УДК 517.9 DOI: 10.14529/mmph190302

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ С «БЕЛЫМ ШУМОМ»

Е.В. Бычков, Н.Н. Соловьёва, Г.А. Свиридюк
Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация
E-mail: bychkovev@susu.ru

Представлен новый взгляд на классическую задачу о распространении акустических волн в ограниченной области с постоянной фазовой скоростью. Классическая постановка формулируется в детерминированных пространствах, а в данной работе – в пространствах *K*-«шумов». Исследуется начально-краевая задача для неоднородного стохастического гиперболического уравнения. Начальные данные являются случайными *K*-величинами, а функция неоднородности – случайным *K*-процессом в абстрактной постановке. При рассмотрении приложения функция неоднородности задается как «белый шум». В данной работе под термином «белый шум» понимается первая производная в смысле Нельсона–Гликлиха винеровского *K*-процесса. Данную задачу можно считать обобщением классической, поскольку производная Нельсона–Гликлиха от детерминированной функции совпадает с классической производной. Результаты, полученные для абстрактного детерминированного гиперболического уравнения, переложены на стохастический случай. Абстрактные результаты применяются к математической модели распространения акустических волн в ограниченной области из $\boldsymbol{R}^n$ с гладкой границей с неоднородностью в виде «белого шума».

Ключевые слова: акустические волны; задача Коши–Дирихле; «белый шум»; винеровский K-процесс; пропагаторы.

Введение

Классическое гиперболическое уравнение математической физики

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + f \tag{1}$$

в настоящее время хорошо изучено в различных постановках и в ограниченной области, и в неограниченной, и с нелокальными граничными условиями, и с разрывными функциями на границе, например, [1]. На основе этого уравнения строятся динамические математические модели, а также математические модели, описывающие волновые процессы [2]. Также оно может быть базовым уравнением для исследования математических моделей шумового загрязнения окружающей среды. Одним из наиболее сильных источников шумового загрязнения является авиация [3]. Влияние авиационного шума на оператора авиационных эргатических систем управления исследовалось в [3].

В работах И.В. Мельниковой [4] построена теория *M, N*-функций, на основе которой исследуются абстрактные операторно-дифференциальные уравнения. Для исследования уравнений соболевского типа второго порядка

$$A\ddot{u} = B_1 \dot{u} + B_0 u + f \tag{2}$$

в работах А.А. Замышляевой, например [5], было введено понятие вырожденного семейства *M,N*-функций, разработана теория полиномиально относительно ограниченных пучков операторов, и на ее основе построены пропагаторы уравнения (3):

$$U_0^t = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma R_\mu^A(\vec{B})(\mu A - B_1) e^{\mu t} d\mu, \qquad U_1^t = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma R_\mu^A(\vec{B}) A e^{\mu t} d\mu, \tag{3}$$

найдено частное решение неоднородного уравнения (2)

$$\tilde{u} = \int_0^t U_0^{t-s} A_1^{-1} Q f(s) ds \tag{4}$$

и получено общее решение задачи Коши в виде

$$u(t) = U_1^t u_1 + U_0^t u_0 + \tilde{u}.$$

В настоящей работе будет рассмотрено уравнение (1) в ограниченной области $\Omega \subset R^n$ с гладкой границей $\partial\Omega$ в виде

$$\overset{o}{u}_{tt} = a^2 \Delta u + \overset{o}{w}_{Kt} \tag{5}$$

с начальными условиями Коши

$$\lim_{\tau\to 0+} u(\tau) = u_0, \quad \lim_{\tau\to 0+} \overset{o}{u}_t(\tau) = u_1, \tag{6}$$

