

# МОНОТОННОЕ ВОЗРАСТАНИЕ ПОКАЗАТЕЛЯ СКОРОСТНОЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ЛЮБЫХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СОЕДИНЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ ВЯЗКОУПРУГОСТИ СО СТЕПЕННЫМИ ФУНКЦИЯМИ РЕЛАКСАЦИИ

**А.В. Хохлов**

Научно исследовательский институт механики, МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва,  
Российская Федерация  
E-mail: andrey-khokhlov@ya.ru

Продолжен анализ свойств показателя скоростной чувствительности диаграмм деформирования с постоянными скоростями, порождаемых линейным определяющим соотношением вязкоупругости с произвольной функцией релаксации (в одноосном случае) и его зависимости от деформации, скорости деформации и характеристик функции релаксации.

Выведено и аналитически изучено выражение для показателя скоростной чувствительности параллельных соединений любого числа (трехпараметрических) фрактальных моделей Фойгта, в частности, моделей со степенными функциями релаксации («фрактальных элементов»). Доказано, что он принимает значения в диапазоне от нуля до максимального показателя соединяемых моделей, а в случае соединения только «фрактальных элементов» нижняя граница диапазона (и предельное значение при стремлении скорости деформации к нулю) равна не нулю, а минимальному из показателей. Главный результат статьи – доказательство возрастания показателя скоростной чувствительности рассматриваемых моделей с ростом скорости деформации (отсутствия у него точки максимума). Он аналогичен полученному ранее для любых параллельных соединений нелинейных степенных вязких элементов и его обобщению на параллельные соединения вязкопластичных моделей Гершеля–Балкли (и Шведова–Бингама) и означает отсутствие точки перегиба кривой зависимости логарифма напряжения от логарифма скорости деформации, порождаемой любой моделью рассматриваемого класса. Отсюда следует, что такие фрактальные модели не способны описывать сигмоидальную форму кривой скоростной чувствительности, характерную для режима сверхпластического деформирования материалов, и потому непригодны для моделирования сверхпластичности. Этот результат дополняет и оттеняет обнаруженную способность линейной теории вязкоупругости (даже классической модели Кельвина из двух упругих элементов и одного вязкого) качественно описывать наличие максимума и высокие значения показателя скоростной чувствительности, сколь угодно близкие к единице, верхней границе для псевдопластических сред.

*Ключевые слова:* вязкоупругость; диаграммы деформирования; показатель скоростной чувствительности; сверхпластичность; сигмоидальная кривая; фрактальные модели Фойгта; фрактальный элемент; уравнения с дробной производной; степенной нелинейно-вязкий элемент.

## Введение

Диаграммы деформирования (ДД) многих материалов (в частности, наследственных) в одноосных квазистатических испытаниях с постоянными скоростями деформации  $\dot{\varepsilon} = a$  зависят от скорости  $a$ :  $\sigma = \sigma(\varepsilon, a)$ . Одна из наиболее распространенных мер скоростной чувствительности материала (выраженности зависимости ДД от  $a$  и скоростного упрочнения) – показатель скоростной чувствительности (ПСЧ)

$$m(a, \varepsilon) := \frac{\partial \lg \sigma(\varepsilon, a)}{\partial \lg a} = \sigma^{-1} a \frac{\partial \sigma}{\partial a}. \quad (1)$$

К примеру, ПСЧ классической степенной модели вязкой (жидкообразной) среды

$$\sigma = K\dot{\varepsilon}^M, \quad M \in (0;1], \quad K > 0, \quad (2)$$

( $M \in (0;1)$  для псевдопластических сред,  $M > 1$  для дилатантных) равен  $M$  (не зависит от  $a$ ,  $\varepsilon$ ). Напряжение и время (скорость деформации) в дальнейшем предполагаются безразмерными.

Особенно важна высокая скоростная чувствительность материала и ее характеристика при сверхпластическом деформировании [1–12], лежащем в основе важных технологических процессов штамповки изделий сложной формы, получения материалов с нужной структурой и механическими свойствами посредством обработки давлением и большими пластическими деформациями [2–7, 10–12]. Сверхпластичность – способность многих материалов в определенных структурно-термомеханических условиях (в определенном диапазоне температур, скоростей и при достаточной степени измельчения зерен) к очень большой пластической деформации (100–200 % и более) при относительно низком напряжении течения и его сильной зависимости от скорости деформации. Сильная зависимость напряжения течения от скорости деформации (режим сверхпластичности) характеризуется величиной  $m \in [0,3;1)$  (максимальное значение  $m = 1$  соответствует линейно вязкой жидкости), тогда как для материалов в обычном состоянии  $m \leq 0,1$ . Многочисленные данные испытаний показывают [2–13], что для режима сверхпластического деформирования материала характерна «сигмоидальная» форма графика зависимости  $\lg \sigma$  от  $\lg a$  (кривая 1 на рис. 1), т. е. наличие точки перегиба с почти прямолинейным участком в ее окрестности и, соответственно, наличие точки максимума на графике зависимости ПСЧ (1) от  $\lg a$  при фиксированной деформации (кривая 2). Модели сверхпластичности должны описывать характерные качественные особенности данных испытаний материалов (наблюдаемых эффектов), в частности, должны воспроизводить наличие точки перегиба у зависимости  $\lg \sigma - \lg a$  и ее сигмоидальную форму (наряду с такими свойствами ДД, как развитое течение при почти постоянном напряжении и высокая чувствительность напряжения течения к скорости деформирования) [2–15].

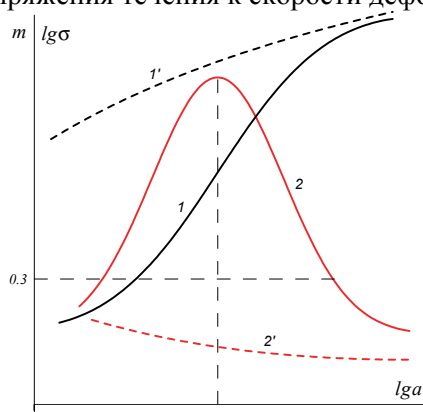


Рис. 1. Типичные зависимости напряжения течения и ПСЧ от скорости деформирования: 1, 2 – в режиме сверхпластического деформирования, 1', 2' – в обычном состоянии

Например, в работе [14] доказана строгая монотонность ПСЧ и невозможность описания сигмоидальной кривой сверхпластичности  $\lg \sigma - \lg a$  только параллельными или только последовательными соединениями любого количества нелинейно-вязких элементов вида (2) (традиционно используемых в сверхпластичности) с произвольными параметрами  $M_i \in (0;1]$ ,  $K_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $N > 1$ , т. е. доказана необходимость комбинировать в моделях сверхпластичности и параллельные, и последовательные соединения или добавлять элементы других типов (моделирующие другие законы деформирования).

