}\right\rangle}=\frac{\left\langle \vec{r}^{\,k-1},\vec{w}^{k-1}\right\rangle}{\left\langle \vec{w}^{k-1},\vec{\eta}^{\,k-1}\right\rangle}=\frac{\left\langle \overline{r}_1^{\,k-1},\overline{w}_1^{k-1}\right\rangle}{\left\langle \overline{w}_1^{k-1},\overline{\eta}_1^{\,k-1}\right\rangle},\ k\in\mathbb{N}.$$

8. Вычисляется новое приближение:

$$\vec{u}^{\,k}=\vec{u}^{\,k-1}-\tau_k\vec{w}^{k-1},\ \ k\in\mathbb{N}.$$

Также в условии из пункта 5, являющимся условием остановки процесса $\mathrm{E}\in(0;1)$ есть заранее выбираемая относительная погрешность.

Программируемый алгоритм численного решения модельной задачи для экранированного уравнения Пуассона с минимальными поправками

Решается задача:

$$\mathrm{A}\overline{u}_1=\overline{f}_1,$$

которая может записываться в виде:

$$h^2\mathrm{A}\overline{u}_1=h^2\overline{f}_1,$$

если

$$h_1=b_1/(m+0{,}5),\ h_2=b_2/(n+0{,}5),\ i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n,\ m=n,\ b_1=b_2,\ h=h_1=h_2,$$

итерационным процессом (5). При выборе итерационных параметров применяется метод минимальных поправок. Тогда для решаемой задачи в итерационном процессе программируется приведенный ранее алгоритм вычислений. Решаемая задач получается из разностной схемы, которая записывается в следующем виде:

$$4u_{1,i,j}-u_{1,i-1,j}-u_{1,i+1,j}-u_{1,i,j-1}-u_{1,i,j+1}+h^2\kappa u_{1,i,j}=h^2f_{1,i,j},\quad i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n,$$

где

$$u_{1,m+1,j}=0,\ u_{1,0,j}=u_{1,1,j},\ \ j=1,\dots,n;$$

$$u_{1,i,n+1}=0,\ u_{1,i,0}=u_{1,i,1},\ i=1,\dots,m.$$

1. Выбирается начальное приближение:

$$\vec{u}^{\,0}=\vec{0}\in\vec{W}_1.$$

При программировании элементы массива $u^0_{1,i,j}$ $i,j=0,\dots,n+1$. Полагается, что $u^0_{1,i,j}=0$, $i,j=1,\dots,n$.

2. Вычисляется невязка:

$$\vec{r}^{\,k-1}:\overline{r}_1^{\,k-1}=h^2\overline{u}_1^{k-1}-h^2\overline{f}_1,\ \overline{r}_2^{\,k-1}=\overline{0},\ k\in\mathbb{N}.$$

При программировании полагается, что

$$u^{k-1}_{1,i,n+1}=0,\ u^{k-1}_{1,i,0}=u^{k-1}_{1,i,1},\ i=1,\dots,n;$$

$$u^{k-1}_{1,n+1,j}=0,\ u^{k-1}_{1,0,j}=u^{k-1}_{1,1,j},\ j=1,\dots,n.$$

При программировании $r^{k-1}_{1,i,j}$ – элементы массива, $i,j=0,\dots,n+1$. Элементы этого массива вычисляются по формуле:

$$r^{k-1}_{1,i,j}=4u^{k-1}_{1,i,j}-u^{k-1}_{1,i-1,j}-u^{k-1}_{1,i+1,j}-u^{k-1}_{1,i,j-1}-u^{k-1}_{1,i,j+1}+h^2\kappa u^{k-1}_{1,i,j}-h^2f^{\,k-1}_{1,i,j},\ i,j=1,\dots,n.$$

3. Ищется поправка:

$$\vec{w}^{k-1}\in\mathbb{R}^{2N}:\ h^2C\vec{w}^{k-1}=\vec{r}^{\,k-1},\ k\in\mathbb{N},$$

что равносильно последовательному решению двух систем линейных алгебраических уравнений с треугольными матрицами:

$$\text{а) } \bar{Q}^{k-1} \in \mathbb{C}^N:\ hL\bar{Q}^{k-1} = \bar{R}^{k-1},\ \text{б) } \bar{W}^{k-1} \in \mathbb{C}^N:\ hL^*\bar{W}^{k-1} = \bar{Q}^{k-1}.$$