где a – фазовая скорость распространения волны (скорость звука в среде), а $\overset{o}{w}_K$ – «белый шум», характеризующий источники звука внутри области, u_0 и u_1 – начальная форма волны и начальная скорость волны (случайные величины) соответственно. На границе области зададим однородное условие Дирихле

$$u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times R, \tag{7}$$

естественно, можно рассмотреть и неоднородное граничное условие, которое описывает случайное воздействие на границе области. Линейной заменой можно перейти от неоднородного граничного условия к однородному, поэтому без потери общности рассмотрим только условие вида (7). Символом $\overset{o}{u}_t$ ($\overset{o}{u}_{tt}$) обозначим первую (вторую) производную Нельсона–Гликлиха случайного процесса u. Под «белым шумом» $\overset{o}{w}_{Kt}(t)$ будем понимать первую производную Нельсона–Гликлиха винеровского процесса $w_K(t)$, т. е. $\overset{o}{w}_{Kt}(t) = \dfrac{w_K(t)}{2t}$.

Понятие производной Нельсона–Гликлиха введено в монографии [6], там же найдена первая производная произвольного случайного процесса. Позже вычислены производные случайных процессов высших порядков, и исследованы первые математические модели с «белым шумом» [7]. Производная Нельсона–Гликлиха базируется на понятии производной в среднем, введенном Нельсоном [8]. Помимо подхода к «белому шуму» как производной Нельсона–Гликлиха распространен подход Ито–Стратоновича–Скорохода, который используется в работе Ковача и Ларсона [9] и в [10]. Кроме того в работе [9] рассмотрено уравнение (5) в форме дифференциалов Ито с однородными начальными условиями, решение поставленной задачи найдено путем сведения уравнения к системе первого порядка. Аналогичного подхода придерживается И.В. Мельникова: в работе [11], в ней вводится понятие пространства обобщенных *H*-значных случайных величин, в которых *H*-значный белый шум оказывается гладким по переменной *t*. В работе [12] показано, что производная Нельсона–Гликлиха винеровского процесса хорошо согласуется с предсказаниями теории броуновского движения Эйнштейна–Смолуховского, поэтому стохастический процесс был назван «белым шумом». Данный подход успешно применяется и к исследованию дихотомий стохастического уравнения, заданного на многообразии [13], и к исследованию математических моделей измерительных устройств [12].

Статья помимо введения и списка литературы состоит из трех параграфов. В первом параграфе коротко описаны пространства случайных *K*-величин, случайных *K*-процессов и *K*-шумов, подробнее [14, 15]. Во втором параграфе результаты, полученные для детерминированного уравнения (3), переносятся в пространства *K*-шумов, затем абстрактные результаты применяются к исследованию математической модели (5)–(7).

1. Пространство *K*-шумов

Теория уравнений соболевского типа в настоящее время переносится в пространства *K*-шумов. В данном параграфе для полноты картины приведем лишь необходимые сведения о пространствах *K*-шумов, подчерпнутые в основном в [14, 15]. Обозначим через $\Omega \equiv (\Omega, A, P)$ полное вероятностное пространство. Измеримое отображение $\xi : \Omega \to R$ назовем *случайной величиной*. Множество случайных величин, чьи математические ожидания равны нулю (т. е. $E\xi = 0$), а дисперсии конечны (т. е. $D\xi < +\infty$), образует гильбертово пространство $\mathbf{L}_2$ со скалярным произведением $(\xi_1, \xi_2) = E\xi_1\xi_2$. Обозначим через A_0 σ-подалгебру σ-алгебры A и построим пространство $\mathbf{L}_2^0$ случайных величин, измеримых относительно A_0, тогда $\mathbf{L}_2^0$ является подпространством пространства $\mathbf{L}_2$. Пусть $\xi \in \mathbf{L}_2$, тогда $\Pi\xi$, где $\Pi : \mathbf{L}_2 \to \mathbf{L}_2^0$ – ортопроектор, будем называть *условным математическим ожиданием* случайной величины ξ и обозначим символом $E(\xi \mid A_0)$.