В работе [15] исследованы общие свойства ПСЧ (1) ДД  $\sigma = \sigma(\varepsilon, a)$ , порождаемых физически линейным определяющим соотношением (ОС) вязкоупругости

$$\sigma(t) = \int_0^t R(t-\tau) d\varepsilon(\tau), \quad \varepsilon(t) = \int_0^t \Pi(t-\tau) d\sigma(\tau), \quad t > 0, \quad (3)$$

с произвольными функциями релаксации (ФР) и ползучести  $R(t)$  и  $\Pi(t)$ ,  $t > 0$ , и обнаружено, что линейное ОС (3) не только порождает (при определенных ограничениях на ФР) ДД с выра-

женными участками течения при постоянном напряжении, но и, как ни странно, способно моделировать максимум ПСЧ диаграмм деформирования, т. е. «сигмоидальную» форму зависимости напряжения от скорости деформации в осях  $\lg \sigma - \lg a$ , и очень высокую скоростную чувствительность с показателем  $m \in (0,5;1)$ , характерные для режима сверхпластического деформирования материалов, причем без каких-либо экзотических ограничений на функцию релаксации (в дополнение к общим ограничениям на ФР достаточно потребовать непрерывность  $R(t)$  справа в точке  $t = 0$ , т. е. регулярность модели, и отличие от нуля длительного модуля  $R(\infty)$ ). Эти требования выполняются даже для классической модели Кельвина из двух упругих элементов и одного вязкого (ее ФР имеет вид  $R = (E - r)e^{-\mu t} + r$ ,  $E > r \geq 0$ ,  $\mu > 0$ ), и этот факт выявляет важность учета упругих деформаций (которыми традиционно пренебрегают в моделировании сверхпластичности) для описания максимума ПСЧ. Из этого результата следует принципиальная возможность использования линейных интегральных операторов вида (3) (инвариантных относительно сдвигов по времени) как полезного инструмента («элемента») при построении ОС сверхпластичности, связывающих истории тензоров напряжений и деформаций (конечных, больших), температуры и эволюции параметров структуры материала, и необходимость более детального исследования возможностей линейного ОС (3) с ФР конкретных видов [15].

Цель данной статьи – вывод и анализ выражения для ПСЧ (1) диаграмм деформирования  $\sigma = \sigma(\varepsilon, a)$ , порождаемых ОС (3) с функцией релаксации, равной сумме слагаемых вида

$$R(t) = r + At^{-\alpha}, \quad A > 0, \quad r \geq 0, \quad \alpha \in (0;1), \quad (4)$$

с произвольными тройками параметров  $\alpha_i \in (0;1]$ ,  $A_i > 0$ ,  $r_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $N > 1$ , т.е. ПСЧ любых параллельных соединений фрактальных моделей Фойгта (fractional Kelvin–Voigt model), и доказательство строгого возрастания  $m(a, \varepsilon)$  с ростом скорости  $a$  (при любом фиксированном  $\varepsilon$ ). Отсутствие максимума у ПСЧ  $m(a)$  означает отсутствие точки перегиба у кривых  $\lg \sigma - \lg a$  и невозможность моделирования сигмоидальной формы кривых  $\lg \sigma - \lg a$  с помощью таких линейных моделей. Этот результат аналогичен доказанному в статье [14] возрастанию ПСЧ любых параллельных соединений *нелинейных* степенных вязких элементов вида (2). Эта аналогия усиливается тем наблюдением (см. ниже), что ПСЧ линейной модели (4) с  $r = 0$  (в англоязычной литературе ее называют моделью Скотта Блэра или фрактальным элементом: the Scott Blair model, fractional element, fractional dashpot, spring-pot) [16–20] не зависит от  $a$  и  $\varepsilon$  и равен постоянной  $\alpha$ , т.е. обладает тем же свойством, что и ПСЧ нелинейного вязкого элемента (2). В силу линейности операторов (3) изучаемые качественные свойства ДД и ПСЧ не зависят от способа обезразмеривания напряжений и времени.

### 1. Семейство диаграмм деформирования линейного ОС вязкоупругости

Данная статья продолжает цикл работ [15, 21–24] и др. по системному аналитическому исследованию линейного ОС (3) с целью определения комплекса моделируемых им реологических эффектов, границ и индикаторов границ его области применимости, сфер влияния материальных функций и разработки методик идентификации.

ОС (3) связывает истории напряжения и деформации в одноосных изотермических процессах в структурно-стабильных материалах. Функции релаксации и ползучести в ОС (3) предполагаются положительными и дифференцируемыми на  $(0; \infty)$ ,  $\Pi(t)$  – возрастающей и выпуклой вверх на  $(0; \infty)$  [21–24], а  $R(t)$  – убывающей и выпуклой вниз;  $R(t)$  может быть непрерывной на луче  $[0; \infty)$  (тогда модель называется регулярной), а может иметь в точке  $t = 0$  интегрируемую особенность (например, степенную) или включать сингулярное слагаемое  $\eta \delta(t)$ , где  $\delta(t)$  – дельта-функция,  $\eta > 0$ . Из положительности и монотонности функций релаксации и ползучести на  $(0; \infty)$  следует, что в т.  $t = 0$  существуют пределы справа  $\Pi(0+) = \inf \Pi(t) \geq 0$  и  $R(0+) = \sup R(t) > 0$  ( $R(0) = +\infty$ , если  $R$  не ограничена сверху) и предел  $R(+\infty) = \inf R(t) \geq 0$ . Если  $\Pi(0+) \neq 0$ , то модель регулярна и  $R(0+) = 1/\Pi(0+)$ .

Процесс деформирования с постоянной скоростью  $\varepsilon = at$  ОС (3) переводит в напряжение

$$\sigma(t) = atP(t), \quad P(t) := t^{-1} \int_0^t R(\tau) d\tau, \quad t > 0. \quad (5)$$

В [21] доказаны следующие свойства осреднения ФР  $P(t)$ , полезные при анализе ДД и ПСЧ.

**Лемма.** Пусть  $R(t)$  – положительная непрерывная убывающая функция. Тогда  $P(t)$ ,  $t > 0$ , – гладкая убывающая функция, обладающая свойствами: 1)  $P(t) > 1/P(t) > R(t)$  при  $t > 0$ ; 2)  $\dot{P}(t) = t^{-1}(R(t) - P(t))$ ; 3)  $P(+\infty) = R(+\infty)$ ; 4) для регулярной ФР  $P(0+) = R(0+)$ ; 5) если  $R(t)$  дифференцируема, то  $\dot{P}(t) = o(t^{-1})$  при  $t \rightarrow \infty$ , а функция  $tP(t)$  возрастает и выпукла вверх; 6) если  $\dot{R}(0+) < \infty$ , то  $\dot{P}(0+) = \dot{R}(0+)/2$ .

Исключив параметр  $t = \varepsilon/a$ , получим из (5) ДД в явной форме:

$$\sigma(\varepsilon, a) = P(\varepsilon/a)\varepsilon. \quad (6)$$

Секущий и касательный модули выражаются формулами  $\sigma(\varepsilon, a)/\varepsilon = P(\varepsilon/a)$ ,  $\sigma'_\varepsilon(\varepsilon, a) = R(\varepsilon/a)$ . При  $\varepsilon \rightarrow 0+$  они стремятся к пределу  $E := \sigma'(0) = R(0+) = P(0+)$  (если модель регулярна, т.е.  $R \in C[0; \infty)$ ), а при  $\varepsilon \rightarrow \infty$  – к пределу  $r := R(\infty) = P(\infty) \geq 0$ ;  $E$  и  $r$  – мгновенный и длительный модули (модули сдвига, объемные модули или модули Юнга – в зависимости от физического смысла  $\sigma$  и  $\varepsilon$ ).

В работе [21] доказаны следующие общие свойства ДД (6) (для любой допустимой ФР).

