УДК 519.635 DOI: 10.14529/mmph190402

ГИПОТЕЗА ОБ УНИВЕРСАЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

М.Л. Зайцев[1], *В.Б. Аккерман*[2]
[1] *г. Москва, Российская Федерация*
[2] *Университет Западной Вирджинии, г. Моргантаун, США*
E-mail: mlzaytsev@gmail.com

Изучается возможность существования универсального решения задачи Коши у систем УрЧП в случае, если эта система переопределяется так, что новая переопределенная система УрЧП содержит все решения исходной системы УрЧП и, кроме того, редуцируется до систем ОДУ, решение которых потом находится в виде универсальной формулы от начальных данных. Это решение может быть чрезвычайно сложным, но, тем не менее, представлять теоретический интерес. Для этого предложена модификация метода редукции переопределенных систем дифференциальных уравнений, предложенного ранее авторами. Предлагается выделять решения у переопределённых систем УрЧП с помощью параметризованной задачи Коши, которая ставится для параметризованных систем ОДУ при выполнении некоторых условий. Предлагается общий способ переопределения любых систем УрЧП на основе введения вспомогательной функции, увеличения количества переменных и преобразования к новой переопределенной системе УрЧП от одной неизвестной функции. Приведены аналитические примеры использования метода. Приводятся также гипотезы об унификации внешнего вида любых систем УрЧП и их решении данным методом. Результаты статьи могут быть применены переопределенным уравнениям гидродинамики, полученным ранее авторами, в случае, если в результате расчетов окажется, что они имеют больший произвол в общих решениях, но редуцируются до систем ОДУ.

Ключевые слова: переопределенные системы дифференциальных уравнений; ОДУ; размерность дифференциальных уравнений; задача Коши; параметрические решения систем дифференциальных уравнений.

Введение

В настоящий момент затруднено или практически невозможно прямое численное моделирование многих физических процессов: горения, обтекания, гидродинамических неустойчивостей, турбулентности, плазмы и т. д. [1]. Требуются большие затраты вычислительных мощностей и времени. Один из возможных путей решения этой проблемы в практических задачах: сведение полной системы гидродинамических уравнений и химической кинетики по объему к системе уравнений на поверхности [2–5]. Как следствие, снижаются размерность задачи, минимальные масштабы, которые надо разрешить, и вычислительные затраты. Наработки по снижению размерности недостаточны и требуют дальнейшего развития.

Авторами был предложен общий способ снижения размерности для произвольных систем дифференциальных уравнений в частных производных (УрЧП), который позволяет свести системы УрЧП в объёме к системам на поверхности [6–8]. Требуется исходную систему УрЧП дополнить уравнениями связи и произвести преобразования. На основе этой идеи в работах авторов [6–8] также был предложен метод нахождения частных решений у переопределенных систем УрЧП. В этом методе нахождение решений сводится к решению систем обыкновенных неявных уравнений. При этом можно показать, что решения, которые нам нужны, не могут зависеть от непрерывного параметра. Заранее требуется наличие такого переопределения систем дифференциальных уравнений, чтобы их общих решений было не более, чем счетно. Такого изначального переопределения добиться довольно непросто. Однако есть простой способ переопределения любых систем уравнений в частных производных, который содержит больший произвол в общих решениях.

Рассмотрим систему из p дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно неизвестных $S_\nu = S_\nu(\mathrm{x})$, $\nu = 1 \ldots p$, $\mathrm{x} = (x_1, \ldots x_m) \in \Re_{\mathrm{x}}^m$ [9, 10]

$$H_k\left(\frac{\partial S_1}{\partial \mathrm{x}}, \ldots \frac{\partial S_\nu}{\partial \mathrm{x}} \ldots \frac{\partial S_p}{\partial \mathrm{x}}, S_1, \ldots S_\nu \ldots S_p, \mathrm{x}\right) = 0, \ \nu = 1 \ldots p, \ k = 1 \ldots p. \quad (1)$$

Здесь $H_k\left(\partial S_1/\partial \mathrm{x}, \ldots \partial S_\nu/\partial \mathrm{x}, \ldots \partial S_p/\partial \mathrm{x}, S_1, \ldots S_\nu, \ldots S_p, \mathrm{x}\right)$, $k = 1 \ldots p$, – некоторые достаточно гладкие функции своих аргументов $\partial S_\nu/\partial \mathrm{x}$, S_ν, x, $\nu = 1 \ldots p$, $\Re_{\mathrm{x}}^m$ – евклидово пространство размерности m. Рассмотрим вспомогательную функцию, зависящую от $\mathrm{x} = (x_1, \ldots x_m)$ и дополнительной переменной ξ,

$$U = U(\mathrm{x}, \xi) = G\left(S_1(\mathrm{x}), \ldots S_k(\mathrm{x}) \ldots S_p(\mathrm{x}), \mathrm{x}, \xi\right), \ k = 1 \ldots p, \quad (2)$$

где $G\left(S_1(\mathrm{x}), \ldots S_\nu(\mathrm{x}) \ldots S_p(\mathrm{x}), \mathrm{x}, \xi\right)$ – заранее заданная достаточно гладкая функция своих аргументов $S_\nu(\mathrm{x}), \xi$, x, где $\nu = 1 \ldots p$. Продифференцируем (2) по переменной ξ p раз:

$$\frac{\partial^j}{\partial \xi^j}\left[U(\mathrm{x}, \xi)\right] = \frac{\partial^j}{\partial \xi^j}\left[G\left(S_1(\mathrm{x}), \ldots S_k(\mathrm{x}) \ldots S_p(\mathrm{x}), \mathrm{x}, \xi\right)\right], \ k = 1 \ldots p, \ j = 1 \ldots p. \quad (3)$$

Тогда мы имеем систему из $p+1$ неявных уравнений (2), (3) относительно p неизвестных $S_k = S_k(\mathrm{x})$, $k = 1 \ldots p$. Предположим, что функция $G\left(S_1(\mathrm{x}), \ldots S_\nu(\mathrm{x}) \ldots S_p(\mathrm{x}), \mathrm{x}, \xi\right)$ такова (например, степенная по переменной ξ), что эти неизвестные из системы (2), (3) можно выразить в явном виде через функцию $U(\mathrm{x}, \xi)$ и ее производные по ξ

$$S_k = F_k\left(\mathrm{x}, \xi, U, \frac{\partial U}{\partial \xi}, \ldots \frac{\partial^l U}{\partial \xi^l}, \ldots \frac{\partial^{p-1} U}{\partial \xi^{p-1}}\right), \ k = 1 \ldots p, \ l = 1 \ldots p-1, \quad (4)$$

а также выписать дополнительное соотношение в виде:

$$\frac{\partial^p U}{\partial \xi^p} = W\left(\mathrm{x}, \xi, U, \frac{\partial U}{\partial \xi}, \ldots \frac{\partial^l U}{\partial \xi^l}, \ldots \frac{\partial^{p-1} U}{\partial \xi^{p-1}}\right), \ l = 1 \ldots p-1. \quad (5)$$

Потребуем, чтобы следующий определитель был не равен нулю для любых S_k, $k = 1 \ldots p$, являющихся решениями системы из неявных уравнений (2), (3)

$$\Delta = \left|a_{i,j}\right| = \left|\frac{\partial}{\partial S_j}\left(\frac{\partial^{i-1} G\left(S_1, \ldots S_k \ldots S_p, \mathrm{x}, \xi\right)}{\partial \xi^{i-1}}\right)\right| \neq 0, \ i, j = 1 \ldots p, \ k = 1 \ldots p.$$