Пусть $I = (0, T), T \in R_+$. Рассмотрим два отображения: $f : I \to \mathbf{L}_2$, которое каждому $t \in I$ ставит в соответствие случайную величину $\xi \in \mathbf{L}_2$, и $g : \mathbf{L}_2 \times \Omega \to R$, которое каждой паре (ξ, ω) ставит в соответствие точку $\xi(\omega) \in R$. Отображение $\eta : I \times \Omega \to R$, имеющее вид $\eta = \eta(t, \omega) = g(f(t), \omega)$, мы назовем (*одномерным*) *случайным процессом*. Если п. н. все траектории случайного процесса непрерывны, то такой процесс назовем *непрерывным*. Обозначим через $\mathbf{CL}_2$ множество непрерывных случайных процессов, которое образует банахово пространство. Примером непрерывного случайного процесса является одномерный винеровский процесс $\beta = \beta(t)$, который можно представить в виде

$$\beta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \sin \frac{\pi}{2}(2k+1)t, \tag{8}$$

где ξ_k – некоррелируемые гауссовы случайные величины, такие что $E\xi_k = 0, \quad D\xi_k = \left[\frac{\pi}{2}(2k+1)\right]^{-2}$.

Теперь зафиксируем произвольный непрерывный случайный процесс $\eta \in \mathbf{CL}_2$ и $t \in I$ через N_t^η обозначим σ-алгебру, порожденную случайной величиной $\eta(t)$, а через $E_t^\eta = E(\cdot \mid N_t^\eta)$ – условное математическое ожидание.

Пусть $\eta \in \mathbf{CL}_2$, *производной в среднем справа* $D\eta(t, \cdot)$ (*слева* $D_*\eta(t, \cdot)$) *случайного процесса* η *в точке* $t \in (\varepsilon, \tau)$ называется случайная величина

$$D\eta(t, \cdot) = \lim_{\Delta t \to 0+} E_t^\eta \left(\frac{\eta(t + \Delta t, \cdot) - \eta(t, \cdot)}{\Delta t} \right)$$

$$\left(D_*\eta(t, \cdot) = \lim_{\Delta t \to 0+} E_t^\eta \left(\frac{\eta(t, \cdot) - \eta(t - \Delta t, \cdot)}{\Delta t} \right) \right),$$

если предел существует в смысле равномерной метрики на R. Случайный процесс η называется *дифференцируемым в среднем справа (слева) на* I, если в каждой точке $t \in I$ существует производная в среднем справа (слева). Пусть $\eta \in \mathbf{CL}_2$ – дифференцируемый случайный процесс в среднем справа и слева на I. Тогда *симметрическая производная в среднем* определяется как $\overset{o}{\eta} = D_S\eta = \frac{1}{2}(D + D_*)\eta$. Симметрическую производную в среднем в дальнейшем будем называть *производной Нельсона–Гликлиха*. Через $\overset{o}{\eta}{}^{(l)}$, $l \in N$, обозначим l-ю производную Нельсона–Гликлиха случайного процесса η. Следует отметить, что если $\eta(t)$ является детерминированной функцией, то производная Нельсона–Гликлиха совпадает с классической производной. В случае одномерного винеровского процесса $\beta = \beta(t)$ справедливо:

(i) $\overset{o}{\beta}(t) = \dfrac{\beta(t)}{2t}$ при всех $t \in R_+$;

(ii) $\overset{o}{\beta}{}^{(l)}(t) = (-1)^{l-1} \cdot \prod_{i=1}^{l-1}(2i-1) \cdot \dfrac{\beta(t)}{(2t)^l}, \ l \in N, \ l \ge 2.$

Построим пространства шумов $\mathbf{C}^l\mathbf{L}_2$, $l \in N$ как пространство случайных процессов из $\mathbf{CL}_2$, чьи траектории почти наверно дифференцируемы в смысле производной Нельсона–Гликлиха на I до порядка l включительно.