**Теорема 1.** Пусть  $R(t)$  – положительная непрерывная убывающая и выпуклая вниз функция при  $t > 0$ . Тогда: 1) при любом  $a > 0$  ДД  $\sigma(\varepsilon)$  монотонна и выпукла вверх на луче  $\varepsilon > 0$ ;

2) семейство ДД (6) возрастает по  $a$ ;

3) мгновенный и длительный модули  $E$  и  $r$  не зависят от скорости деформации  $a$ ;

4) при любом  $a > 0$  справедлива оценка  $r\varepsilon < \sigma(\varepsilon, a) < E\varepsilon$  (правое неравенство содержательно при  $E < \infty$ , т.е. в случае  $R \in C[0; \infty)$ );

5) при  $a \rightarrow 0$  семейство ДД (6) всегда сходится (сверху) к прямой  $\sigma = r\varepsilon$  (равновесной ДД) равномерно на любом отрезке полуоси  $\varepsilon > 0$ ;

6) при  $a \rightarrow +\infty$  семейство ДД (6) любой регулярной модели сходится (снизу) к прямой  $\sigma = E\varepsilon$  (мгновенной ДД) равномерно на любом отрезке оси  $\varepsilon$ ;

7) если модель не регулярна (т.е.  $R \notin C[0; \infty)$ ), то  $E = \infty$ , касательная к любой ДД в нуле вертикальна, а семейство ДД  $\sigma(\varepsilon, a)$  сходится при  $a \rightarrow \infty$  к прямой  $\sigma = 0$ ;

8) при  $\varepsilon \rightarrow \infty$   $\sigma/\varepsilon \rightarrow r$ , и ДД (6) обладает асимптотой тогда и только тогда, когда сходится интеграл  $I := \int_0^\infty (R(\tau) - r) d\tau$ ; тогда каждая ДД (6) имеет асимптоту  $\sigma = r\varepsilon + Ia$ ,  $I > 0$ , и  $\sigma(\varepsilon, a) < r\varepsilon + Ia$ .

Отсутствие любого из обнаруженных свойств у ДД материала – достаточный признак неприменимости ОС (3) к его моделированию. В частности, линейное ОС (3) не способно описывать материалы с отрицательной скоростной чувствительностью, с падающей ДД, с выпуклыми вниз или имеющими точки перегиба ДД и те, у которых установлена зависимость мгновенного или длительного модуля от скорости деформации.

## 2. Показатель скоростной чувствительности линейного ОС и его общие свойства

Вычислим ПСЧ (1) по ДД (6), используя формулу п. 2 леммы  $P'(x) = x^{-1}(R(x) - P(x))$ :

$$m(a, \varepsilon) = -\sigma^{-1} a (\varepsilon/a)^2 P'(\varepsilon/a) = \varepsilon \sigma^{-1} (P(\varepsilon/a) - R(\varepsilon/a)), \quad \text{т. к. } \sigma/\varepsilon = P(\varepsilon/a), \quad \text{то} \quad (7)$$

$$m(x) = 1 - R(x)/P(x), \quad x := \varepsilon/a > 0.$$

Итак, ПСЧ – гладкая функция, зависящая от одного аргумента  $x := \varepsilon/a$ . Каждой конкретной модели (3) (каждой ФР) соответствует своя функция  $m(x)$ , характеризующая скоростную чувствительность модели (и остальные свойства, поскольку по ней можно восстановить ФР с точностью до множителя [15]). Так как по лемме  $P(x) > R(x) > 0$  при  $x > 0$ , то из (7) следует *общая оценка*

$0 < m(x) < 1$ , справедливая для любой ФР. Таким образом, линейное ОС (3) описывает лишь псевдопластические среды и не может моделировать дилатантные среды (у которых кажущаяся вязкость  $\eta := \sigma/\dot{\varepsilon}$  – возрастающая функция скорости деформации). Предельные случаи реализуются для упругого элемента с  $R(t) = E = \text{const}$ ,  $P(t) = E$  и  $m(x) \equiv 0$  и для ньютоновской жидкости:  $R = \eta\delta(t)$ ,  $P(t) = \eta t^{-1}$  и  $m(x) \equiv 1$  при  $x > 0$ .

В работе [15] доказано следующее общее утверждение о существовании максимума ПСЧ.

**Теорема 2.** Пусть ФР  $R(t)$  в ОС (3) – положительна, дифференцируема, убывает и выпукла вниз на интервале  $(0; \infty)$ . Если  $R(t)$  непрерывна на луче  $[0; \infty)$  (т.е. модель регулярна) и  $R(\infty) \neq 0$ , то функция  $m(x)$  непрерывна на  $[0; \infty)$ ,  $m(0) = 0$ ,  $m(\infty) = 0$  и  $m(x)$  имеет хотя бы один локальный максимум.

Точкой максимума будет точка  $x = \hat{x}$ , в которой  $m(x)$  достигает своей точной верхней грани  $\hat{m} := m(\hat{x})$  на  $[0; \infty)$ . При фиксированной скорости  $a$  функция  $m(\varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$ , имеет максимум в т.  $\hat{\varepsilon} = a\hat{x}$ . А при фиксированном  $\varepsilon$  функция  $m(a)$ ,  $a > 0$ , имеет максимум в т.  $\hat{a} = \varepsilon/\hat{x}$ . Таким образом, линейное ОС (3) способно моделировать наличие максимума ПСЧ и сигмоидальность зависимости  $\lg \sigma - \lg a$  (см. рис. 1), столь важные для сверхпластичности.

Для сингулярных ФР и неограниченных в точке  $t = 0$  ФР свойства ПСЧ, доказанные для регулярных ФР, могут нарушаться. Например, для модели Фойгта (с  $R = \eta\delta(t) + r$ ) имеем  $P = r + \eta/t$ , и ДД (6) и ПСЧ (7) имеют вид

$$\sigma(\varepsilon, a) = r\varepsilon + \eta a, \quad m(x) = (1 + \lambda x)^{-1}, \quad x := \varepsilon/a > 0,$$

где  $\lambda := r/\eta = 1/\tau > 0$ ,  $\tau$  – время ретардации. Очевидно,  $m(x)$  убывает при всех  $x \geq 0$ , причём  $m(0) = 1$  и  $m(\infty) = 0$ . А для модели Скотта Блэра с ФР  $R(t) = At^{-\alpha}$ ,  $\alpha \in (0; 1)$ , будет  $P(t) = Kt^{-\alpha}$ ,  $K := A/(1-\alpha)$ ,  $R(t)/P(t) \equiv 1-\alpha$  и ДД (6) и ПСЧ (7) имеют вид

$$\sigma(\varepsilon, a) = K\varepsilon(\varepsilon/a)^{-\alpha} = K\varepsilon^{1-\alpha}a^\alpha, \quad m(x) \equiv \alpha, \quad x > 0. \quad (8)$$

Таким образом, ПСЧ фрактального элемента не зависит от  $a$  и  $\varepsilon$ ; можно доказать, что это свойство присуще только ему (только степенным ФР) среди линейных моделей (3) [15]. При  $\alpha \rightarrow 0+$  ДД и ПСЧ (8) фрактального элемента сходятся к ДД и ПСЧ упругого элемента с модулем  $E = r + A$ , а если наложить на параметры ФР связь  $A/(1-\alpha) = \eta$ , где  $\eta > 0$  – фиксированная постоянная (равная интегралу  $R(t)$  по  $[0; 1]$ ), то при  $\alpha \rightarrow 1-0$  семейства ДД и ПСЧ (8) сходятся к ДД и ПСЧ ньютоновского вязкого элемента с  $R = \eta\delta(t)$ ,  $P(t) = \eta/t$  и  $m(x) \equiv 1$ .