Если функция $U(\mathrm{x}, \xi)$ удовлетворяет уравнению (5) и выполняется условие выше на определитель, то выражения для S_k, $k = 1 \ldots p$, вычисленные по формуле (4), не зависят от ξ. Подставим выражения (4) в уравнения (1). Тогда мы сможем преобразовать систему (1) к системе из p уравнений

$$H_k\left(\mathrm{x}, \xi, U, \frac{\partial U}{\partial \xi}, \ldots \frac{\partial^l U}{\partial \xi^l}, \ldots \frac{\partial^{p-1} U}{\partial \xi^{p-1}}, \frac{\partial U}{\partial \mathrm{x}}, \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \mathrm{x}}, \ldots \frac{\partial^{l+1} U}{\partial \xi^l \partial \mathrm{x}} \ldots \frac{\partial^p U}{\partial \xi^{p-1} \partial \mathrm{x}}\right) = 0, \ k = 1 \ldots p, \ l = 1 \ldots p-1, \quad (6)$$

которая содержит всего одну неизвестную функцию $U(\mathrm{x}, \xi)$. Решая переопределённую систему уравнений (5), (6), мы можем найти все решения исходной системы (1) по формулам (4). К системе уравнений (1) может быть задана задача Коши, содержащая непрерывный параметр, и выделена непрерывная серия решений. Следовательно, непрерывную серию решений по формуле (2) имеет и переопределенная система дифференциальных уравнений (5), (6).

В статьях [6–8] предложено несколько способов переопределения различных уравнений математической физики. Конкретное решение, которое содержит переопределённая система уравнений, учитывается в самом способе переопределения в виде начального распределения у неизвестных функций, взятых из задачи Коши для исходной системы УрЧП. При преобразовании этой системы УрЧП к системам неявных уравнений приходится до миллиона раз дифференцировать эти начальные распределения у неизвестных функций. С точки зрения численных методов это крайне неэффективно, так как для этого нужно запредельно точно знать начальные данные. Однако предлагаемый в статьях авторов [6–8] метод допускает также редуцирование переопределенных систем дифференциальных уравнений не только вплоть до систем неявных уравнений, но и до систем УрЧП размерности меньшей, чем у исходных систем УрЧП. В частности, при некоторых условиях возможна редукция до параметризованных систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). С точки зрения численных методов выгоднее найти такие способы переопределения, чтобы соответствующая переопределённая система содержала сразу все решения исходной системы УрЧП, и редуцировать потом ее до параметрической системы ОДУ. Решив потом эту систему ОДУ в общем виде, мы сможем выписать решение у исходной системы УрЧП.

Требуется уточнение данного метода нахождения частных решений у систем УрЧП на этот случай. Оказывается, что можно выделять решения у таких переопределённых систем УрЧП с помощью параметризованной задачи Коши, которая ставиться для параметризованных систем ОДУ при выполнении некоторых условий. Цель данной статьи состоит в исследовании этой задачи Коши с возможностью ее универсализации (представление ее решения в виде универсальной формулы от начальных данных).

Везде мы предполагаем достаточную гладкость всех рассматриваемых функций, а в некоторых случаях и их аналитичность. Для простоты везде предполагается, что решения ищутся в пространстве аналитических функций и что выполняются условия теоремы Коши–Ковалевской о единственности решения задачи Коши для систем УрЧП.

1. Основная идея метода

Рассмотрим переопределенную систему из $p+n$ дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно неизвестных $S_v = S_v(\mathrm{x})$, $v = 1 \ldots p$, $\mathrm{x} = (x_1, \ldots x_m) \in \Re^m_{\mathrm{x}}$

$$H_k\left(\frac{\partial S_1}{\partial \mathrm{x}}, \ldots \frac{\partial S_v}{\partial \mathrm{x}} \ldots \frac{\partial S_p}{\partial \mathrm{x}}, S_1, \ldots S_v \ldots S_p, \mathrm{x}\right) = 0, \; v = 1 \ldots p, \; k = 1 \ldots (p+n). \quad (7)$$

Здесь $H_k\left(\partial S_1/\partial \mathrm{x}, \ldots \partial S_v/\partial \mathrm{x} \ldots \partial S_p/\partial \mathrm{x}, S_1, \ldots S_v \ldots S_p, \mathrm{x}\right)$, $k = 1 \ldots (p+n)$ – некоторые достаточно гладкие функции своих аргументов $\partial S_v/\partial \mathrm{x}$, S_v, x, $v = 1 \ldots p$.

Зададим согласованную соответствующим образом задачу Коши для этих уравнений:

$$S_v\Big|_{x_m=0} = S_v^0(x_1, \ldots x_{m-1}), \; \left.\frac{\partial S_v}{\partial x_m}\right|_{x_m=0} = R_v^0(x_1, \ldots x_{m-1}), \; v = 1 \ldots p, \quad (8)$$

потребовав, чтобы равенства (8) удовлетворяли уравнениям (7) при $x_m = 0$.

Продифференцируем выражения (7) $N_1 - 1$ раз по переменной x_1, $N_2 - 1$ раз по переменной x_2, … $N_{m-1} - 1$ раз по переменной x_{m-1}. В результате получим систему неявных обыкновенных дифференциальных уравнений по переменной x_m вида

$$P_\alpha\left(\frac{\partial Q_\beta}{\partial x_m}, Q_\beta, \mathrm{x}\right) = \frac{\partial^{(i_1 + \ldots + i_{m-1})}}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_{m-1}^{i_{m-1}}}\left[H_k\left(\frac{\partial S_1}{\partial \mathrm{x}}, \ldots \frac{\partial S_v}{\partial \mathrm{x}} \ldots \frac{\partial S_p}{\partial \mathrm{x}}, S_1, \ldots S_v \ldots S_p, \mathrm{x}\right)\right] = 0, v = 1 \ldots p, \; k = 1 \ldots p+n, \quad (9)$$

относительно неизвестных вида

$$Q_\beta = \frac{\partial^{(j_1 + \ldots + j_{m-1})} S_v}{\partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_{m-1}^{j_{m-1}}}, \; v = 1 \ldots p, \quad (10)$$

с параметрами $(x_1, \ldots x_{m-1})$. Здесь $\alpha = \alpha(k, i_1, \ldots i_{m-1}) = 1, 2, \ldots N_H$, $\beta = \beta(v, j_1, \ldots j_{m-1}) = 1, 2, \ldots N_S$, где N_H – количество уравнений (9) и N_S – количество неизвестных (10), функции-биекции от индексов (мульти-индексов) такие, что $Q_{\beta(v,0,...0)} = S_v$, $v=1...p$, $P_{\alpha(k,0,...0)} = H_k\left(\partial S_v/\partial \mathrm{x}, S_v, \mathrm{x}\right)$, $k=1...(p+n)$ и

$$i_1 = 0...(N_1 - 1),\ i_2 = 0...(N_2 - 1),\ \ldots\ i_{m-1} = 0...(N_{m-1} - 1). \quad (11)$$

$$j_1 = 0...N_1,\ j_2 = 0...N_2,\ \ldots\ j_{m-1} = 0...N_{m-1}. \quad (12)$$

Конкретные выражения $\alpha = \alpha(k, i_1, ... i_{m-1})$, $\beta = \beta(v, j_1, ... j_{m-1})$ могут быть взяты, например, из [8].

Если решение системы (7) существует, то оно удовлетворяет системе ОДУ (9). Очевидно, количество уравнений (9), учитывая (11), равно

$$N_H = (p+n) N_1 N_2 \cdots N_{m-1}, \quad (13)$$

а количество неизвестных (10), учитывая (12), равно

$$N_S = p \cdot (N_1 + 1)(N_2 + 1) \cdots (N_{m-1} + 1). \quad (14)$$

Выберем такие $N_1, \ldots N_{m-1}$, чтобы выполнялось неравенство $N_S \le N_H$ (см. (13)–(14)). Это можно сделать подобно работе [8].

