УДК 532.546+519.6 DOI: 10.14529/mmph200103

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ТРУБЕ С ПРОНИЦАЕМОЙ СТЕНКОЙ

Х.М. Гамзаев
Азербайджанский государственный университет нефти и промышленности, г. Баку, Азербайджан
E-mail: xan.h@rambler.ru

Рассматривается процесс нестационарного течения вязкой несжимаемой жидкости в трубе с проницаемой стенкой, описываемый нелинейной системой дифференциальных уравнений в частных производных в переменных скорость–давление. Эта система уравнений сводится к одному нелинейному уравнению параболического типа относительно скорости. В рамках полученной модели поставлена обратная задача по определению коэффициента проницаемости стенки трубы, зависящего лишь от временной переменной. При этом на выходе трубы задается дополнительное условие относительно давления жидкости. Построен разностный аналог поставленной коэффициентной обратной задачи с использованием конечно-разностных аппроксимаций. Для решения полученной разностной задачи предложено специальное представление, позволяющее на каждом дискретном значении временной переменной расщепить задачу на две взаимно независимые линейные разностные задачи второго порядка.

В результате получена явная формула для определения приближенного значения коэффициента проницаемости стенки при каждом дискретном значении временной переменной. На основе предложенного вычислительного алгоритма были проведены численные эксперименты для модельных задач.

Ключевые слова: нестационарное течение жидкости; труба с проницаемой стенкой; коэффициент проницаемости стенки трубы; коэффициентная обратная задача; разностная задача.

Введение

Гидродинамические исследования движения однофазных жидкостей в перфорированных трубах помимо теоретического значения, имеют и многочисленные практические применения в пневмо- и гидротранспорте, химической технологии, разработке нефтяных и газовых месторождений горизонтальными скважинами, ракетной технике, мелиорации, гидрологии, биомеханике и т. д. [1–4]. При исследовании таких задач дискретное распределение точек перфорации (точек отбора или подкачки жидкости) заменяется непрерывным и исследования задач сводятся к изучению нестационарного движения жидкости в трубах с проницаемыми стенками. Численному и аналитическому исследованию математических моделей нестационарного течения жидкостей с различными реологическими свойствами в трубах с проницаемыми стенками посвящены работы [1–7].

Необходимо отметить, что для практики транспорта однофазных жидкостей в трубах с проницаемыми стенками важное значение имеет определение коэффициента проницаемости стенки трубы. Однако определить коэффициент проницаемости стенки экспериментальным путем практически не представляется возможным. В связи с этим в данной работе задача определения коэффициента проницаемости стенки трубы представляется как коэффициентная обратная задача и предлагается численный метод ее решения.

Постановка задачи и метод решения

Пусть рассматривается процесс нестационарного течения несжимаемой вязкой жидкости в горизонтально расположенной трубе с проницаемой стенкой, длиной l, диаметром d. Математическую модель данного процесса представим в виде системы дифференциальных уравнений в частных производных, включающую в себя уравнение движения:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}+u(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p(x,t)}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\lambda|u(x,t)|}{2d}u(x,t)\,, \qquad (1)$$

и дифференциальное уравнение неразрывности потока с учетом расхода жидкости через стенки трубы:

$$-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}=\frac{4}{d}q(x,t)\,, \qquad (2)$$

где $p(x,t)$ – давление жидкости в трубе, $u(x,t)$ – средняя скорость по сечению трубы, $q(x,t)$ – скорость оттока жидкости через стенку трубы, ν – кинематическая вязкость жидкости, ρ – плотность жидкости, λ – коэффициент гидравлического сопротивления.