### 3. Свойства показателя скоростной чувствительности фрактальных моделей Фойгта и их параллельных соединений

Фрактальная модель Фойгта – параллельное соединение линейно упругого элемента с фрактальным элементом Скотта Блэра, задаваемого оператором дробного дифференцирования  $\sigma = \eta D^\alpha \varepsilon$  [16–20] или интегральным оператором (3) со степенной ФР  $R = At^{-\alpha}$ ,  $\alpha \in (0; 1)$  (для функции Хевисайда  $h(t)$   $D^\alpha h = t^{-\alpha}/\Gamma(1-\alpha)$ ). Эта трехпараметрическая (нерегулярная) модель описывается ОС (3) с неограниченной ФР вида (4) или уравнением с дробной производной  $\sigma = r\varepsilon + \eta D^\alpha \varepsilon$ ,  $\eta = A/(1-\alpha)$ . При  $\alpha \in (0; 1)$  интеграл (5) для осреднения ФР (4) сходится,  $P = r + A(1-\alpha)^{-1}t^{-\alpha}$ , и семейства ДД и ПСЧ модели (4) задаются уравнениями

$$\sigma(\varepsilon, a) = r\varepsilon + A(1-\alpha)^{-1}a^\alpha \varepsilon^{1-\alpha}, \quad (9)$$

$$m(x) = \frac{Aa(1-\alpha)^{-1}x^{-\alpha}}{r + A(1-\alpha)^{-1}x^{-\alpha}} = \frac{\alpha}{1 + \bar{r}(1-\alpha)x^\alpha}, \quad x > 0, \quad \bar{r} := r/A \quad (10)$$

(при  $\varepsilon \rightarrow \infty$  асимптоты у ДД (9) нет, длительный модуль  $\sigma'_\varepsilon(\infty, a) = r$ ). Очевидно, что  $m(0) = \alpha$ . Если  $r > 0$ , то  $m(x)$  монотонно убывает при всех  $x > 0$ ,  $m(x) \sim cx^{-\alpha}$  при  $x \rightarrow \infty$  и  $m(\infty) = 0$ . Если  $r = 0$ , то  $m(x) \equiv \alpha$  – константа. Горизонтальные прямые  $m = \alpha$  являются асимптотами при

$x \rightarrow \infty$  для возрастающих ПСЧ  $m(x)$  регулярных моделей, задаваемых ФР

$$R = r + A(t+h)^{-\alpha}, \quad A, h, \alpha > 0, \quad r \geq 0, \quad (11)$$

с  $r = 0$ . При  $h \rightarrow 0+$  семейство ФР (11) сходится к ФР (4) (т.е. семейство ФР (11) – регуляризация для модели (4)). ПСЧ моделей (11) с любыми  $r > 0$  и  $h > 0$  имеют максимум (теорема 2) и  $m(\infty) = 0$ . В случае  $\alpha \neq 1$  осреднение ФР, ДД и ПСЧ модели (11) имеют вид:

$$P(t) = r + A(1-\alpha)^{-1} t^{-1} [(t+h)^{1-\alpha} - h^{1-\alpha}], \quad \sigma(\varepsilon, a) = r\varepsilon + A(1-\alpha)^{-1} h^{1-\alpha} a [(1+\varepsilon(ah)^{-1})^{1-\alpha} - 1],$$

$$m(x) = 1 - \frac{\bar{r} + h^{-\alpha} (1+x/h)^{-\alpha}}{\bar{r} + (1-\alpha)^{-1} h^{1-\alpha} x^{-1} [(1+x/h)^{1-\alpha} - 1]}, \quad x > 0, \quad \bar{r} := r/A, \quad (12)$$

а при  $\alpha = 1$  имеем  $P(t) = r + At^{-1} \ln[(t+h)/h]$ ,

$$\sigma(\varepsilon, a) = r\varepsilon + Aa \ln(1 + \varepsilon(ah)^{-1}), \quad m(x) = 1 - \frac{\bar{r} + (x+h)^{-1}}{\bar{r} + x^{-1} \ln(1+x/h)}.$$

На рис. 2, а приведены ДД (9) при фиксированных скоростях  $a = 0,01; 0,02; 0,03$  для трёх фрактальных моделей (4) с  $A = 9 : 1$  с  $\alpha = 0,9, r = 1$  (ДД 1–3); 2) с  $\alpha = 0,9, r = 0$  (ДД 1'–3'); 3) с  $\alpha = 0,5, r = 1$  (штрих-пунктирные ДД 11–13). Все ДД имеют вертикальную касательную в нуле ( $E = R(0) = \infty$ ), а обе модели с показателем  $\alpha = 0,9$  (близким к единице) имеют длинный, почти вертикальный, участок быстрого роста при очень малых  $\varepsilon$  (приближающийся по длине к вертикальному участку  $a\eta$  модели Фойгта с  $\eta = A/(1-\alpha)$ ). За счёт этого ДД фрактальных моделей (4) с  $\alpha$ , близким к 1, очень сильно зависят от скорости деформации (и от величины  $\alpha$ ). ДД 11–13 для  $\alpha = 0,5$  слабее зависят от  $a$  и при малых  $\varepsilon$  растут медленнее. Рис. 2, б иллюстрирует, насколько сильно влияют на ДД регулярных моделей (11) с  $\alpha$ , близким к единице, значения параметра  $h$ . Кривые 1–4 – ДД моделей (11) с  $\alpha = 0,9$  и  $r = 1$  при  $h = 10^{-9}; 10^{-6}; 10^{-3}; 10^{-1}$  для  $a = 0,03$ ; кривая 0 – ДД фрактальной модели (4) (с  $h = 0$ ). При меньших  $\alpha$  чувствительность ДД к величине  $h$  гораздо ниже: ДД 14 модели (11) с  $\alpha = 0,5$  и  $h = 0,1$  для  $a = 0,01$  отклоняется от ДД 10 модели (4) гораздо меньше, чем ДД 4 от ДД 0.

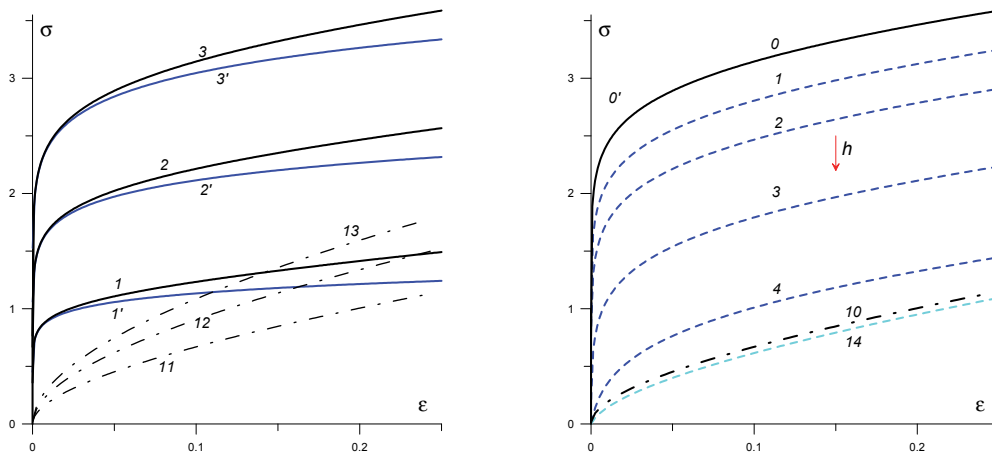


Рис. 2. Диаграммы деформирования (9) трёх фрактальных моделей Фойгта (4) при  $a = 0,01; 0,02; 0,03$  (а); Диаграммы деформирования двух моделей (4) и их регуляризаций (11) с разными  $h$  при  $a = 0,03$  (б)