Пусть V – некоторое вещественное сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $<\cdot,\cdot>$. В пространстве $(V,<\cdot,\cdot>)$ выберем базис $\{\varphi_k\}$, тогда каждый элемент $u\in V$ представим в виде $u=\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k\varphi_k=\sum\limits_{k=1}^{\infty}<u,\varphi_k>\varphi_k$. Пусть $K=\{\nu_k\}$ – монотонно убывающая числовая последовательность такая, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\nu_k^2<+\infty$. В пространстве $\mathbf{L}_2$ выберем последовательность случайных величин $\{\xi_k\}$ таких, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\nu_k^2 D\xi_k<+\infty$. Тогда через $V_K\mathbf{L}_2$ обозначим гильбертово пространство *случайных* K*-величин* вида $\xi=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\nu_k\xi_k\varphi_k$. При этом для существования случайной K-величины $\xi\in V_K\mathbf{L}_2$ достаточно, например, чтобы $D\xi_k<\text{const}\ \forall k$. Заметим, что пространство $V_K\mathbf{L}_2$ гильбертово со скалярным произведением $(\xi^1,\xi^2)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\nu_k^2 E\xi_k^1\xi_k^2$.

В пространстве $\mathbf{CL}_2$ выберем последовательность случайных процессов $\{\eta_k\}$, определим V*-значный непрерывный случайный* K*-процесс* формулой

$$\eta(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\nu_k\eta_k(t)\varphi_k, \tag{9}$$

при условии, что ряд (9) сходится равномерно на любом компакте из I по норме $V_K\mathbf{L}_2$. Введем в рассмотрение производные Нельсона–Гликлиха случайного K-процесса $\overset{o}{\eta}{}^{(l)}(t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\nu_k\overset{o}{\eta}{}_k^{(l)}(t)\varphi_k$ при условии, что в правой части существуют производные Нельсона–Гликлиха до порядка l включительно, и все ряды сходятся равномерно на любом компакте из I по норме $V_K L_2$. Рассмотрим пространство $\mathbf{C}^l(I;V_K\mathbf{L}_2)$ непрерывных случайных K-процессов, чьи траектории п.н. непрерывно дифференцируемы по Нельсону–Гликлиху до порядка $l\in N$ включительно. Примером K-процесса из пространства $\mathbf{C}^l(I;V_K\mathbf{L}_2)$ служит винеровский K-процесс [15] $w_K(t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\nu_k\beta_k(t)\varphi_k$, где $\{\beta_k\}\subset C^l\mathbf{L}_2$ – последовательность одномерных винеровских процессов (или же математическая модель броуновского движения в теории Эйнштейна–Смолуховского) на I. Краткости ради пространство $\mathbf{C}^l(I;V_K\mathbf{L}_2)$ будем называть *пространством* K*-«шумов»*.

2. Математическая модель

В данном параграфе мы рассмотрим вспомогательную задачу и для нее построим пропагаторы. Используя следующую лемму, мы можем перенести теорию пропагаторов и полиномиально ограниченных пучков операторов в пространство случайных K-величин

Лемма 1. *Пусть* U,F *– сепарабельные гильбертовы пространства и* $A\in L(U;F)$ *(линейный и непрерывный). Тогда* $A\in L(U_K\mathbf{L}_2;F_K\mathbf{L}_2)$.

Рассмотрим вспомогательную начальную задачу

$$\lim_{\tau\to 0+}u(\tau)=u_0,\quad \lim_{\tau\to 0+}\overset{o}{u}_t(\tau)=u_1 \tag{10}$$

для абстрактного уравнения

$$u_{tt}=B_0u+Nf, \tag{11}$$

где $B_0\in L(V_K\mathbf{L}_2;V_K\mathbf{L}_2)$, $u\in C^{l+2}(I;V_k\mathbf{L}_2)$ – искомый случайный K-процесс, $f\in C^{l+1}(I,V_k\mathbf{L}_2)$ – «белый шум».