Рассмотрим **расширенную** переопределенную систему неявных обыкновенных дифференциальных уравнений по переменной x_m вида

$$P_\alpha\left(\frac{\partial Q_\beta}{\partial x_m}, Q_\beta, \mathrm{x}\right) = \frac{\partial^{(i_1+...+i_{m-1})}}{\partial x_1^{i_1} ... \partial x_{m-1}^{i_{m-1}}}\left[H_k\left(\frac{\partial S_1}{\partial \mathrm{x}}, ... \frac{\partial S_v}{\partial \mathrm{x}} ... \frac{\partial S_p}{\partial \mathrm{x}}, S_1, ... S_v ... S_p, \mathrm{x}\right)\right] = 0,\ v=1...p,\ k=1...p+n, \quad (15)$$

относительно неизвестных вида

$$Q_\beta = \frac{\partial^{(j_1+...+j_{m-1})} S_v}{\partial x_1^{j_1} ... \partial x_{m-1}^{j_{m-1}}},\ v=1...p, \quad (16)$$

с параметрами $(x_1, ... x_{m-1})$. Но функции-биекции от мульти-индексов $\alpha = \alpha(k, i_1, ... i_{m-1}) = 1, 2, ... N'_H$, $\beta = \beta(v, j_1, ... j_{m-1}) = 1, 2, ... N'_S$, где N'_H – количество уравнений (15) и N'_S – количество неизвестных (16), в отличие от (11), (12) пусть определяются из условий:

$$i_1 = 0...N_1,\ i_2 = 0...N_2,\ \ldots\ i_{m-1} = 0...N_{m-1}, \quad (17)$$

$$j_1 = 0...(N_1 + 1),\ j_2 = 0...(N_2 + 1),\ \ldots\ j_{m-1} = 0...(N_{m-1} + 1). \quad (18)$$

Система уравнений (15) (с индексами из (17)) включает в себя систему уравнений (9). Неизвестных (16) (с индексами из (18)) несколько больше неизвестных (10). Функции от мульти-индексов $\alpha = \alpha(k, i_1, ... i_{m-1})$ и $\beta = \beta(v, j_1, ... j_{m-1})$ в уравнениях (9) и (15) обозначены одинаково, т. к. их можно выбрать совпадающими на их общей области определения. Область определения одних индексов (17), (18) включает в себя область определения других индексов (11)–(12).

Зададим к системе ОДУ (15) параметрическую задачу Коши [11]:

$$Q_\beta\Big|_{x_m=0} = \frac{\partial^{(j_1+...+j_{m-1})} S_v^0}{\partial x_1^{j_1} ... \partial x_{m-1}^{j_{m-1}}},\ \frac{\partial Q_\beta}{\partial x_m}\bigg|_{x_m=0} = \frac{\partial^{(j_1+...+j_{m-1})} R_v^0}{\partial x_1^{j_1} ... \partial x_{m-1}^{j_{m-1}}},\ v=1...p. \quad (19)$$

Если $S_v = S_v(\mathrm{x})$, $v=1...p$ являются решениями системы (7) и удовлетворяют задаче Коши (8), то функции вида (16) будут являться решениями задачи (19) к системе (15). Найдем, при каких условиях, решая задачу (19) к системе (15), можно найти решение задачи Коши (8) к системе (7).

Пусть количество неизвестных в уравнениях (9) равно N_S^{real}. Некоторые неизвестные из (10) отсутствуют в уравнениях (9) или могут быть без ущерба убраны вместе с уравнениями, где они присутствуют. Например, рассмотрим уравнения (9) с мульти-индексами $\alpha = \alpha(k, (N_1 - 1), ... (N_{m-1} - 1))$, $k = 1...(p+n)$. Таких уравнений $(p+n)$ штук. Только в них встречаются неизвестные (10) с мульти-индексами $\beta = \beta(v, N_1, (N_2 - 1) ... (N_{m-1} - 1))$, $\ldots$ $\beta = \beta(v, (N_1 - 1), .. N_s ... (N_{m-1} - 1))$, $\ldots$ $\beta = \beta(v, (N_1 - 1), .. (N_s - 1) ... N_{m-1})$, $v = 1...p$. Количество таких неизвестных равно $(m-1)p$. Таким образом, при $(m-1)p \ge (p+n)$ или $n \le (m-2)p$ количество неизвестных будет больше числа уравнений, где они встречаются. Следовательно, они никогда не могут быть найдены из системы (9) и вместе с их уравнениями без ущерба могут быть убраны из (9).

Продифференцируем уравнения (9) по переменной x_s, $1 \le s \le (m-1)$. Имеем,

$$\sum_{l^*=1}^{N_S^{real}} \frac{\partial P_\alpha}{\partial\left(\frac{\partial Q_{\beta_{l^*}}}{\partial x_m}\right)} \frac{\partial\left(\frac{\partial Q_{\beta_{l^*}}}{\partial x_s}\right)}{\partial x_m} + \sum_{l^*=1}^{N_S^{real}} \frac{\partial P_\alpha}{\partial Q_{\beta_{l^*}}} \frac{\partial Q_{\beta_{l^*}}}{\partial x_s} + \frac{\partial P_\alpha\left(Q_{\beta_l}, \mathrm{x}\right)}{\partial x_s} = 0,\ l = 1 \ldots N_S^{real}. \tag{20}$$

Здесь $\alpha = \alpha\left(k, i_1, \ldots i_{m-1}\right)$, $\beta_l = \beta\left(v^l, j_1^l, \ldots j_{m-1}^l\right)$. С другой стороны из определения уравнений (15) следует, что

$$P_{\tilde\alpha}\left(Q_{\beta_l}, \mathrm{x}\right) = \sum_{l^*=1}^{N_S^{real}} \frac{\partial P_\alpha}{\partial\left(\frac{\partial Q_{\beta_{l^*}}}{\partial x_m}\right)} \frac{\partial Q_{\tilde\beta_{l^*}}}{\partial x_m} + \sum_{l^*=1}^{N_S^{real}} \frac{\partial P_\alpha}{\partial Q_{\beta_{l^*}}} Q_{\tilde\beta_{l^*}} + \frac{\partial P_\alpha\left(Q_{\beta_l}, \mathrm{x}\right)}{\partial x_s} = 0,\ l = 1 \ldots N_S^{real}, \tag{21}$$

где $\tilde\alpha = \alpha\left(k, i_1, \ldots\left(i_s + 1\right)\ldots i_{m-1}\right)$, $\tilde\beta_l = \beta\left(v^l, j_1^l, \ldots\left(j_s^l + 1\right)\ldots j_{m-1}^l\right)$. Вычтем почленно из выражений (21) выражения (20). Тогда

$$\sum_{l=1}^{N_S^{real}} \frac{\partial P_\alpha}{\partial\left(\frac{\partial Q_{\beta_l}}{\partial x_m}\right)} \frac{\partial\left(Q_{\tilde\beta_l} - \frac{\partial Q_{\beta_l}}{\partial x_s}\right)}{\partial x_m} + \sum_{l=1}^{N_S^{real}} \frac{\partial P_\alpha}{\partial Q_{\beta_l}} \left(Q_{\tilde\beta_l} - \frac{\partial Q_{\beta_l}}{\partial x_s}\right) = 0. \tag{22}$$

Мы видим, что выражения $M_l = \left(Q_{\tilde\beta_l} - \partial Q_{\beta_l} / \partial x_s\right)$, $l = 1 \ldots N_S^{real}$ удовлетворяют системе неявных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\sum_{l=1}^{N_S^{real}} \frac{\partial P_\alpha}{\partial\left(\frac{\partial Q_{\beta_l}}{\partial x_m}\right)} \frac{\partial M_l}{\partial x_m} + \sum_{l=1}^{N_S^{real}} \frac{\partial P_\alpha}{\partial Q_{\beta_l}} M_l = 0 \tag{23}$$