На рис.3, а приведены графики ПСЧ (10) трёх фрактальных моделей Фойгта (4) с  $\bar{r} = 1/9$  и  $\alpha = 0,9; 0,5; 0,2$  (кривые 1–3), трех моделей (4) с  $\bar{r} = 0$  и теми же  $\alpha$  (кривые 1'–3'), трех регулярных моделей (11) с  $h = 0,1$  и  $\bar{r} = 1/9$  (штриховые кривые 11–13) и еще двух моделей (11) с  $h = 0,1$  и  $r = 0$  (синие штриховые кривые 12'–13'). Для ПСЧ всех моделей с  $r > 0$  имеем  $m(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ . Все ПСЧ моделей (11) с  $r > 0$  имеют максимум. Начальные участки всех ПСЧ тем выше, чем больше  $\alpha$ , но и скорость убывания (при  $r > 0$ ) растёт с  $\alpha$ , поскольку  $m(x) \sim Cx^{-\alpha}$  при  $x \rightarrow \infty$ , и при больших  $x$  ПСЧ с большим  $\alpha$  лежат ниже. Штриховые линии между кривыми 11 и 1 – ПСЧ регулярных моделей (11) с фиксированными  $\bar{r} = 1/9, \alpha = 0,9$  и ма-

лыми значениями  $h=10^{-2}; 10^{-4}; 10^{-6}$ . Они иллюстрируют сходимость семейства ПСЧ моделей (11) при  $h \rightarrow 0$  на полуоси  $x > 0$  к ПСЧ  $I$  фрактальной модели (4) с  $h=0$  и тем же  $\alpha$  (скорость сходимости тем выше, чем меньше  $\alpha$ ). Кривая 23 – ПСЧ параллельного соединения двух фрактальных моделей 2 и 3 вида (4): с  $\alpha_1=0,5, \alpha_2=0,2, A_1=A_2=9, r_1=r_2=1$ .

На рис. 3, б приведены зависимости ПСЧ от скорости  $m(a)$  при  $\varepsilon=0,001; 0,01; 0,1; 1$  для модели (4) с  $\alpha=0,5, \bar{r}=1/9$  (кривые 1–4), для модели (4) с  $\alpha=0,5, r=0$  (прямая 0) и для регулярной модели (11) с  $h=0,1$  и теми же  $\alpha=0,5, \bar{r}=1/9$  (штриховые кривые 11–14) и с  $r=0$  (синие штрих-пунктирные кривые 11', 12'). С ростом  $\varepsilon$  кривые 1–4 опускаются вниз, максимум кривых 11–14 смещается вправо, их плато вблизи максимума расширяется. Из-за инверсии оси абсцисс ( $x = \varepsilon/a$ ) даже при малом значении  $h=0,1$  хорошее приближение к ПСЧ  $m(a)$  фрактальной модели (4) может быть только в узкой окрестности т.  $a = 0$ , а далее кривые регулярной и фрактальной моделей всё больше расходятся, ибо ПСЧ моделей (4) возрастают на полуоси  $a > 0$ , причём  $m(a) \rightarrow \alpha$  при  $a \rightarrow \infty$ , а ПСЧ моделей (11) с  $h > 0$  убывают при  $a > \varepsilon/\hat{x}$ , где  $\hat{x}$  – точка максимума  $m(x)$ , и для них  $m(a) \rightarrow 0$  при  $a \rightarrow \infty$ . При  $\varepsilon=0,001; 0,01$  кривые значительно расходятся уже при  $a > 0,0001$  и имеют совершенно разные очертания. С ростом  $\varepsilon$  правая окрестность точки  $a = 0$ , в которой регулярное приближение  $m(a)$  удовлетворительно, растягивается (см. кривые 4 и 14 для  $\varepsilon=1$ ). С убыванием  $h$  этот участок, конечно, тоже увеличивается,  $m(a)$  поднимается выше, максимум становится менее острым.

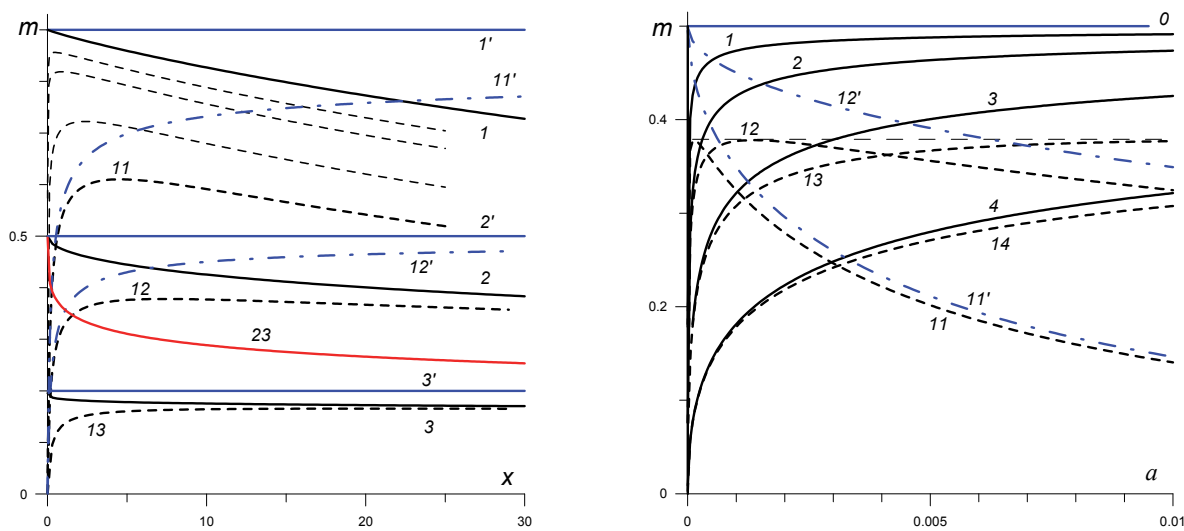


Рис. 3. Показатель скоростной чувствительности фрактальных моделей Фойгта (4) и их регуляризации (11) в зависимости от  $x = \varepsilon/a$  (а) и от скорости  $a$  при  $\varepsilon = 0,001; 0,01; 0,1; 1$  (б)

Исследуем параллельные соединения фрактальных моделей Фойгта (4) с произвольными тройками параметров  $A_i > 0, r_i \geq 0, \alpha_i \in (0;1)$  (в частности, моделей со степенными ФР при  $r_i = 0$ , т. е. фрактальных элементов). Они задаются дифференциальным уравнением с дробными производными  $\sigma = \sum(r_i \varepsilon + \eta_i D^{\alpha_i} \varepsilon)$  или интегральным оператором (3) с неограниченной ФР вида

$$R = \sum R_i = \sum(r_i + A_i t^{-\alpha_i}). \quad (13)$$

Удобно считать, что все  $\alpha_i$  различны, т.е. модель и сумма (13) неприводимы.