Два случайных K-процесса будем называть равными, если каждая траектория одного процесса почти наверно совпадает с некоторой траекторией второго, и наоборот.

Определение 1. Случайный K-процесс $u \in C^{l+2}(I; V_k \mathbf{L}_2)$ назовем решением уравнения (11), если п.н. все его траектории удовлетворяют уравнению (11) при всех $t \in I$. Решение $u = u(t)$ уравнения (11), назовем решением задачи (10), (11), если оно удовлетворяет условию (10).

Теорема 1. Пусть оператор $B_0 \in L(V_K \mathbf{L}_2; V_K \mathbf{L}_2)$. Тогда при случайном процессе f таком, что $Nf \in C^{l+1}(I, V_k \mathbf{L}_2)$, и независимых случайных величинах u_k, $k = 0,1$, независимых с Nf при фиксированных $t \in [0, \tau]$ существует единственное решение u задачи (10), (11). Причем решение имеет вид

$$u(t) = \sum_{k=0}^{1} U_k^t u_k + \int_0^t U_1^{t-s} Nf(s) ds. \quad (12)$$

Доказательство заключается в непосредственной проверке решения.

Перейдем к построению решения задачи (5)–(7) в пространствах K-*«шумов»* посредством редукции к задаче (10), (11).

Пусть область $\Omega \subset R^n$ с гладкой границей $\partial\Omega$. Зафиксируем $m \in N$ и зададим пространства $U = \{u \in W_2^{m+2}(\Omega) : u(x,t) = 0 \quad (x,t) \in \partial\Omega \times R_+\}$ и $F = W_2^m(\Omega)$. Очевидно, что U является сепарабельным гильбертовым пространством. Обозначим через $\{\lambda_i\}$ последовательность собственных значений оператора Лапласа с однородными граничными условиями Дирихле, пронумерованных в неубывающем порядке с учетом кратности, и через $\{\varphi_i\}$ – последовательность соответствующих ортонормированных собственных функций.

Введем U-значные случайные K-процессы. Последовательность K зададим следующим образом: $K = \{\lambda_i : \quad \lambda_i = |\nu_i|^{-m}\}$. По формуле (9) получим F-значный винеровский K-процесс в виде

$$w_K(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu_i \beta_i(t) \varphi_i,$$

где $\beta_i(t)$ задается по формуле (8).

Определим операторы

$$B_0 = a^2 \Delta, \quad N = \mathrm{I}$$

как элементы пространства $L(U_K \mathbf{L}_2^0; F_K \mathbf{L}_2)$ в силу леммы 1, а функцию неоднородности зададим как производную одномерного винеровского процесса $w_K(t)$

$$f = \overset{o}{w}_{Kt}(t) \in C^{l+1}(I, F_K \mathbf{L}_2).$$

В силу того, что «белый шум» $\overset{o}{w}_{Kt}(t)$ не дифференцируем при $t = 0$, интеграл в формуле (12) не имеет смысла. Используем способ преодоления этой трудности, предложенный в [5]. Чтобы использовать этот способ, преобразуем второе слагаемое из правой части (12) следующим образом:

$$\int_\varepsilon^t U_1^{t-s} \overset{o}{w}_{Kt}(t)(s) ds = -U_1^{t-\varepsilon} w_K \ (t) - \int_\varepsilon^t \frac{d}{ds}(U_0^{t-s}) w_K(s) ds =$$

$$= -U_1^{t-\varepsilon} w_K(\varepsilon) + \int_\varepsilon^t U_0^{t-s} w_K(s) ds. \quad (13)$$