с начальными данными Коши из (19)

$$M_l\big|_{x_m=0} = \left(Q_{\tilde\beta_l}\big|_{x_m=0} - \frac{\partial Q_{\beta_l}\big|_{x_m=0}}{\partial x_s}\right) = \frac{\partial^{\left(j_1^l + \ldots + \left(j_s^l+1\right) + \ldots + j_{m-1}^l\right)} S_v^0}{\partial x_1^{j_1^l} \ldots \partial x_s^{j_s^l+1} \ldots \partial x_{m-1}^{j_{m-1}^l}} - \frac{\partial}{\partial x_s} \frac{\partial^{\left(j_1^l + \ldots + j_s^l + \ldots + j_{m-1}^l\right)} S_v^0}{\partial x_1^{j_1^l} \ldots \partial x_s^{j_s^l} \ldots \partial x_{m-1}^{j_{m-1}^l}} = 0,\ l = 1 \ldots N_S^{real},$$

$$\left.\frac{\partial M_l}{\partial x_m}\right|_{x_m=0} = \left(\left.\frac{\partial Q_{\tilde\beta_l}}{\partial x_m}\right|_{x_m=0} - \frac{\partial\left(\left.\frac{\partial Q_{\beta_l}}{\partial x_m}\right)\right|_{x_m=0}}{\partial x_s}\right) = \frac{\partial^{\left(j_1^l + \ldots + \left(j_s^l+1\right) + \ldots + j_{m-1}^l\right)} R_v^0}{\partial x_1^{j_1^l} \ldots \partial x_s^{j_s^l+1} \ldots \partial x_{m-1}^{j_{m-1}^l}} - \frac{\partial}{\partial x_s} \frac{\partial^{\left(j_1^l + \ldots + j_s^l + \ldots + j_{m-1}^l\right)} R_v^0}{\partial x_1^{j_1^l} \ldots \partial x_s^{j_s^l} \ldots \partial x_{m-1}^{j_{m-1}^l}} = 0.$$

Очевидно, нулевое решение удовлетворяет системе (23). **Предположим**, что другого решения указанная выше задача Коши не имеет. Это возможно, например, когда все производные по x_m от неизвестных M_l, $l = 1 \ldots N_S^{real}$ выражаются из (23) в явном виде [11]. В силу нашего предположения отсюда следует

$$\left(Q_{\tilde\beta_l} - \frac{\partial Q_{\beta_l}}{\partial x_s}\right) = 0 \text{ или } Q_{\tilde\beta_l} = \frac{\partial Q_{\beta_l}}{\partial x_s},\ l = 1 \ldots N_S^{real}. \tag{24}$$

Таким образом, мы доказали, что для каждой переменной x_s, $1 \le s \le (m-1)$ выполняется соотношение (24). Отсюда, учитывая, что по определению $Q_{\beta(\nu,0,...0)} = S_\nu$, $\nu = 1...p$, следует

$$Q_{\beta(\nu,j_1,...j_{m-1})} = \frac{\partial Q_{\beta(\nu,j_1-1,...j_{m-1})}}{\partial x_1} = ... = \frac{\partial^{j_1} Q_{\beta(\nu,0,...j_{m-1})}}{\partial x_1^{j_1}} = ... = \frac{\partial^{(j_1+j_2)} Q_{\beta(\nu,0,0...j_{m-1})}}{\partial x_1^{j_1} \partial x_2^{j_2}} = ...$$

$$... = \frac{\partial^{(j_1+...+j_{m-1})} Q_{\beta(\nu,0,...0)}}{\partial x_1^{j_1} ... \partial x_{m-1}^{j_{m-1}}} = \frac{\partial^{(j_1+...+j_{m-1})} S_\nu}{\partial x_1^{j_1} ... \partial x_{m-1}^{j_{m-1}}}. \tag{25}$$

Мы видим, что функции $S_\nu = S_\nu(\mathrm{x}) = Q_{\beta(\nu,0,...0)}$, $\nu = 1...p$ являются решением системы (7), а величины (10) являются соответствующими частными производными этого решения (25).

В итоге, решая параметрическую задачу Коши (19) для расширенной системы ОДУ (15) при выполнении некоторого предположения, мы находим решение задачи Коши (8) к системе (7).

2. Пример использования метода

Пример 1. Рассмотрим известную из механики систему ОДУ:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v, \tag{26}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -u \tag{27}$$

с задачей Коши: $u|_{t=0} = A$, $v|_{t=0} = B$, где A и B константы. Введем функцию $U = U(t,\xi) = u(t) + \xi v(t)$. Отсюда легко получить, что

$$u = U - \xi \frac{\partial U}{\partial \xi}, \; v = \frac{\partial U}{\partial \xi}. \tag{28}$$

Подставим (28) в уравнения (26) и (27). После преобразований получим, что

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\xi U + \left(1+\xi^2\right)\frac{\partial U}{\partial \xi}, \tag{29}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -U + \xi \frac{\partial U}{\partial \xi}, \tag{30}$$

$$V = \frac{\partial U}{\partial \xi}. \tag{31}$$

Мы имеем переопределенную систему трех уравнений в частных производных первого порядка (29)–(31) от двух неизвестных U и V. Поставим для них согласованную задачу Коши:

$$U|_{t=0} = U^0(\xi) = A + \xi B, \; V|_{t=0} = \frac{\partial U^0(\xi)}{\partial \xi} = B. \tag{32}$$

Относительно неизвестных U, V и $\partial U/\partial \xi$ система (29)–(31) превращается в параметрическую систему ОДУ по переменной t с параметром ξ из трех уравнений и трех неизвестных.

Рассмотрим расширенную систему уравнений. Для этого продифференцируем обе части уравнений (29)–(31) по переменной ξ. Имеем

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t \partial \xi} = -U - \xi \frac{\partial U}{\partial \xi} + 2\xi \frac{\partial U}{\partial \xi} + \left(1+\xi^2\right)\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = -U + \xi \frac{\partial U}{\partial \xi} + \left(1+\xi^2\right)\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}, \tag{33}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t \partial \xi} = -\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \xi} + \xi \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = \xi \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}, \tag{34}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}. \tag{35}$$

Выпишем соответствующую расширенную параметрическую систему уравнений ОДУ.

$$\frac{\partial Q_{U0}}{\partial t} = -\xi Q_{U0} + \left(1+\xi^2\right) Q_{U1}, \tag{36}$$

$$\frac{\partial Q_{V0}}{\partial t} = -Q_{U0} + \xi Q_{U1},$$

$$Q_{V0} = Q_{U1}.$$

$$\frac{\partial Q_{U1}}{\partial t} = -Q_{U0} + \xi Q_{U1} + \left(1+\xi^2\right) Q_{U2},$$

$$\frac{\partial Q_{V1}}{\partial t} = \xi Q_{U2},$$

$$Q_{V1} = Q_{U2}. \tag{37}$$

Поставим для (36), (37) задачу Коши:

$$Q_{U0}\big|_{t=0} = U^0(\xi),\ Q_{V0}\big|_{t=0} = Q_{U1}\big|_{t=0} = \frac{\partial U^0(\xi)}{\partial \xi},\ \ Q_{U2}\big|_{t=0} = Q_{V1}\big|_{t=0} = \frac{\partial^2 U^0(\xi)}{\partial \xi^2} = 0. \tag{38}$$

Из (36), (37) следует, что

$$\frac{\partial M_{U0}}{\partial t} = -\xi M_{U0} + \left(1+\xi^2\right) M_{U1}, \tag{39}$$

$$\frac{\partial M_{V0}}{\partial t} = -M_{U0} + \xi M_{U1}, \tag{40}$$

$$M_{V0} = M_{U1}, \tag{41}$$

где $M_{U0} = Q_{U1} - \partial Q_{U0}/\partial \xi$, $M_{U1} = Q_{U2} - \partial Q_{U1}/\partial \xi$, $M_{V0} = Q_{V1} - \partial Q_{V0}/\partial \xi$. Очевидно, необходимое требование на систему (39)–(41) здесь выполняется.