Для параллельного соединения любого количества произвольных моделей  $R = \sum R_i$ , в силу (5)  $P = \sum P_i$ , и потому ПСЧ выражается формулой:  $m(x) = 1 - R(x)/P(x) = \sum(P_i - R_i)/\sum P_i$ . В случае модели (13)  $P = \sum(r_i + A_i(1 - \alpha_i)^{-1} t^{-\alpha_i})$  и ПСЧ имеет вид

$$m(x) = \frac{\sum A_i \alpha_i (1 - \alpha_i)^{-1} x^{-\alpha_i}}{\sum (r_i + A_i (1 - \alpha_i)^{-1} x^{-\alpha_i})}. \quad (14)$$

При  $x \rightarrow 0+$  главные части числителя и знаменателя – слагаемые вида  $Cx^{-\alpha}$  с модулем показателя  $\alpha = \max \alpha_i$  и потому  $m(0+) = \alpha$ . При  $x \rightarrow \infty$  (т. е.  $a \rightarrow 0$ ) главная часть числителя – слагаемое  $A_0\alpha_0(1-\alpha_0)^{-1}x^{-\alpha_0}$  с  $\alpha_0 = \min \alpha_i$ , а главная часть знаменателя  $S(x)$  – постоянная  $r := \sum r_i$ , если  $r > 0$ , и слагаемое  $A_0(1-\alpha_0)^{-1}x^{-\alpha_0}$ , если  $r = 0$ ; поэтому  $m(+\infty) = 0$ , если  $r > 0$ , и  $m(+\infty) = \alpha_0$ , если  $r = 0$  (т. е. для соединения степенных моделей с  $r_i = 0$ ).

Докажем, что ПСЧ (14) всегда убывает по  $x$ :

$$m'(x)S^2 = -\sum_{i=1}^n A_i\alpha_i^2(1-\alpha_i)^{-1}x^{-\alpha_i-1}\sum_{j=1}^n (r_j + A_j(1-\alpha_j)^{-1}x^{-\alpha_j}) + \sum_{i=1}^n A_i\alpha_i(1-\alpha_i)^{-1}x^{-\alpha_i}\sum_{j=1}^n A_j\alpha_j(1-\alpha_j)^{-1}x^{-\alpha_j-1},$$

$$m'(x)S^2 = -r\sum_{i=1}^n A_i\alpha_i^2(1-\alpha_i)^{-1}x^{-\alpha_i-1} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_iA_j(\alpha_i^2 - \alpha_i\alpha_j)(1-\alpha_i)^{-1}(1-\alpha_j)^{-1}x^{-\alpha_i-\alpha_j-1};$$

так как в двойной сумме сумма любой пары слагаемых с переставленными индексами  $i \neq j$  (симметричных в матрице) равна  $A_iA_j(\alpha_i^2 + \alpha_j^2 - 2\alpha_i\alpha_j)(1-\alpha_i)^{-1}(1-\alpha_j)^{-1}x^{-\alpha_i-\alpha_j-1}$ , то

$$m'(x)S^2 = -r\sum_{i=1}^n A_i\alpha_i^2(1-\alpha_i)^{-1}x^{-\alpha_i-1} - \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n A_iA_j(\alpha_i - \alpha_j)^2(1-\alpha_i)^{-1}(1-\alpha_j)^{-1}x^{-\alpha_i-\alpha_j-1}.$$

Если  $\alpha_i \in (0;1)$  и все  $\alpha_i$  различны, то все слагаемые отрицательны и  $m'(x) < 0$ . Поэтому ПСЧ параллельных соединений любого числа фрактальных моделей Фойгта (4) (в частности, моделей со степенными ФР при  $r_i = 0$ ) убывает по  $x$  и, следовательно, возрастает с ростом скорости  $a$ .

Полученный результат аналогичен полученному в работе [14] для параллельного соединения любого числа нелинейных степенных вязких элементов вида (2) (ПСЧ (1) такого элемента не зависит от  $a$  и  $\varepsilon$  и равен постоянной  $M$ , т. е. обладает тем же свойством, что и ПСЧ линейного фрактального элемента): ПСЧ любого параллельного соединения степенных вязких элементов не имеет точки максимума, а всегда строго возрастает на полуоси  $a > 0$ . Последний результат можно обобщить на параллельные соединения любого числа вязкопластических моделей Гершеля–Балкли  $\sigma = \bar{\sigma} + K\varepsilon^M$  (и моделей Шведова–Бингама  $\sigma = \sigma_0 + K\varepsilon$ ): оказывается, что учет в таких моделях пороговых напряжений  $\bar{\sigma}_i > 0$  (роль которых в моделировании сверхпластичности может быть существенной [25]) не нарушает возрастания ПСЧ, а кривая скоростной чувствительности  $\lg \sigma - \lg a$  не имеет точек перегиба (точнее, выпукла вниз) при произвольных  $M \in (0;1]$ ,  $K > 0$  и  $\bar{\sigma}_i \geq 0$ . Отметим также, что ПСЧ (7) параллельного соединения (даже лишь двух) моделей Максвелла с разными временами релаксации не обязан быть монотонной функцией и может иметь точку максимума и другие точки экстремума.

## Заключение

В работе продолжено аналитическое исследование общих свойств показателя скоростной чувствительности (ПСЧ) (1) семейства диаграмм деформирования при постоянных скоростях деформации  $a > 0$ , порождаемых физически линейным ОС вязкоупругости (3) с произвольной функцией релаксации [15]. Установлено, что в рамках линейной вязкоупругости ПСЧ (1) зависит не от двух аргументов, а лишь от их отношения  $x := \varepsilon/a$  (формула (7)), и что его значения всегда лежат в интервале от нуля до единицы (т. е. линейное ОС (3) описывает только псевдопластические среды и не может описывать дилатантные среды).

Выведено и изучено выражение (14) для ПСЧ параллельных соединений любого числа фрактальных моделей Фойгта (4), т. е. произвольных моделей с функциями релаксации вида (13) (в частности, моделей со степенными ФР при  $r_i = 0$ ). Доказано, что ПСЧ таких моделей принимает значения в диапазоне  $(0; \bar{\alpha})$ , где  $\bar{\alpha} = \max \alpha_i$  – максимальный показатель соединяемых моделей вида (4), а в случае моделей со степенными ФР – в диапазоне  $(\underline{\alpha}, \bar{\alpha})$ , где  $\underline{\alpha} = \min \alpha_i$  (в этом случае  $m \rightarrow \underline{\alpha}$  при  $a \rightarrow 0$ , а не  $m \rightarrow 0$ ). Главный результат работы – доказательство того, что ПСЧ таких моделей всегда возрастает с ростом скорости  $a$  (и не имеет точки максимума). Он анало-



гичен полученному в работе [14] для параллельного соединения любого числа степенных (нелинейных) вязких элементов (2) (и указанному выше его обобщению на параллельные соединения любого числа вязкопластических моделей Гершеля–Балкли и Шведова–Бингама) и означает отсутствие точки перегиба кривой скоростной чувствительности  $\lg \sigma - \lg a$ , порождаемой любой из рассмотренного класса (фрактальных) моделей вида (13). В частности, отсюда следует, что такие модели не способны описывать сигмоидальную форму кривой скоростной чувствительности, характерную для сверхпластического деформирования материалов, и потому непригодны для моделирования сверхпластичности. С другой стороны, полученный результат дополняет и подчеркивает обнаруженную в работе [15] способность линейного ОС вязкоупругости (3) (даже классической модели Кельвина из двух упругих элементов и одного вязкого) качественно описывать сигмоидальность зависимости  $\lg \sigma - \lg a$  и очень высокие значения ПСЧ (сколь угодно близкие к единице, верхней границе для псевдопластических сред), характерные для режима сверхпластического деформирования.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 17-08-01146\_a).*