При программировании решения системы из а) будут в массиве с элементами $Q_{i,j}^{k-1}$ $i, j = 0,...,n+1$. При вычислении элементов этого массива сначала полагается $Q_{i,0}^{k-1} = Q_{0,j}^{k-1} = 0,\ i, j = 1,...,n$, а затем вычисляются элементы массива по формуле:

$$Q_{i,j}^{k-1} = \left[(1+\mathrm{i})r_{1,i,j}^{k-1} + (1+\mathrm{i})Q_{i-1,j}^{k-1} + (1-\mathrm{i})Q_{i,j-1}^{k-1}\right]\Big/2,$$

когда индексы принимают последовательно значения $i, j = 1,...,n.$

При программировании решения системы из б) будут в массиве с элементами $W_{i,j}^{k-1}$ $i, j = 0,...,n+1$. При вычислении элементов этого массива сначала полагается $W_{i,n+1}^{k-1} = W_{n+1,j}^{k-1} = 0,\ i, j = 1,...,n$, а затем вычисляются элементы массива по формуле:

$$W_{i,j}^{k-1} = \left[(1-\mathrm{i})Q_{i,j}^{k-1} + (1-\mathrm{i})W_{i+1,j}^{k-1} + (1+\mathrm{i})W_{i,j+1}^{k-1}\right]\Big/2,$$

когда индексы принимают последовательно значения $i, j = n,...,1.$

4. Определяется квадрат нормы ошибки

$$\mathrm{E}_{k-1} = \left\|\vec{\psi}^{k-1}\right\|_{D'C^{-1}D}^2 = \left\langle \vec{r}^{\,k-1}, \vec{w}^{k-1}\right\rangle h^{-2} = \left\langle \bar{r}_1^{k-1}, \bar{w}_1^{k-1}\right\rangle h^{-2},\ k \in \mathbb{N}.$$

При программировании $w_{1,i,j}^{k-1}$ – элементы массива, $i, j = 0,...,n+1$. При вычислениях элементов этого массива полагается:

$$w_{1,i,j}^{k-1} = \mathrm{Re}W_{i,j}^{k-1},\ i, j = 1,...,n+1.$$

и

$$\mathrm{E}_{k-1} = \left(\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n} r_{1,i,j}^{k-1} w_{1,i,j}^{k-1}\right),\ k \in \mathbb{N}.$$

5. Ставится условие остановки итераций:

$$\mathrm{E}_{k-1}/\mathrm{E}_0 < \mathrm{E}^2,\ \mathrm{E} \in (0;1),\ k \in \mathbb{N},$$

где E – задаваемая величина.

6. Дополнительно вычисляется вектор:

$$\vec{\eta}^{k-1}: \bar{\eta}_1^{k-1} = h^2 \mathrm{A}\bar{w}_1^{k-1},\ \bar{\eta}_2^{k-1} = \bar{0},\ k \in \mathbb{N}.$$

При программировании полагается, что

$$w_{1,i,0}^{k-1} = w_{1,i,1}^{k-1},\ i = 1,...,n,\ \ w_{1,0,j}^{k-1} = w_{1,1,j}^{k-1},\ j = 1,...,n.$$

При программировании $\eta_{1,i,j}^{k-1}$ – элементы массива, $i, j = 0,...,n+1$. Элементы этого массива вычисляются по формуле:

$$\eta_{1,i,j}^{k-1} = 4w_{1,i,j}^{k-1} - w_{1,i-1,j}^{k-1} - w_{1,i+1,j}^{k-1} - w_{1,i,j-1}^{k-1} - w_{1,i,j+1}^{k-1} + h^2\kappa w_{1,i,j}^{k-1},\ i, j = 1,...,n.$$

7. Дополнительно находится вектор:

$$\vec{\xi}^{k-1} \in \mathbb{R}^{2N}:\ h^2 C\vec{\xi}^{k-1} = \vec{\eta}^{k-1},\ k \in \mathbb{N},$$

что равносильно последовательному решению двух систем линейных алгебраических уравнений с треугольными матрицами:

$$\text{а) } \bar{Q}^{k-1} \in \mathbb{C}^N:\ hL\bar{Q}^{k-1} = \bar{H}^{k-1},\ \text{б) } \Xi^{k-1} \in \mathbb{C}^N:\ hL^*\Xi^{k-1} = \bar{Q}^{k-1}.$$

При программировании решения системы из а) будут в массиве с элементами $Q_{i,j}^{k-1}$ $i, j = 0,...,n+1$. При вычислении элементов этого массива сначала полагается $Q_{i,0}^{k-1} = Q_{0,j}^{k-1} = 0,\ i, j = 1,...,n$, а затем вычисляются элементы массива по формуле:

$$Q_{i,j}^{k-1} = \left[(1+\mathrm{i})\eta_{1,i,j}^{k-1} + (1+\mathrm{i})Q_{i-1,j}^{k-1} + (1-\mathrm{i})Q_{i,j-1}^{k-1}\right]\Big/2,$$