Система ОДУ (36)–(37) линейная с постоянными коэффициентами. Решение задачи Коши (38) для системы (36)–(37) может быть найдено стандартным способом в явном виде и выглядит следующим образом:

$$Q_{U0} = U^0(\xi)\left(\cos t - \xi \sin t\right) + \frac{\partial U^0(\xi)}{\partial \xi}\left(1+\xi^2\right)\sin t, \tag{42}$$

$$Q_{V0} = Q_{U1} = -U^0(\xi)\sin t + \frac{\partial U^0(\xi)}{\partial \xi}\left(\cos t + \xi \sin t\right), \tag{43}$$

$$Q_{V1} = Q_{U2} = 0. \tag{44}$$

Следовательно, решение задачи Коши (32) для системы уравнений (29)–(31) есть $U = Q_{U0}$, $V = Q_{V0}$. Тогда по формулам (28) находим, что

$$u = U - \xi \frac{\partial U}{\partial \xi} = A\cos t + B\sin t,\ \ v = \frac{\partial U}{\partial \xi} = -A\sin t + B\cos t. \tag{45}$$

Выражения (45) являются общим решением задачи Коши для системы (26) и (27).

3. Универсальный решатель систем ОДУ

Рассмотрим произвольную систему ОДУ вида

$$\frac{d\mathrm{u}}{dt} = \mathrm{H}(\mathrm{u}, t), \tag{46}$$

где $\mathrm{u} = \left(u_1(t), u_2(t) \ldots u_n(t)\right)$, $\mathrm{H}(\mathrm{u},t) = \left(H_1(\mathrm{u},t), \ldots H_n(\mathrm{u},t)\right)$ – некоторые аналитические функции своих аргументов. Зададим задачу Коши для уравнений (46):

$$\mathrm{u}\big|_{t=0} = \mathrm{u}_0, \tag{47}$$

где $\mathrm{u}_0 = \left(u_{01}, u_{02} \ldots u_{0n}\right) \in \mathfrak{R}^n_{\mathrm{u}_0}$.

Как известно, решение любой задачи Коши для ОДУ есть некоторая функция от начальных данных. Пусть решение ОДУ (46) с начальными данными (47) имеет вид

$$\mathrm{u} = \mathrm{u}\left(\mathrm{u}_0, t\right). \tag{48}$$

Тогда систему (46) мы можем записать в виде

$$\frac{\partial \mathrm{u}(\mathrm{u}_0,t)}{\partial t}=\mathrm{H}(\mathrm{u},t). \tag{49}$$

Систему уравнений (49) можно рассматривать как систему уравнений в частных производных для неизвестных функций (48), определенных в пространстве $\Re^{n+1}_{\mathrm{u}_0,t}$, с задачей Коши (47). Согласно теореме Коши–Ковалевской эта задача имеет единственное решение. Если эту задачу можно решить аналитически или численно, то мы сразу выпишем общее решение системы ОДУ (46).

Предположим, что (48) можно преобразовать к виду

$$\mathrm{u}_0=\mathrm{u}_0(\mathrm{u},t). \tag{50}$$

Тогда

$$0=\frac{d\mathrm{u}_0}{dt}=\frac{d\mathrm{u}_0(\mathrm{u}(\mathrm{u}_0,t),t)}{dt}=\frac{\partial \mathrm{u}_0}{\partial t}+\frac{d\mathrm{u}}{dt}\frac{\partial \mathrm{u}_0}{\partial \mathrm{u}}=\frac{\partial \mathrm{u}_0}{\partial t}+\mathrm{H}(\mathrm{u},t)\cdot\frac{\partial \mathrm{u}_0}{\partial \mathrm{u}}. \tag{51}$$

Мы имеем систему УрЧП для неизвестных (50)

$$\frac{\partial \mathrm{u}_0}{\partial t}+\mathrm{H}(\mathrm{u},t)\cdot\frac{\partial \mathrm{u}_0}{\partial \mathrm{u}}=0, \tag{52}$$

где $\mathrm{u}_0=(u_{01}(\mathrm{u},t),u_{02}(\mathrm{u},t)...u_{0n}(\mathrm{u},t))$. Из (47) и (50) следует, что

$$\mathrm{u}_0|_{t=0}=\mathrm{u}, \tag{53}$$

где $\mathrm{u}=(u_1,u_2...u_n)\in\Re^n_{\mathrm{u}}$. Согласно теореме Коши–Ковалевской задача (53) к системе УрЧП (52) имеет единственное решение. Решая данную задачу, также можно найти общее решение системы ОДУ (46), преобразовав ее решение (50) к виду (48).

Рассмотрим параметризованную систему ОДУ вида

$$\frac{d\mathrm{u}}{dt}=\mathrm{H}(\mathrm{u},t,\alpha), \tag{54}$$

где $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2...\alpha_m)\in\Re^m_\alpha$ – параметры, а $\mathrm{u}=(u_1(t,\alpha),u_2(t,\alpha)...u_n(t,\alpha))$, $\mathrm{H}(\mathrm{u},t,\alpha)=(H_1(\mathrm{u},t,\alpha),...H_n(\mathrm{u},t,\alpha))$ – некоторые аналитические функции своих аргументов.

Зададим задачу Коши для уравнений (54):

$$\mathrm{u}|_{t=0}=\mathrm{u}_0(\alpha), \tag{55}$$

где $\mathrm{u}_0=(u_{01}(\alpha),u_{02}(\alpha)...u_{0n}(\alpha))$ – аналитические функции своих аргументов.

Вместо (54) рассмотрим систему ОДУ

$$\frac{d\mathrm{u}}{dt}=\mathrm{H}(\mathrm{u},t,\alpha), \tag{56}$$

$$\frac{d\alpha}{dt}=0, \tag{57}$$

где $\mathrm{u}=(u_1(t),u_2(t)...u_n(t))$, $\alpha=(\alpha_1(t),\alpha_2(t)...\alpha_m(t))$, $0=(0,0...0)$. Зададим начальные условия для уравнений (56), (57):

$$\mathrm{u}|_{t=0}=\mathrm{u}_0,\ \alpha|_{t=0}=\alpha_0, \tag{58}$$

где $\mathrm{u}_0=(u_{01},u_{02}...u_{0n})\in\Re^n_{\mathrm{u}_0}$, $\alpha_0=(\alpha_{01},\alpha_{02}...\alpha_{0m})\in\Re^m_{\alpha_0}$. Согласно теореме Коши – Ковалевской задача (58) к системе (56), (57) имеет единственное решение. Пусть это решение (численное или аналитическое) имеет следующий вид:

$$\mathrm{u}=\mathrm{F}(\mathrm{u}_0,\alpha_0,t),\ \alpha=\alpha_0. \tag{59}$$

Тогда общее решение задачи (55) для уравнений (54) будет выписываться в виде:

$$\mathrm{u}=\mathrm{F}(\mathrm{u}_0(\alpha),\alpha,t). \tag{60}$$

Вычислив один раз универсальный решатель (59), мы можем сразу составить по формуле (60) все решения задачи (55) для уравнений (54).

Таким образом, в случае удачной редукции переопределенной системы (7) к параметрической системе ОДУ вида (54) с задачей Коши (55) решение задачи Коши (8) к системе (7) в нашем случае будет некоторая функция от начальных данных (8) и их производных (19) (см. (60)). Чтобы найти решение любой соответствующей задачи Коши (8), достаточно один раз вычислить для системы УрЧП (7) универсальный решатель вида (60) (см. **Гипотеза 1**) и подставить туда начальные данные (19).