### Литература

1. Бочвар, А.А. Явление сверхпластичности в сплавах цинка с алюминием / А.А. Бочвар, З.А. Свицерская // Изв. АН СССР. ОТН. – 1945. – № 9. – С. 821–824.
2. Грабский, М.В. Структурная сверхпластичность металлов / М.В. Грабский. – М.: Металлургия, 1975. – 270 с.
3. Смирнов, О.М. Обработка металлов давлением в состоянии сверхпластичности / О.М. Смирнов. – М.: Машиностроение, 1979. – 184 с.
4. Padmanabhan, K.A. Superplasticity / K.A. Padmanabhan, J.J. Davies. – Berlin: Springer-Verlag, 1980. – 314 p.
5. Кайбышев, О.А. Сверхпластичность промышленных сплавов / О.А. Кайбышев. – М.: Металлургия, 1984. – 263 с.
6. Процессы пластического структурообразования металлов / В.М. Сегал, В.И. Резников, В.И. Копылов, Д.А. Павлик. – Минск: Наука и техника, 1994. – 232 с.
7. Nieh, T.G. Superplasticity in metals and ceramics / T.G. Nieh, J. Wadsworth, O.D. Sherby. – Cambridge University Press, 1997. – 287 p.
8. Васин, Р.А. Введение в механику сверхпластичности / Р.А. Васин, Ф.У. Еникеев. – Уфа: Гилем, 1998. – 280 с.
9. Padmanabhan, K.A. Superplastic Flow: Phenomenology and Mechanics / K.A. Padmanabhan, R.A. Vasin, F.U. Enikeev. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2001. – 363 p.
10. Fundamentals and Engineering of Severe Plastic Deformation / V.M. Segal, I.J. Beyerlein, C.N. Tome *et al.* – New York: Nova Science Pub. Inc., 2010. – 542 p.
11. Ефимов, О.Ю. Формирование структуры, фазового состава и свойств сталей и сплавов в упрочняющих технологиях обработки давлением / О.Ю. Ефимов, В.Е. Громов, Ю.Ф. Иванов. – Новокузнецк: Сиб. гос. индустр. ун-т, Интер-Кузбасс, 2012. – 345 с.
12. Faraji, G. Severe Plastic Deformation: Methods, Processing and Properties / G. Faraji, H.S. Kim, H.T. Kashi. – Elsevier, 2018. – 324 p.
13. Mechanical modelling of the universal superplastic curve / R.A. Vasin, F.U. Enikeev, M.I. Mazurski, O.S. Munirova // J. Mater. Sci. – 2000. – Vol. 35, Iss. 10. – P. 2455–2466.
14. Белякова, Т.А. О невозможности моделирования сигмоидальных кривых суперпластичности параллельным или последовательным соединениями степенных вязких элементов / Т.А. Белякова, И.А. Гончаров, А.В. Хохлов // Механика композиционных материалов и конструкций. (В печати).
15. Хохлов, А.В. Характеристика скоростной чувствительности диаграмм деформирования в линейной теории вязкоупругости и построение по ней функции релаксации / А.В. Хохлов // Проблемы прочности и пластичности. (В печати).
16. Scott Blair, G.W. Significance of power-law relations in rheology / G.W. Scott Blair, J. Caffyn // Nature. – 1945. – Vol. 155. – P. 171–172.

17. Podlubny I. Fractional differential equations. An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications / I. Podlubny. – Mathematics in Science and Engineering, 198. – San Diego: Academic Press, 1999. – 340 p.
18. Kilbas, A.A. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. / A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo. – North-Holland Mathematics Studies, Vol. 204. – Amsterdam: Elsevier, 2006. – 523 p.
19. Mainardi, F. Creep, relaxation and viscosity properties for basic fractional models in rheology / F. Mainardi, G. Spada // The European Physical Journal. Special Topics. – 2011. – Vol. 193, Iss. 1. – P. 133–160.
20. Огородников, Е.Н. Математическое моделирование наследственно упругого деформируемого тела на основе структурных моделей и аппарата дробного интегро-дифференцирования Римана–Лиувилля / Е.Н. Огородников, В.П. Радченко, Л.Г. Унгарова // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». – 2016. – Т. 20, № 1. – С. 167–194.
21. Хохлов, А.В. Общие свойства диаграмм деформирования линейных моделей вязкоупругости при постоянной скорости деформации / А.В. Хохлов // Проблемы проч. и пластичности. – 2015. – Вып. 77, № 1. – С. 60–74.
22. Хохлов, А.В. Анализ общих свойств кривых ползучести при циклических ступенчатых нагружениях, порождаемых линейной теорией наследственности / А.В. Хохлов // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». – 2017. – Т. 21, № 2. – С. 326–361.
23. Хохлов, А.В. Двусторонние оценки для функции релаксации линейной теории наследственности через кривые релаксации при гамп-деформировании и методики ее идентификации / А.В. Хохлов // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2018. – № 3. – С. 81–104.
24. Хохлов, А.В. Индикаторы неприменимости линейной теории вязкоупругости по данным испытаний материала на ползучесть при растяжении с наложением гидростатического давления / А.В. Хохлов // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2019. – Т. 25, № 2.
25. Murty, G.S. Evaluation of threshold stress from the stress-strain rate data of superplastic materials / G.S. Murty, S. Banerjee // Scripta Metallurgica et Materialia. – 1994. – Vol. 31, Iss. 6. – P. 707–712.

*Поступила в редакцию 8 июля 2019 г.*

---

*Bulletin of the South Ural State University  
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"  
2019, vol. 11, no. 3, pp. 56–67*

---

DOI: 10.14529/mmph190307

## **MONOTONE INCREASE OF THE STRAIN RATE SENSITIVITY VALUE OF ANY PARALLEL CONNECTION OF THE FRACTIONAL KELVIN–VOIGT MODELS**

**A.V. Khokhlov**

*Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

*E-mail: andrey-khokhlov@ya.ru*

We continue to analyze the properties of the strain rate sensitivity value of the stress-strain curves at constant strain rates generated by the Boltzmann–Volterra linear viscoelasticity constitutive equation with an arbitrary relaxation modulus (in uni-axial case) and its dependence on strain, strain rate and relaxation modulus characteristics.

The expression for the strain rate sensitivity value of the parallel connection of any number of the fractional Kelvin–Voigt models (each one governed by three parameters) is derived and analytically studied. In particular, arbitrary connections of the Scott Blair fractional elements (specified by power relaxation modulus) are considered. We prove that the strain rate sensitivity takes the values in the range

from zero to the maximal exponent of the models connected whatever strain and strain rate magnitudes are; and in case only “fractal elements” are connected, the lower bound (and the limit value as the strain rate tends to zero) is non-zero and is equal to the minimal exponent of the models connected. The main result of the article is that we prove that strain rate sensitivity value of the studied models increases with the growth of the strain rate for any fixed strain (it has no peak value). This result is similar to the one obtained earlier for any parallel connections on non-linear power-law viscous elements and to its generalization on parallel connections of viscoplastic Herschel–Bulkley models (and the Shvedov–Bingham models as well) accounting for threshold stress. It means that there is no inflection point on the log-log graph of stress dependence on strain rate generated by any model of the class under consideration. This implies that such fractal models are not able to produce sigmoid shape of stress dependence on strain rate (in logarithmic scales) which is the distinctive feature of superplastic deformation regime and so they aren't suitable for modeling superplasticity of materials. This result supplements and elaborates the capability of the linear viscoelasticity theory to provide existence of the strain rate sensitivity index maximum as well as its high values close to unity (the upper bound of strain rate sensitivity index for pseudoplastic media) which have been discovered in previous contribution.