В данном случае интегрирование по частям имеет смысл для любого $\varepsilon \in (0,t), t \in R_+$ в силу определения производной Нельсона–Гликлиха. Устремим $\varepsilon \to 0$ в (13), получим

$$\int_0^t U_1^{t-s} \overset{o}{w}_{Kt}(s) ds = \int_0^t U_0^{t-s} w_K(s) ds.$$

Вычислим пропагаторы (3)

$$U_0^t = \sum_{k=0}^{\infty} \cos(\lambda_k at) < \cdot, \varphi_k > \varphi_k; \quad U_1^t = \sum_{k=0}^{\infty} a\lambda_k \sin(\lambda_k at) < \cdot, \varphi_k > \varphi_k .$$

Таким образом, в силу теоремы 1, решение (5)–(7) имеет вид

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \cos(\lambda_k at) < u_0, \varphi_k > \varphi_k + \sum_{k=0}^{\infty} a\lambda_k \sin(\lambda_k at) < u_1, \varphi_k > \varphi_k +$$

$$+\int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} \cos(\lambda_k a(t-s)) < w_K(s), \varphi_k > \varphi_k ds.$$

Параграф 1 выполнен при поддержке Правительства РФ (Постановление № 211 от 16.03.2013 г.), соглашение № 02.A03.21.0011. Параграф 2 выполнен при поддержке РФФИ, проект № 18-08-00244.

Литература

1. Вишик, М.И. Краевые задачи для уравнений в частных производных и некоторых классов операторных уравнений / М.И. Вишик, О.А. Ладыженская // Успехи математических наук. – 1956. – Т. 11. – Вып. 6 (72). – С. 41–97.

2. Информационно-логическое моделирование сбора и обработки информации при оценивании функциональной надежности оператора авиационных эргатических систем управления / А.В. Богомолов, В.Н. Зинкин, М.Д. Алёхин и др. // Труды Третьей международной научно-практической конференции «Человеческий фактор в сложных технических системах и средах» (Эрго-2018), Санкт-Петербург, 04–07 июля 2018 г. – С. 315–323.

3. Методическое обеспечение системы автоматизированного мониторинга состояния операторов, подвергающихся воздействию авиационного шума / А.В. Богомолов, С.П. Драган, Ю.А. Кукушкин и др. // Материалы одиннадцатой международной конференции «Управление Развитием Крупномасштабных Систем» (MLSD'2018), Москва, 01–03 октября 2018 г. – С. 440–443.

4. Melnikova, I.V. General theory of the ill-posed Cauchy problem / I.V. Melnikova // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. – 1995. – Vol. 3. – Iss. 2. – P. 149–171.

5. Замышляева, А.А. Математические модели соболевского типа высокого порядка / А.А. Замышляева // Вестник ЮУрГУ. Серия: «Математическое моделирование и программирование». – 2014. – Т. 7, № 2. – С. 5–28.

6. Gliklikh, Yu.E. Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics / Yu.E. Gliklikh. – London, Dordrecht, Heidelberg, N.Y., Springer, 2011. – 436 p.

7. Гликлих, Ю.Е. Изучение уравнений леонтьевского типа с белым шумом методами производных в среднем случайных процессов / Ю.Е. Гликлих // Вестник ЮУрГУ. Серия: «Математическое моделирование и программирование». – 2012. – № 27 (286). – Вып. 13.– С. 24–34.

8. Nelson, E. Dynamical theory of Brownian motion / E. Nelson. – Princeton: Princeton University Press, 1967. – 142 p.

9. Kovacs, M. Introduction to Stochastic Partial Differential Equations / M. Kovacs, S. Larsson // New Directions in the Mathematical and Computer Sciences: сб. науч. тр. – National Universities Commission, Abuja, Nigeria, October 8–12, 2007. – Vol. 4. – С. 159–232. Publications of the ICMCS, Lagos, 2008.

10. Zamyshlyaeva, A.A. The Linearized Benney–Luke Mathematical Model with Additive White Noise / A.A. Zamyshlyaeva, G.A. Sviridyuk // *Semigroups of Operators – Theory and Applications. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, Springer, Cham, 2015. – Vol. 113. – P. 327–337.