В работе [12] показано, что в случае предположения о дополнительной гладкости решений и их параметризации любая система УрЧП может быть преобразована к системе УрЧП стандартного вида, которая будет содержать все решения исходной системы УрЧП (см. **Приложение В**). Таким образом, достаточно найти универсальное переопределение и произвести редукцию только для таких специфических систем УрЧП (см. **Гипотеза 2**).

Заключение

В статье рассматривается возможность существования универсального решения задачи Коши у систем УрЧП, если эта система переопределяется так, что новая переопределенная система УрЧП содержит все решения исходной системы УрЧП и, кроме того, редуцируется методом сокращения размерности [6–8] до систем ОДУ. Для этого рассматривается уточнение метода редукции переопределенных систем дифференциальных уравнений на случай редукции до систем ОДУ. Показывается, что задача Коши для исходной переопределенной системы УрЧП может быть решена, если решить параметризованную задачу Коши для системы ОДУ, получающуюся из исходной системы УрЧП. Но при этом эта задача вида (19) не может быть произвольной, поскольку в целом задается для переопределенной системы ОДУ (15) (см. **Пример 1**). При этом решение будет не только существовать и быть единственным, но и непрерывно зависеть от начальных данных (если такие можно задать), поскольку для систем ОДУ это доказано [11]. Если по каким-то причинам из (15) удастся найти не само решение, а только его производные, то тогда можно учесть и краевые условия. Помимо этого, это универсальное решение может быть чрезвычайно сложным из-за того, что необходимо решить систему ОДУ большого порядка, но тем не менее оно может представлять теоретический интерес. Для практических целей нужно или добиться получения его в явном виде (см. **Пример 1, Приложение А**) или найти новый экономичный способ его вычисления.

В статьях авторов [6–8] приводятся переопределенные уравнения гидродинамики. Несмотря на общность подхода, учитывающего начальные данные потока, из-за чрезвычайной сложности там не доказывается строго, что общих решений у них будет не более, чем счетно. Результаты данной статьи могут быть применены к ним в случае, если в результате расчетов окажется, что они имеют больший произвол в общих решениях.

Приложение А. Гипотеза о нахождении решений систем УрЧП

Рассмотрим систему из p дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно неизвестных $S_\nu = S_\nu(\mathrm{x})$, $\nu = 1...p$, $\mathrm{x} = (x_1,...x_m) \in \Re_\mathrm{x}^m$

$$H_k\left(\frac{\partial S_1}{\partial \mathrm{x}},...\frac{\partial S_\nu}{\partial \mathrm{x}}...\frac{\partial S_p}{\partial \mathrm{x}}, S_1,...S_\nu...S_p,\mathrm{x}\right) = 0,\ \nu = 1...p,\ k = 1...p. \tag{61}$$

Здесь $H_k\left(\partial S_1/\partial\mathrm{x},...\partial S_\nu/\partial\mathrm{x}...\partial S_p/\partial\mathrm{x}, S_1,...S_\nu...S_p,\mathrm{x}\right)$, $k = 1...p$ – некоторые достаточно гладкие функции своих аргументов $\partial S_\nu/\partial\mathrm{x}$, S_ν, x, $\nu = 1...p$. Обозначим $U_\nu^i = \partial S_\nu/\partial x_i$, $\nu = 1...p$, $i = 1...m$.

Тогда уравнения (61) можно записать в виде

$$H_k\left(U_1^1,...U_\nu^i...U_p^m, S_1,...S_\nu...S_p,\mathrm{x}\right) = 0,\ i = 1...m,\ \nu = 1...p,\ k = 1...p. \tag{62}$$

Можно выписать следующие выражения:

$$\frac{\partial U_\nu^i}{\partial x_m} = \frac{\partial^2 S_\nu}{\partial x_m \partial x_i} = \frac{\partial U_\nu^m}{\partial x_i},\ i = 1...(m-1),\ \nu = 1...p, \tag{63}$$

$$\frac{\partial S_v}{\partial x_m} = U_v^m, \; v = 1...p. \tag{64}$$

Введем вспомогательную функцию вида (2) в форме

$$V(\mathrm{x},\xi) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{v=1}^{p} A_v^i(x_1...x_{m-1},\xi)U_v^i + \sum_{v=1}^{p} B_v(x_1...x_{m-1},\xi)S_v. \tag{65}$$

Подберем коэффициенты $A_v^i(x_1...x_{m-1},\xi)$, $B_v(x_1...x_{m-1},\xi)$, $i=1...m$, $v=1...p$ так, чтобы U_v^i, S_v, $v=1...p$, $i=1...m$ выражались линейно по формуле (4) через функцию $V(\mathrm{x},\xi)$ и ее производные по ξ, и подставим их выражения в (63), (64). В результате получим переопределенную систему из mp линейных дифференциальных уравнений вида (6) от одной неизвестной функции $V(\mathrm{x},\xi)$. Обозначим W_V множество функций $V(\mathrm{x},\xi)$, получающееся при подстановке всех решений U_v^i, S_v, $v=1...p$, $i=1...m$ системы (62)–(64) в формулу (65). Если эту систему формально редуцировать нашим способом, изложенным в разделе 2, до системы ОДУ относительно переменной x_m, состоящей из достаточно большого числа уравнений и неизвестных, и решить аналитически [11], т. к. это будет линейная параметрическая система ОДУ с постоянными коэффициентами, то множество решений одной из ее неизвестных $V(\mathrm{x},\xi)$ будет содержать W_V. Тогда по формулам (4) можно выписать выражения для U_v^i, S_v, $v=1...p$, $i=1...m$. Это решение будет содержать некоторый произвол, который можно определить из дополнительных условий, поскольку U_v^i, S_v, $v=1...p$, $i=1...m$ связаны между собой еще p нелинейными соотношениями (62), а также из начальных условий Коши, которые можно поставить и для системы (62)–(64), и для этой системы ОДУ, пользуясь выражением (65).

Пусть система уравнений УрЧП (61) линейна и выражения (62) записываются линейно в виде:

$$H_k\left(U_1^1,...U_v^i...U_p^m,S_1,...S_v...S_p,\mathrm{x}\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{v=1}^{p} W_{j,i}^k(x_1...x_{m-1})U_v^i + \sum_{v=1}^{p} Q_v^k(x_1...x_{m-1})S_v + L_k(x_1...x_{m-1}) = 0,$$
$$v,k=1...p, \; i=1...m, \tag{66}$$

где коэффициенты $W_{j,i}^k(x_1...x_{m-1})$, $Q_v^k(x_1...x_{m-1})$, $L_k(x_1...x_{m-1})$, $i=1...m$, $v,k=1...p$ – достаточно гладкие функции, зависящие только от $(x_1...x_{m-1})$. Тогда, если ввести аналогично функцию (65), выразить U_v^i, S_v, $v=1...p$, $i=1...m$ линейно по формуле (4) и подставить их выражения в (63), (64) и (66), то получим переопределенную систему из $(m+1)p$! линейных дифференциальных уравнений вида (6) от одной неизвестной функции $V(\mathrm{x},\xi)$. Таким образом, мы учтем сразу все уравнения первоначальной системы уравнений. Если ее формально редуцировать предлагаемым способом (раздел 2) до системы ОДУ относительно переменной x_m, то это будет линейная параметрическая система ОДУ с постоянными коэффициентами. Из некоторых ее решений по формуле (4) можно найти решения U_v^i, S_v, $v=1...p$, $i=1...m$ системы (63), (64) и (66). Впрочем, это не гарантирует, что произвола в решениях этой системы ОДУ, которого нельзя определить из начальных данных Коши, все равно не останется.