когда индексы принимают последовательно значения $i, j = 1,...,n.$

При программировании решения системы из б) будут в массиве с элементами $\Xi_{i,j}^{k-1}$ $i, j = 0,...,n+1$. При вычислении элементов этого массива сначала полагается $\Xi_{i,n+1}^{k-1} = \Xi_{n+1,j}^{k-1} = 0,\ i, j = 1,...,n$, а затем вычисляются элементы массива по формуле:

$$\Xi_{i,j}^{k-1} = \left[(1-\mathrm{i})Q_{i,j}^{k-1} + (1-\mathrm{i})\Xi_{i+1,j}^{k-1} + (1+\mathrm{i})\Xi_{i,j+1}^{k-1}\right]\Big/2,$$

когда индексы принимают последовательно значения $i, j = n,...,1.$

8. Определяется итерационный параметр:

$$\tau_k = \frac{\left\langle D\vec{w}^{k-1}, \vec{w}^{k-1}\right\rangle}{\left\langle C^{-1}D\vec{w}^{k-1}, D\vec{w}^{k-1}\right\rangle} = \frac{\left\langle \vec{\eta}^{k-1}, \vec{w}^{k-1}\right\rangle}{\left\langle \vec{\xi}^{k-1}, \vec{\eta}^{k-1}\right\rangle} = \frac{\left\langle \overline{\eta}_1^{k-1}, \overline{w}_1^{k-1}\right\rangle}{\left\langle \overline{\xi}_1^{k-1}, \overline{\eta}_1^{k-1}\right\rangle},\ k \in \mathbb{N}.$$

При программировании $\xi_{1,i,j}^{k-1}$ – элементы массива, $i, j = 0,...,n+1$. При вычислениях элементов этого массива полагается:

$$\xi_{1,i,j}^{k-1} = \mathrm{Re}\,\Xi_{i,j}^{k-1},\ i, j = 1,...,n.$$

При программировании:

$$\tau_k = \sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n}\eta_{1,i,j}^{k-1}w_{1,i,j}^{k-1}\Bigg/\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n}\xi_{1,i,j}^{k-1}\eta_{1,i,j}^{k-1},\ k \in \mathbb{N}.$$

9. Вычисляется новое приближение:

$$\overline{u}_1^{k} = \overline{u}_1^{k-1} - \tau_k \overline{w}_1^{k-1},\ \ k \in \mathbb{N}.$$

При программировании $u_{1,i,j}^{k}$ – элементы массива $i, j = 0,...,n+1$.

Следующие элементы этого массива вычисляются по формуле:

$$u_{1,i,j}^{k} = u_{1,i,j}^{k-1} - \tau_k w_{1,i,j}^{k-1}\ \ i, j = 1,...,n.$$

Они принимаются за приближенное решение, если до этого выполнялось условие остановки итераций. Можно заметить, что не сложно выписать и программируемый алгоритм численного решения модельной задачи для экранированного уравнения Пуассона со скорейшим спуском.

Тестовый пример численного решения модельной задачи для уравнения Пуассона

В рассматриваемой задаче:

$$\Delta\breve{u}_1 = \breve{f}_1,\ \text{в}\ \ \Omega,\ \breve{u}_1\Big|_{\Gamma_1} = 0,\ \frac{\partial\breve{u}_1}{\partial\vec{n}}\Big|_{\Gamma_2} = 0,$$

где

$$\Omega = (0;b_1)\times(0;b_2),\ \ \Gamma_1 = \{b_1\}\times(0;b_2)\cup(0;b_1)\times\{b_2\}\ \Gamma_2 = \{0\}\times(0;b_2)\cup(0;b_1)\times\{0\},$$

полагается, что $b_1 = b_2 = 2{,}5,$

$$\breve{f}_1(x;y) = (25 - 2x^2 - 2y^2)\big/4,$$

т.е.