11. Мельникова, И.В. Обобщенная корректность задачи Коши для абстрактного стохастического уравнения с мультипликативным шумом / И.В. Мельникова, М.А. Альшанский // Труды института математики и механики УрО РАН. – 2012. – Т. 18, № 1. – С. 251–267.

12. Сагадеева, М.А. Построение наблюдения для задачи оптимального динамического измерения по искаженным данным / М.А. Сагадеева // Вестник ЮУрГУ. Серия: «Математическое моделирование и программирование». – 2019. – Т. 12, № 2. – С. 82–96.

13. Kitaeva, O.G. Exponential dichotomies in Barenblatt–Zheltov–Kochina model in spaces of differential forms with «noise» / O.G. Kitaeva, D.E. Shafranov, G.A. Sviridyuk // Вестник ЮУрГУ. Серия: «Математическое моделирование и программирование». – 2019. – Т. 12, № 2. – С. 47–57.

14. Свиридюк, Г.А. Динамические модели соболевского типа с условием Шоуолтера–Сидорова аддитивными шумами / Г.А. Свиридюк, Н.А. Манакова // Вестник ЮУрГУ. Серия: «Математическое моделирование и программирование». – 2014. – Т. 7, № 1. – С. 90–103.

15. Sviridyuk, G.A. Multipoint initial-final problem for one class of Sobolev type models of higher order with additive «white noise» / G.A. Sviridyuk, A.A. Zamyshlyaeva, S.A. Zagrebina // Вестник ЮУрГУ. Серия: «Математическое моделирование и программирование». – 2018. – Т. 11, № 3. – С. 103–117.

Поступила в редакцию 19 июля 2019 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2019, vol. 11, no. 3, pp. 12–19

DOI: 10.14529/mmph190302

MATHEMATICAL MODEL OF ACOUSTIC WAVES IN A BOUNDED DOMAIN WITH "WHITE NOISE"

E.V. Bychkov, N.N. Solovyova, G.A. Sviridyuk
South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E-mail: bychkovev@susu.ru

The article presents a fresh approach at the classical problem of the acoustic waves propagation in a bounded region with a constant phase velocity. The classical statement of the problem is formulated in deterministic spaces, but in that work this problem will be studied in spaces of *K*-"noise". An initial-boundary value problem for an inhomogeneous stochastic hyperbolic equation is investigated. The initial data are a random *K*-variables, and the inhomogeneity function is a random *K*-process in the general case. The inhomogeneous function is defined as "white noise", in the application. In this paper the term "white noise" refers to the first derivative in the sense of Nelson–Gliklich Wiener *K*-process. This problem can be considered as generalization of the classical, since the Nelson–Gliklich derivative of the deterministic function coincides with the classical derivative. In the article, the results are obtained for an abstract deterministic hyperbolic equation are shifted to the stochastic case. Abstract results are applied to the mathematical model of the acoustic waves propagation with additive "white noise" in a bounded region from R^n with a smooth boundary.

Keywords: acoustic waves; Cauchy–Dirichlet problem; "white noise"; Wiener K-process; propagators.

References

1. Vishik M.I., Ladyzhenskaya O.A. Boundary value problems for partial differential equations and certain classes of operator equations, *Uspekhi Mat. Nauk*, 1956, Vol. 11, Iss. 6 (72), pp. 41–97. (in Russ.).

2. Bogomolov A.V., Zinkin V.N., Alekhin M.D., Sviridyuk G.A., Keller A.V. Information-Logical Modeling of Information Collection and Processing at the Evaluation of the Functional Reliability of the Aviation Ergate Control System Operator. *Proc. of the Third International Conference Ergo-2018: Human Factors in Complex Technical Systems and Environments,* Saint-Petersburg, July 4–7, 2018, pp. 315–323. (in Russ.).