В качестве примера рассмотрим автономную систему ОДУ нормального вида (46). Всякую систему ОДУ можно преобразовать к автономной. Тогда согласно результатам раздела 4 решение системы (46) сводится к нахождению решения линейного уравнения (52). Уравнение (52) можно преобразовать к системе уравнений вида (63), (64) и (66). Можно выдвинуть следующую гипотезу:

Гипотеза 1. *Решение задачи Коши для любой системы ОДУ нормального вида можно найти в явном виде из решения системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, зависящими от параметров.*

Приложение B. Еще один способ унификации систем УрЧП первого порядка

В работе [12] был предложен достаточно общий способ преобразования к единообразному виду (унификации) систем УрЧП первого порядка путем их параметризации. Приведем еще один способ унификации. Не ограничивая общности, рассмотрим систему из p дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно неизвестных $S_\nu = S_\nu\left(\mathrm{x}\right)$, $\nu = 1...p$, $\mathrm{x} = \left(x_1,...x_m\right) \in \Re_{\mathrm{x}}^m$ вида [9]

$$\frac{\partial S_\nu}{\partial x_m} = F_\nu^m\left(\frac{\partial S_1}{\partial x_1},...\frac{\partial S_k}{\partial x_i}...\frac{\partial S_p}{\partial x_{m-1}}, S_1,...S_k...S_p\right),\ i = 1...m-1,\ \nu, k = 1...p. \tag{67}$$

Здесь $F_k^m\left(\partial S_1/\partial x_1,...\partial S_\nu/\partial x_i,...\partial S_p/\partial x_{m-1}, S_1,...S_\nu...S_p\right)$, $k = 1...p$ – некоторые достаточно гладкие функции своих аргументов $\partial S_\nu/\partial x_i$, S_ν, $i = 1...m-1$, $\nu = 1...p$. Обозначим $U_\nu^i = \partial S_\nu/\partial x_i$, $\nu = 1...p$, $i = 1...m$. Тогда уравнения (67) можно записать в виде

$$U_\nu^m = F_\nu^m\left(U_1^1,...U_k^i...U_p^{m-1}, S_1,...S_k...S_p\right),\ i = 1...m-1,\ \nu, k = 1...p. \tag{68}$$

Можно также выписать выражения (64), (65). Введем новые переменные (параметры) C_r, $r = 1...m\left(p-1\right)+1$ с помощью следующей задачи Коши к системе уравнений (64), (65), (68):

$$U_\nu^i\Big|_{x_m=0} = \frac{\partial S_\nu^0\left(x_1,...x_{m-1},C_r\right)}{\partial x_i},\ \nu = 1...p,\ i = 1...m-1,\ r = 1...m\left(p-1\right)+1, \tag{69}$$

$$S_\nu\Big|_{x_m=0} = S_\nu^0\left(x_1,...x_{m-1},C_r\right),\ \nu = 1...p,\ r = 1...m\left(p-1\right)+1. \tag{70}$$

Наложим следующее условие

$$\frac{\partial\left(\dfrac{\partial S_1^0}{\partial x_1},...\dfrac{\partial S_\nu^0}{\partial x_i}...\dfrac{\partial S_p^0}{\partial x_{m-1}}, S_1^0,...S_\nu^0...S_p^0\right)}{\partial\left(x_1,...x_{m-1},C_r\right)} \neq 0,\ \nu = 1...p,\ i = 1...m-1,\ r = 1...m\left(p-1\right)+1. \tag{71}$$

Сделаем в системе уравнений (64), (65), (68) замену переменных:

$$U_\nu^i = U_\nu^i\left(x_1,...x_m,C_r\right),\ \nu = 1...p,\ i = 1...m-1,\ r = 1...m\left(p-1\right)+1, \tag{72}$$

$$S_\nu = S_\nu\left(x_1,...x_m,C_r\right),\ \nu = 1...p,\ r = 1...m\left(p-1\right)+1, \tag{73}$$

$$\tilde{x}_m = x_m. \tag{74}$$

В силу условия (71) это можно локально сделать. Из соотношения (68) следует, что в новых переменных

$$\frac{\partial U_\nu^m}{\partial \tilde{x}_m} = 0,\ \ \nu = 1...p. \tag{75}$$

Уравнения (64), (65) в новых переменных имеют вид:

$$\frac{\partial\left(U_\nu^i, x_1,...x_{m-1},C_r\right)}{\partial\left(U_\nu^i, U_1^1,...U_\nu^{i-1}, U_\nu^{i+1}...U_{\nu-1}^i, U_{\nu+1}^i,...U_p^{m-1}, S_1,...S_p,\tilde{x}_m\right)} = \pm\frac{\partial\left(U_\nu^m, x_1,...x_{i-1}, x_{i+1}...x_m, C_r\right)}{\partial\left(U_1^1,...U_p^{m-1}, S_1,...S_p,\tilde{x}_m\right)},$$
$$i = 1...m-1,\ \nu = 1...p, \tag{76}$$

$$\frac{\partial\left(S_\nu, x_1,...x_{m-1},C_r\right)}{\partial\left(S_\nu, U_1^1,...U_p^{m-1}, S_1,...S_{\nu-1}, S_{\nu+1}...S_p,\tilde{x}_m\right)} = U_\nu^m\frac{\partial\left(x_m, x_1,...x_{m-1},C_r\right)}{\partial\left(S_\nu, U_1^1,...U_p^{m-1}, S_1,...S_{\nu-1}, S_{\nu+1}...S_p,\tilde{x}_m\right)},\ \nu = 1...p. \tag{77}$$

Учитывая (74), мы имеем **универсальную** систему уравнений (75)–(77) от неизвестных функций вида: $x_1\left(U_1^1,...U_p^{m-1}, S_1,...S_p,\tilde{x}_m\right)$, … $x_{m-1}\left(U_1^1,...U_p^{m-1}, S_1,...S_p,\tilde{x}_m\right)$, $C_1\left(U_1^1,...U_p^{m-1}, S_1,...S_p,\tilde{x}_m\right)$, … $C_{m(p-1)+1}\left(U_1^1,...U_p^{m-1}, S_1,...S_p,\tilde{x}_m\right)$ и

$U_1^m\left(U_1^1,...U_p^{m-1},S_1,...S_p,\tilde{x}_m\right),...U_p^m\left(U_1^1,...U_p^{m-1},S_1,...S_p,\tilde{x}_m\right)$ и не содержащую в своей записи никакого указания на исходную систему (67). Начальные данные для этой системы можно найти из (68)–(70). Решение исходной системы (64), (65), (68) находится по формулам (72)–(74).

Пример 2. Рассмотрим простое уравнение

$$\frac{dS}{dt}=F(S) \qquad (78)$$

с параметрической задачей Коши $S\big|_{t=0}=S_0(C)$, $\partial S_0/\partial C\neq 0$. Рассмотрим параметр C как дополнительную переменную у неизвестной функции S в уравнении (78). Сделаем замену переменных $S=S(C,t)$, $C=C(S,t)$, $t=t$. В новых переменных уравнение (78) имеет вид:

$$\frac{\partial C}{\partial t}+U\frac{\partial C}{\partial S}=0, \qquad (79)$$

где обозначено $U(S,t)=F(S)$. Очевидно,

$$\frac{\partial U}{\partial t}=0. \qquad (80)$$

Таким образом, мы имеем систему из двух **универсальных** уравнений (79), (80), которая содержит все решения уравнения (78). Формула (79) согласуется с формулой (52).

Система уравнений (75)–(77) достаточно специфична. Через свои начальные данные она позволяет находить решения широких классов систем УрЧП. Выдвинем следующую гипотезу:

Гипотеза 2. *Система уравнений (75)–(77) переопределяется с помощью метода (1)–(6) и редуцируется до параметрической системы ОДУ, решая которую можно находить решения не только первоначальной системы уравнений (75)–(77), но и систем УрЧП, которых она обобщает через свои начальные данные.*

Литература

1. Математическая теория горения и взрыва / Я.Б. Зельдович, Г.И. Баренблатт, В.Б. Либрович, Г.М. Махвиладзе. – М.: Наука, 1980. – 478 с.