Предположим, что отток жидкости через проницаемую стенку трубы происходит в соответствии с законом Старлинга [5, 6], согласно которому скорость оттока жидкости прямо пропорциональна разнице между давлением жидкости внутри трубы и давлением в окружающей среде:

$$q(x,t)=k(t)(p(x,t)-p_e(x,t))\,, \qquad (3)$$

где $p_e(x,t)$ – давление внешней среды, $k(t)$ – коэффициент проницаемости стенки трубы. Учитывая соотношение (3), уравнение (2) запишем в виде:

$$-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}=\frac{4}{d}k(t)(p(x,t)-p_e(x,t))\,. \qquad (4)$$

Преобразуем систему уравнений (1), (4). Найдем $p(x,t)$ из уравнения (4)

$$p(x,t)=p_e(x,t)-\frac{d}{4k(t)}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\,, \qquad (5)$$

и полученное выражение подставим в уравнение (1). В результате получим:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}+u(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_e(x,t)}{\partial x}+\frac{d}{4\rho k(t)}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\lambda|u(x,t)|}{2d}u(x,t)\,, \qquad (6)$$

$$0<x<l,\ \ 0<t\le T\,.$$

Предположим, что для уравнения (6) известно следующее начальное

$$u(x,0)=\phi(x) \qquad (7)$$

и граничные условия

$$u(0,t)=\theta(t)\,, \qquad (8)$$

$$u(l,t)=w(t)\,. \qquad (9)$$

Очевидно, что, задавая функции $\phi(x)$, $\theta(t)$, $w(t)$, $k(t)$, решив прямую задачу (6)–(9), можно найти распределение скорости течения в трубе $u(x,t)$. А по формуле (5) – распределение давления по длине трубы. Теперь предположим, что коэффициент проницаемости стенки трубы $k(t)$ неизвестен и подлежит определению наряду с функцией $u(x,t)$. Однако для корректной постановки задачи необходимо задавать дополнительное условие. Пусть в конце трубы $x=l$ наряду со скоростью течения одновременно задается и давление жидкости

$$p(l,t)=\gamma(t)\,.$$

Тогда, записав уравнение (4), при $x=l$ с учетом краевого условия для давления, в качестве дополнительного условия для уравнения (6) будем иметь

$$-\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=\frac{4}{d}k(t)(\gamma(t)-p_e(l,t))\,. \qquad (10)$$

Таким образом, задача заключается в определении пары функций{ $u(x,t)$, $k(t)$ }, удовлетворяющих уравнению (6) и условиям (7)–(10). Поставленная задача (6)–(10) относится к классу коэффициентных обратных задач математической физики [8, 9].

Для численного решения коэффициентной обратной задачи (6)–(10), сначала построим ее дискретный аналог. С этой целью введем равномерную разностную сетку

$$\bar{\omega}=\left\{(t_j,x_i):x_i=i\Delta x,\ t_j=j\Delta t,\ i=0,1,2,...n,\ j=0,1,2,...m\right\},$$

в прямоугольной области $\{0 \le x \le l,\ \ 0 \le t \le T\}$ с шагами $\Delta x = l/n$ по переменной x и $\Delta t = T/m$ по времени t. Используя полунеявную аппроксимацию по времени для нелинейных членов уравнения (6), дискретный аналог задачи (6)–(10) на сетке $\bar{\omega}$ представим в виде

$$\frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{\Delta t} + u_i^{j-1}\frac{u_i^j - u_{i-1}^j}{\Delta x} = \nu\frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{\Delta x^2} + \frac{1}{k^j}\frac{d}{4\rho}\frac{u_{i+1}^{j-1} - 2u_i^{j-1} + u_{i-1}^{j-1}}{\Delta x^2} - \frac{\lambda\left|u_i^{j-1}\right|}{2d}u_i^j - \frac{1}{\rho}\frac{p_{ei+1}^j - p_{ei-1}^j}{2\Delta x}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

$$u_i^0 = \phi_i,\ i = 0, 2, \ldots, n,$$

$$u_0^j = \theta^j,\ u_n^j = w^j,$$

$$-\frac{u_n^j - u_{n-1}^j}{\Delta x} = \frac{4}{d}k^j(\gamma^j - p_{en}^j),$$

где $u_i^j \approx u\left(x_i, t_j\right)$, $p_{ei}^j \approx p_e\left(x_i, t_j\right)$, $k^j \approx k\left(t_j\right)$, $\gamma^j = \gamma\left(t_j\right)$, $w^j = w\left(t_j\right)$, $\theta^j = \theta\left(t_j\right)$, $\phi_i = \phi(x_i)$.