3. Bogomolov A.V., Dragan S.P., Kukushkin Yu.A., Sviridyuk G.A., Zagrebina S.A., Larkin E.V. Metodicheskoe obespechenie sistemy avtomatizirovannogo monitoringa sostoyaniya operatorov, podvergayushchikhsya vozdeystviyu aviatsionnogo shuma (Methodological support of the automated monitoring system of the state of operators exposed to aircraft noise). *Materialy odinnadtsatoy mezhdunarodnoy konferentsii «Upravlenie Razvitiem Krupnomasshtabnykh Sistem» (MLSD'2018*),

Moskva, 01–03 oktyabrya 2018 g. (Proc. of the eleventh international conference Managing the Development of Large-Scale Systems (MLSD'2018), Moscow, October 1–3, 2018), P. 440–443.

4. Melnikova I.V. General theory of the ill-posed Cauchy problem. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 1995, Vol. 3, Iss. 2, pp. 149–171. DOI: 10.1515/jiip.1995.3.2.149

5. Zamyshlyaeva A.A. The Higher-Order Sobolev-Type Models. *Bulletin of the South Ural State University. Series Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2014, Vol. 7, no. 2, pp. 5–28. (in Russ.). DOI: 10.14529/mmp140201

6. Gliklikh Yu.E. *Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics*. London, Dordrecht, Heidelberg, N.Y., Springer, 2011, 436 p.

7. Gliklikh Yu.E. Investigation of Leontieff Type Equations with White Noise by the Methods of Mean Derivatives of Stochastic Processes. *Bulletin of the South Ural State University. Series Mathematical Modelling, Programming and Computer Software,* 2012, no. 27 (286), Iss. 13, pp. 24–34. (in Russ.).

8. Nelson E. *Dynamical Theories of Brownian Motion*. Princeton University Press, 1967, 142 p.

9. Kovacs M., Larsson S. Introduction to stochastic partial differential equations. *Proceedings of “New Directions in the Mathematical and Computer Sciences”*, National Universities Commission, Abuja, Nigeria, October 8–12, 2007, Vol. 4, pp. 159–232. Publications of the ICMCS, Lagos, 2008.

10. Zamyshlyaeva A.A., Sviridyuk G.A. The Linearized Benney–Luke Mathematical Model with Additive White Noise. In: Banasiak J., Bobrowski A., Lachowicz M. (eds) *Semigroups of Operators – Theory and Applications. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, Springer, Cham, 2015, Vol. 113, pp. 327–337. DOI: 10.1007/978-3-319-12145-1_21

11. Melnikova I.V., Alshanskiy M.A. The generalized well-posedness of the Cauchy problem for an abstract stochastic equation with multiplicative noise. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics (Supplementary issues)*, 2013, Vol. 280, suppl. 1, pp. 134–150. DOI: 10.1134/S0081543813020119

12. Sagadeeva M.A. Reconstruction of Observation from Distorted Data for the Optimal Dynamic Measurement Problem. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2019, Vol. 12, no. 2, pp. 82–96. DOI: 10.14529/mmp190207 (in Russ.).

13. Kitaeva O.G, Shafranov D.E., Sviridyuk G.A. Exponential dichotomies in Barenblatt–Zheltov–Kochina model in spaces of differential forms with “noise”. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2019, Vol. 12, no. 2, pp. 47–57. DOI: 10.14529/mmp190204

14. Sviridyuk G.A., Manakova N.A. The Dynamical Models of Sobolev Type with Showalter–Sidorov Condition and Additive “Noise”. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2014, Vol. 7, no. 1. pp. 90–103. (in Russ.). DOI: 10.14529/mmp140108

15. Sviridyuk G.A., Zamyshlyaeva A.A., Zagrebina S.A. Multipoint initial-final problem for one class of Sobolev type models of higher order with additive “white noise”. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2018, Vol. 11, no. 3, pp. 103–117. DOI: 10.14529/mmp190204

Received July 19, 2019