$$\breve{u}_1(x;y) = (25 - 4x^2)(25 - 4y^2)\,/\,64.$$

Можно заметить, что решение дискретной задачи тогда будет совпадать с решением непрерывной задачи в узлах сетки

$$u_{1,i,j} = \breve{u}_1(x_i;y_j),\ i = 1,...,m,\ \ j = 1,...,n.$$

При дискретизации непрерывной задачи выбираются значения $m = n = 2$. При численном решении получаемых систем алгебраических линейных уравнений (3) применяется приведенный ранее алгоритм с выбором итерационных параметров по методу минимальных поправок, полагая $\overline{u}_1^0 = \overline{0}$, только берется, что $\tau_1 = 1$, тогда вычисляется, что $\tau_2 = 4/9$ и итерационный процесс дает точное решение за две итерации. Действительно, $\overline{u}_1^1 = (16;\ 7{,}75;\ 7{,}75;\ 7{,}5)$, а $\overline{u}_1^2 = (9;\ 6;\ 6;\ 4)$ есть решение системы (3). Если для решения рассматриваемой задачи при такой же дискретизации применять метод итерационных факторизаций при продолжении правой части и решения нулем с выбором итерационных параметров по методу скорейшего спуска, полагая $\overline{u}_1^0=\overline{0}$, когда берется, что $\tau_1=1$, и вычисляется, что $\tau_2=4/9$, тогда итерационный процесс даст точное решение так же за две итерации. Действительно, так же будет: $\overline{u}_1^1=(16;\,7{,}75;\,7{,}75;\,7{,}5)$, а $\overline{u}_1^2=(9;\,6;\,6;\,4)$ есть решение той же системы (3). Можно рекомендовать в методах итерационных факторизаций выбирать всегда первый итерационный параметр за единицу.

Литература

1. Самарский, А.А. Методы решения сеточных уравнений / А.А. Самарский. – М.: Наука, 1978. – 591 с.

2. Оганесян, Л.А. Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений / Л.А. Оганесян, Л.А. Руховец. – Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1979. – 235 с.

3. Обэн, Ж.П. Приближённое решение эллиптических краевых задач / Ж.П. Обэн. – М.: Мир, 1977. – 383 с.

4. Дьяконов, Е.Г. Минимизация вычислительной работы. Асимптотически оптимальные алгоритмы для эллиптических задач / Е.Г. Дьяконов. – М.: Наука, 1989. – 271 с.

Поступила в редакцию 26 марта 2019 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series “Mathematics. Mechanics. Physics”
2019, vol. 11, no. 2, pp. 25–35

DOI: 10.14529/mmph190204

ASYMPTOTICALLY OPTIMAL SOLUTION OF THE MODEL TASK FOR THE SCREENED POISSON EQUATION

A.L. Ushakov
South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E-mail: ushakoval@susu.ru

The screened equation is considered on rectangular area, with the mixed boundary conditions. At the numerical solution of this task it is suggested to use iterative factorization after fictitious continuation of the discrete task approximating the solved task. As a result, the solution is based on the solution of systems of the linear algebraic equations with matrixes of the triangular type, which contain no more than three nonzero elements in every line. At rather small error of approximation of the considered task, the demanded relative error of the suggested iterative process is reached in over the number of iterations independent of the discretization parameters. The iterative process turns out to be the method giving an optimal asymptotics as per the number of operations in arithmetic actions. The developed iterative process is based on the characteristic specifics of the stated model task. This task can be obtained in the methods of fictitious components, spaces, when boundary problems for the elliptic equations in areas of a complex shape are being solved. The algorithm is given for the fulfillment of the iterative method with choosing of the iterative parameters in the automatic mode, by applying the minimal residual, corrections method. This gives a criterion to stop the iterative process when the specified preliminarily relative error is obtained. An elementary test example is given on the computing experiments confirming the asymptotic optimality for the iterative method in the number of computing expenses. The fulfillment of the method is substantially based on the use of complex analysis.

Keywords: screened Poisson equation; iterative factorizations; fictitious continuation.

References

1. Samarskiy A.A. *Metody resheniya setochnykh uravneniy* (Methods for solving finite-difference equations). Moscow, Nauka Publ., 1978, 591 p. (in Russ.).

2. Oganesyan L.A., Rukhovets L.A. *Variatsionno-raznostnye metody resheniya ellipticheskikh uravneniy* (Variation-difference methods for solving elliptic equations). Erevan, Izd-vo AN ArmSSR Publ., 1979, 235 p. (in Russ.).

3. Oben Zh.P. *Priblizhyennoe reshenie ellipticheskikh kraevykh zadach* (Approximate solution of elliptic boundary value problems). Moscow, Mir Publ., 1977, 383 p. (in Russ.). [Aubin J.-P. Approximation of elliptic boundary-value problems. New York, Wiley-Interscience, 1972, 360 p.]

4. D'yakonov E.G. *Minimizatsiya vychislitel'noy raboty. Asimptoticheski optimal'nye algoritmy dlya ellipticheskikh zadach* (Minimizing computational work. Asymptotically optimal algorithms for elliptic problems). Moscow, Nauka Publ., 1989, 271 p. (in Russ.).

Received March 26, 2019