2. Sivashinsky, G.I. Nonlinear Analysis of Hydrodynamic Instability in Laminar Flames – I. Derivation of basic equations / G.I. Sivashinsky // Acta Astronautica. – 1977. – Vol. 4. – Iss. 11–12. – P. 1177–1206.

3. Ott, E. Nonlinear Evolution of the Rayleigh–Taylor Instability of a Thin Layer / E. Ott // Phys. Rev. Lett. – 1972. – Vol. 29. – Iss. 21. – P. 1429–1432.

4. Bychkov, V. Coordinate-Free Description of Corrugated Flames with Realistic Density Drop at the Front / V. Bychkov, M. Zaytsev, V. Akkerman // Phys. Rev. E. – 2003. – Vol. 68. – Iss. 2. – P. 026312–026324.

5. Joulin, G. On-Shell Description of Unsteady Flames / G. Joulin, H. El-Rabii, K. Kazakov // J. Fluid Mech. – 2008. – V. 608. – P. 217–242.

6. Аккерман, В.Б. Снижение размерности в уравнениях гидродинамики / В.Б. Аккерман, М.Л. Зайцев // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2011. – Т. 51, № 8. – С. 1518–1530.

7. Зайцев, М.Л. Гипотеза об упрощении переопределенных систем дифференциальных уравнений и ее применение к уравнениям гидродинамики / М. Л. Зайцев, В. Б. Аккерман // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2015. – № 2. – С. 5–27.

8. Зайцев, М.Л. Еще один способ нахождения частных решений уравнений математической физики / М.Л. Зайцев, В.Б. Аккерман // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1. Математика. Физика. – 2016. – № 6 (37). – С. 119–127.

9. Курант, Р. Методы математической физики / Р. Курант. – М.: Мир, 1964. – Т. 2. – 830 с.

10. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1966. – 724 с.

11. Федорюк, М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения / М.В. Федорюк. – СПб.: «Лань», 2003. – 447 с.

12. Зайцев, М.Л. Преобразование систем уравнений в частных производных к системам квазилинейных и линейных дифференциальных уравнений. Их редукция и унификация / М.Л. Зайцев, В.Б. Аккерман // Математическая физика и компьютерное моделирование. – 2018. – Т. 21, № 1. – С. 18–33.

Поступила в редакцию 2 августа 2019 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2019, vol. 11, no. 4, pp. 12–25

DOI: 10.14529/mmph190402

HYPOTHESIS ON UNIFICATION OF SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR OVERDETERMINED SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

***M.L. Zaytsev*[1], *V.B. Akkerman*[2]**
[1] *Moscow, Russian Federation*
[2] *West Virginia University, Morgantown, USA*
E-mail: mlzaytsev@gmail.com

In this paper, we study the possibility of the existence of a universal solution of the Cauchy problem for the partial differential equation (PDE) systems in the case if this system is overdetermined so that the new overdetermined system of PDE contains all solutions of the initial PDE system and, in addition, reduces to the ordinary differential equation (ODE) systems, whose solution is then found. To do this, the article discusses the modification of the method of finding particular solutions for any overdetermined systems of differential equations by reduction to overdetermined systems of implicit equations. In the previous papers of the authors, a method was proposed for finding particular solutions for overdetermined PDE systems. In this method, in order to find solutions it is necessary to solve systems of ordinary implicit equations. In this case, it can be shown that the solutions that we need cannot depend on a continuous parameter, i.e. they are no more than countable. In advance, there is a need for such an overriding of the systems of differential equations, so that their general solutions are no more than countable. Such an initial overdetermination is rather difficult to achieve. However, the proposed method also allows to reduce the overdetermined systems of differential equations not only up to systems of implicit equations, but also up to the PDE systems of dimension less than that of the initial systems of PDE. In particular, under certain conditions, reduction to the ODE systems is possible. It is proposed to choose solutions for the overdetermined PDE systems using the parameterized Cauchy problem, which is posed for parameterized ODE systems under certain conditions. The solution of this Cauchy problem is some function of the initial data and their derivatives. In order to find the solution of any corresponding Cauchy problem for the initial system of PDE, it is sufficient to calculate the universal solver for the reduced ODE system once. In this case, the solution will not only exist and be unique, but will also depend continuously on the initial data, since this holds for ODE systems.

The purpose of this paper is to study the Cauchy problem with the possibility of its universalization and the parameterized Cauchy problem as a whole for arbitrary PDE systems.

Keywords: overdetermined systems of differential equations; partial differential equation; ordinary differential equations; dimension of differential equations; Cauchy problem; parametric solutions of the systems of differential equations.

References

1. Zel'dovich Ya.B., Barenblatt G.I., Librovich V.B., Makhviladze G.M. *Matematicheskaya teoriya goreniya i vzryva* (The Mathematical Theory of Combustion and Explosion). Moscow, Nauka Publ., 1980, 478 p. (in Russ.).

2. Sivashinsky G.I. Nonlinear Analysis of Hydrodynamic Instability in Laminar Flames – I. Derivation of basic equations. *Acta Astronautica*, 1977, Vol. 4, Iss. 11–12, pp. 1177–1206. DOI: 10.1016/0094-5765(77)90096-0

3. Ott E. Nonlinear Evolution of the Rayleigh–Taylor Instability of a Thin Layer. *Phys. Rev. Lett.* 1972, Vol. 29, Iss. 21., pp. 1429–1432. DOI: 10.1103/physrevlett.29.1429

4. Bychkov V., Zaytsev M., Akkerman V. Coordinate-Free Description of Corrugated Flames with Realistic Density Drop at the Front. *Phys. Rev. E.*, 2003, Vol. 68, Iss. 2, pp. 026312–026324. DOI: 10.1103/physreve.68.026312

5. Joulin G., El-Rabii H., Kazakov K. On-Shell Description of Unsteady Flames. *J. Fluid Mech,* 2008, Vol. 608, pp. 217–242. DOI: 10.1017/S0022112008002140

6. Akkerman V.B., Zaytsev M.L. Dimension Reduction in Fluid Dynamics Equations. *Computational Mathematics and Mathematical Physics,* 2011, Vol. 51, no. 8, pp. 1418–1430. DOI: 10.1134/S0965542511080021

7. Zaytsev M.L., Akkerman V.B. Hypothesis on reduction of overdetermined systems of differential equations and its application to equations of hydrodynamics. *Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2015, no. 2, pp. 5–27. (in Russ.).

8. Zaytsev M.L., Akkerman V.B. Another Method for Finding Particular Solutions of Equations of Mathematical Physics. *Science Journal of VolSU. Mathematics. Physics,* 2016, no. 6 (37), pp. 119–127. (in Russ.). DOI: 10.15688/jvolsu1.2016.6.11

9. Courant R. Hilbert D. *Methods of Mathematical Physics*. Vol. 2. New York, London, Interscience Publ., 1962, 830 p. DOI: 10.1126/science.137.3527.334

10. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* (Equations of Mathematical Physics). Moscow, Nauka Publ., 1966, 724 p. (in Russ.).

11. Fedoryuk M.V. *Obyknovennye differentsial'nye uravneniya* (Odinary Differential Equations). SPb.: Lan' Publ., 2003, 447 p. (in Russ.).

12. Zaytsev M.L., Akkerman V.B. Transformation of Systems of Partial Differential Equations to Systems of Quasilinear and Linear Differential Equations. Their Reduction and Unification. *Mathematical Physics and Computer Simulation,* 2018, Vol. 21, Iss. 1, pp. 18–33. (in Russ.). DOI: 10.15688/mpcm.jvolsu.2018.1.3

Received August 2, 2019