*Keywords:* viscoelasticity; stress-strain curves; strain rate sensitivity value; superplasticity; sigmoid curve; Voigt fractional models; fractal element; fractional differential equations; power non-linear viscous element.

### References

1. Bochvar A.A., Sviderskaia Z.A. Iavlenie sverkhplastichnosti v splavakh tsinka s aliuminiem (Superplasticity phenomenon in zinc-aluminum alloys). *Izvestiia akademii nauk SSSR. Otdelenie tekhnicheskikh nauk*, 1945, no. 9, pp. 821–824. (in Russ.).
2. Grabskiy M.V. *Strukturnaya sverkhplastichnost' metallov* (Structural superplasticity of metals). Moscow, Metallurgiya Publ., 1975, 272 p. (in Russ.).
3. Smirnov O.M. *Obrabotka metallov davleniem v sostoianii sverkhplastichnosti* (Shaping of Metals in the Superplasticity State). Moscow, Mashinostroenie Publ., 1979, 184 p. (in Russ.).
4. Padmanabhan K.A., Davies J.J. *Superplasticity*. Berlin, Springer-Verlag, 1980, 314 p.
5. Kaybyshev O.A. *Sverkhplastichnost' promyshlennykh splavov* (Superplasticity of industrial alloys). Moscow, Metallurgiya Publ., 1984, 263 p. (in Russ.).
6. Segal V.M., Reznikov V.I., Kopylov V.I., Pavlik D.A. *Protsessy plasticheskogo strukturoobrazovaniia metallov* (Processes of plastic structure formation of metals). Minsk, Nauka i tekhnika Publ., 1994, 232 p. (in Russ.).
7. Nieh T.G., Wadsworth J., Sherby O.D. *Superplasticity in metals and ceramics*. Cambridge Univ. Press, 1997, 287 p. DOI:10.1017/CBO9780511525230
8. Vasin R.A., Enikeev F.U. *Vvedenie v mekhaniku sverkhplastichnosti* (Introduction to the superplasticity mechanics). Ufa, Gilem Publ., 1998, 280 p. (in Russ.).
9. Padmanabhan K.A., Vasin R.A., Enikeev F.U. *Superplastic Flow: Phenomenology and Mechanics*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 2001, 363 p.
10. Segal V.M., Beyerlein I.J., Tome C.N., Chuvil'deev V.N., Kopylov V.I. *Fundamentals and Engineering of Severe Plastic Deformation*. New York, NovaSciencePub. Inc, 2010, 542 p.
11. Efimov O.Yu., Gromov V.E., Ivanov Yu.F. *Formirovanie struktury, fazovogo sostava i svoistv staley i splavov v uprochniaiushchikh tekhnologiakh obrabotki davleniem* (Forming of structure, phase composition and properties of steels and alloys in the hardening technologies of pressure treatment). Novokuznetsk, Sibirskii gosudarstvennyi industrial'nyi universitet, Inter-Kuzbass Publ., 2012, 345 p. (in Russ.).
12. Faraji G., Kim H.S., Kashi H.T. *Severe Plastic Deformation: Methods, Processing and Properties*. Elsevier, 2018, 324 p. DOI:10.1016/B978-0-12-813518-1.00010-2
13. Vasin R.A., Enikeev F.U., Mazurski M.I., Munirova O.S. Mechanical modelling of the universal super-plastic curve. *Journal of Materials Science*, 2000, Vol. 35, no. 10, pp. 2455–2466. DOI:10.1023/A:1004761501240
14. Beliakova T.A., Goncharov I.A., Khokhlov A.V. O nevozmozhnosti modelirovaniya sigmoidal'nykh krivykh sverkhplastichnosti parallel'nym ili posledovatel'nym soedineniyami stepennykh vyazkikh elementov (The impossibility of modelling of sigmoid superplasticity curves using only par-

allel or series connections of power-law viscous elements). *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*. (in press).

15. Khokhlov A.V. Kharakteristika skorostnoi chuvstvitelnosti diagram deformirovaniya v lineynoi teorii vyazkouprugosti i postroeniye po nei funktsii relaksatsii (The function characterizing strain rate sensitivity in the linear viscoelasticity theory and the relaxation modulus reconstruction assuming the function is given). *Problemy prochnosti i plastichnosti*. (in press).

16. Scott Blair G.W., Caffyn J. Significance of power-law relations in rheology. *Nature*, 1945, Vol. 155, pp. 171–172. DOI: 10.1038/155171c0

17. Podlubny I. Fractional differential equations. An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications. *Mathematics in Science and Engineering*, 198. San Diego: Academic Press, 1999, 340 p.

18. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. North-Holland Mathematics Studies, 204, Amsterdam, Elsevier, 2006, 523 p.

19. Mainardi F., Spada G. Creep, relaxation and viscosity properties for basic fractional models in rheology. *The European Physical Journal. Special Topics*, 2011, Vol. 193, Iss. 1, pp. 133–160. DOI: 10.1140/epjst/e2011-01387-1

20. Ogorodnikov E.N., Radchenko V.P., Ungarova L.G. Mathematical modeling of hereditary elastically deformable body on the basis of structural models and fractional integro-differentiation Riemann–Liouville apparatus, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* (J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.), 2016, Vol. 20, no. 1, pp. 167–194. (in Russ.). DOI: 10.14498/vsgtu1456

21. Khokhlov A.V. Obshchie svoystva diagramm deformirovaniya lineynykh modeley vyazkouprugosti pri postoyannoy skorosti deformatsii (General properties of stress-strain curves at constant strain rate yielding from the linear theory of viscoelasticity). *Problemy prochnosti i plastichnosti* (Problems of strength and plasticity), 2015, Vol. 77, no.1, pp. 60–74 (in Russ.). DOI: 10.32326/1814-9146-2015-77-1-60-74

22. Khokhlov A.V. Analiz obshchikh svoystv krivykh polzuchesti pri tsiklicheskikh stupenchatykh nagruzheniyakh, porozhdaemykh lineynoy teoriey nasledstvennosti (Analysis of creep curves produced by the linear viscoelasticity theory under cyclic stepwise loadings). *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* (J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.), 2017, Vol. 21, no. 2, pp. 326–361. (in Russ.). DOI: 10.14498/vsgtu1533

23. Khokhlov A.V. Two-sided estimates for the relaxation function of the linear theory of heredity via the relaxation curves during the ramp-deformation and the methodology of identification. *Mechanics of Solids*, 2018, Vol. 53, Iss. 3, pp. 307–328. DOI: 10.3103/S0025654418070105

24. Khokhlov A.V. Indikatory neprimenimosti lineynoi teorii vyazkouprugosti po dannym ispytaniyu materiala na polzuchest' pri rastyazhenii s nalozheniyem gidrostaticheskogo davleniya (Applicability indicators of the linear viscoelasticity theory using creep curves under tensile load combined with constant hydrostatic pressure). *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*, 2019, Vol. 25, no. 2. (in Russ.).

25. Murty G.S., Banerjee S. Evaluation of threshold stress from the stress-strain rate data of superplastic materials. *Scripta Metallurgica et Materialia*, 1994, Vol. 31, no. 6, pp. 707–712. DOI: 10.1016/0956-716X(94)90214-3

Received July 8, 2019