Полученная разностная задача представляет собой систему линейных алгебраических уравнений, в которой в качестве неизвестных выступают приближенные значения искомых функций $u(x,t)$ и $k(t)$ в узлах разностной сетки $\bar{\omega}$, т. е. u_i^j, k^j, $i = 0,\ 1,\ 2, ..., n$, $j = 1, 2, 3, ..., m$. Данную систему разностных уравнений преобразуем к виду:

$$a_i u_{i-1}^j - c_i u_i^j + b_i u_{i+1}^j = \frac{1}{k^j}g_i^{j-1} + f_i^{j-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{11}$$

$$u_0^j = \theta^j, \tag{12}$$

$$u_n^j = w^j, \tag{13}$$

$$u_n^j = u_{n-1}^j - k^j\frac{4}{d}(\gamma^j - p_{en}^j)\Delta x, \tag{14}$$

$$j = 1, 2, \ldots, m,$$

$$u_i^0 = \phi_i,\ i = 0, 2, \ldots, n, \tag{15}$$

где

$$a_i = \nu\Delta t + u_i^{j-1}\Delta t\Delta x,\ b_i = \nu\Delta t,\ c_i = a_i + b_i + \Delta x^2 + \frac{\lambda|u_i^{j-1}|}{2d}\Delta x^2\Delta t,$$

$$g_i^{j-1} = -\frac{d(u_{i+1}^{j-1} - 2u_i^{j-1} + u_{i-1}^{j-1})\Delta t}{4\rho},\ f_i^{j-1} = \frac{(p_{ei+1}^j - p_{ei-1}^j)\Delta t\Delta x}{2\rho} - \Delta x^2 u_i^{j-1}.$$

С целью разделения разностной задачи (11)–(15) на взаимно независимые подзадачи, каждая из которых может решаться самостоятельно, решение этой системы при каждом фиксированном значении j, $j = 1, 2, \ldots, m$ представим в виде [10, 11]:

$$u_i^j = \xi_i^j + \frac{1}{k^j}\eta_i^j,\ i = 0, 1, ..., n, \tag{16}$$

где ξ_i^j, η_i^j – неизвестные переменные. Подставляя выражение для u_i^j в (11)–(13), получим

$$\left[a_i\xi_{i-1}^j - c_i\xi_i^j + b_i\xi_{i+1}^j - f_i^{j-1}\right] + \frac{1}{k^j}\left[a_i\xi_{i-1}^j - c_i\xi_i^j + b_i\xi_{i+1}^j - g_i^{j-1}\right] = 0,\ \xi_0^j + \frac{1}{k^j}\eta_0^j = \theta^j,\ \xi_n^j + \frac{1}{k^j}\eta_n^j = w^j.$$

Из последних соотношений получим следующие разностные задачи для определения вспомогательных переменных ξ_i^j, η_i^j

$$a_i\xi_{i-1}^j - c_i\xi_i^j + b_i\xi_{i+1}^j = f_i^{j-1}, \tag{17}$$

$$\xi_0^j = \theta^j, \tag{18}$$

$$\xi_n^j = w^j. \tag{19}$$

$$a_i\eta_{i-1}^j - c_i\eta_i^j + b_i\eta_{i+1}^j = g_i^{j-1}, \tag{20}$$

$$\eta_0^j = 0\,, \tag{21}$$

$$\eta_n^j = 0\,. \tag{22}$$

Разностные задачи (17)–(19) и (20)–(22) при каждом фиксированном значении $j = 1, 2, \ldots, m$ представляют собой систему линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей, и решения этих систем можно найти методом Томаса [9].

Подставив представление (16) в (14), будем иметь:

$$\xi_n^j + \frac{1}{k^j}\eta_n^j = \xi_{n-1}^j + \frac{1}{k^j}\eta_{n-1}^j - k^j \frac{4}{d}(\gamma^j - p_{en}^j)\Delta x\,.$$

Отсюда можно определить приближенное значение коэффициента проницаемости стенки трубы k^j как положительный корень данного уравнения

$$k^j = \frac{-d(\xi_n^j - \xi_{n-1}^j) \pm \sqrt{d^2(\xi_n^j - \xi_{n-1}^j)^2 - 16d\Delta x(\eta_n^j - \eta_{n-1}^j)(\gamma^j - p_{en}^j)}}{4(\gamma^j - p_{en}^j)\Delta x/d}\,. \tag{23}$$

Определив k^j по формуле (23), можно последовательно найти $u_1^j, u_2^j, \ldots, u_{n-1}^j$ по рекуррентной формуле (16).

После определения распределения скорости жидкости по длине трубопровода можно перейти к определению распределения давления. Построив дискретный аналог уравнения (5) на сетке $\bar{\omega}$, получим следующую расчетную формулу для вычисления давления

$$p_i^j = p_{ei}^j - \frac{d}{4k^j}\frac{u_{i+1}^j - u_i^j}{\Delta x}\,,\ i = 0, 1, 2, \ldots, n-1\,. \tag{24}$$

Таким образом, вычислительный алгоритм решения коэффициентной обратной задачи (6)–(10) по определению коэффициента проницаемости стенки трубы $k(t)$ при каждом дискретном значении временной переменной t_j, $j = 1, 2, \ldots, m$ основан на:

1) решении двух линейных разностных задач второго порядка (17)–(19) и (20)–(22) относительно вспомогательных переменных ξ_i^j, η_i^j, $i = \overline{1, n}$;

2) определении k^j из (23);

3) использовании представления (16) для вычисления u_i^j, $i = \overline{1, n-1}$.

Результаты численных расчетов

Предложенный вычислительный алгоритм был опробован на модельных задачах. Численные расчеты проводились по следующей схеме:

– для заданных функций $\phi(x)$, $\theta(t)$, $w(t)$, $k(t)$ определяется решение прямой задачи (6)–(9), т. е. функция $u(x,t)$, $0 \le x \le l$, $0 \le t \le T$;

– найденная зависимость $p(l,t) = p_e(l,t) - \dfrac{d}{4k(t)}\dfrac{\partial u(l,t)}{\partial x} = \gamma(t)$ принимается в качестве точных данных для решения обратной задачи по восстановлению $k(t)$.

Численные расчеты выполнялись на разностной сетке с шагами Δx = 0,5 м, Δt = 0,01 с. Результаты численного эксперимента, проведенного для случая d = 0,4 м, l = 100 м, $\theta(t)$ = 1,5 м/с, $w(t)$ = 0,5 м/с, $\phi(x) = 1{,}5 - x/l$ м/с, ρ = 1000 кг/м^3, ν = 10^{-6} м^2/с, $k(t)$ = 0,05 м^2·с/кг, $k(t) = 0{,}4 - 0{,}3\sin 10t$ м^2·с/кг, $k(t) = 0{,}1/\sqrt{t}$ м^2·с/кг, λ = 0,02 представлены в таблице.

Результаты численного эксперимента свидетельствуют, что предложенный вычислительный алгоритм с высокой точностью восстанавливает зависимость коэффициента проницаемости стенки трубы от времени.

Анализ результатов численных расчетов показывает, что предложенный метод численного моделирования можно применять при исследовании процессов течения однофазных жидкостей в трубах с проницаемыми стенками.

Численные результаты по определению функции $k(t)$

t_j, с	$k(t)=0,05$		$k(t)=0,4-0,3\sin 10t$		$k(t)=0,1/\sqrt{t}$	
	Точное	Вычисл.	Точное	Вычисл.	Точное	Вычисл.
0,5	0,05	0,05	0,688	0,688	0,141	0,141
1,0	0,05	0,05	0,563	0,563	0,100	0,100
1,5	0,05	0,05	0,205	0,205	0,082	0,082
2,0	0,05	0,05	0,126	0,126	0,071	0,071
2,5	0,05	0,05	0,440	0,440	0,063	0,063
3,0	0,05	0,05	0,696	0,696	0,058	0,058
3,5	0,05	0,05	0,528	0,528	0,053	0,053
4,0	0,05	0,05	0,176	0,176	0,050	0,050
4,5	0,05	0,05	0,145	0,145	0,047	0,047
5,0	0,05	0,05	0,479	0,479	0,045	0,045
5,5	0,05	0,05	0,700	0,700	0,043	0,043
6,0	0,05	0,05	0,491	0,491	0,041	0,041
6,5	0,05	0,05	0,152	0,152	0,039	0,039
7,0	0,05	0,05	0,168	0,168	0,038	0,038
7,5	0,05	0,05	0,516	0,516	0,037	0,037
8,0	0,05	0,05	0,698	0,698	0,035	0,035
8,5	0,05	0,05	0,453	0,453	0,034	0,034
9,0	0,05	0,05	0,132	0,132	0,033	0,033
9,5	0,05	0,05	0,195	0,195	0,032	0,032
10,0	0,05	0,05	0,552	0,552	0,032	0,032

Заключение

В рамках одномерной модели нестационарного течения вязкой несжимаемой жидкости в трубе с проницаемой стенкой рассмотрена коэффициентная обратная задача по определению зависимости коэффициента проницаемости стенки от времени. Предложенный безитерационный вычислительный алгоритм позволяет в каждом временном слое последовательно определять коэффициент проницаемости стенки, распределение скорости жидкости и давление по всей длине трубы.

Литература

1. Marshall, E.A. Flow of a Newtonian Fluid through a Permeable Tube: The application to the Proximal Renal Tubule / E.A. Marshall, E.A. Trowbridge // Bulletin of Mathematical Biology. – 1974. – Vol. 36, Iss. 5–6. – pp. 457–476.

2. Ross, S.M. A mathematical model of mass transport in a long permeable tube with radial convection / S.M. Ross // Journal of Fluid Mechanics. – 1974. – Vol. 63, Iss. 1. – P. 157–175.

3. Pozrikidis, C. Stokes flow through a permeable tube / C. Pozrikidis // Archive of Applied Mechanics. – 2010. – Vol. 80, Iss. 4. – P. 323–333.

4. Zhang, Q. Modeling Study on Fluid Flow in Horizontal Perforated Pipes with Wall Influx / Q. Zhang, Z. Wang // International Journal of Fluid Mechanics Research. – 2014. – Vol. 41, Iss. 6. – pp. 556–566.

5. Elshahed, M. Blood flow in capillary under starling hypothesis / M. Elshahed // Applied Mathematics and Computation. – 2004. – Vol. 149, Iss. 2. – pp. 431–439.

6. Muthu, P. Mathematical model of flow in renal tubules / P. Muthu, T. Berhane // International Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2010. – Vol. 6, no. 20. – pp. 94–107.

7. Mariamma, N.K. Flow of a Newtonian Fluid in a Blood Vessel with Permeable Wall – A theoretical model / N.K. Mariamma, S.N. Majhi // Computers & Mathematics with Applications. – 2000. – Vol. 40, Iss. 12. – pp. 1419–1432.

8. Кабанихин, С.И. Обратные и некорректные задачи / С.И. Кабанихин. – Новосибирск: Сибирское Научное Издательство, 2009. – 457 с.

9. Самарский, А.А. Численные методы решения обратных задач математической физики / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. – М.: URSS, ЛКИ, 2014. – 478 с.

10. Vabishchevich, P.N. Computational algorithms for solving the coefficient inverse problem for parabolic equations / P.N. Vabishchevich, V.I. Vasil'ev // Inverse Problems in Science and Engineering. – 2016. – Vol. 24, Iss. 1. – pp. 42–59.

11. Gamzaev, Kh.M. Numerical Solution of Combined Inverse Problem for Generalized Burgers Equation / Kh.M. Gamzaev // Journal of Mathematical Sciences. – 2017. – Vol. 221, Iss. 6. – pp. 833–839.

Поступила в редакцию 26 января 2019 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2020, vol. 12, no. 1, pp. 24–30

DOI: 10.14529/mmph200103

INVERSE PROBLEM OF UNSTEADY INCOMPRESSIBLE FLUID FLOW IN A PIPE WITH A PERMEABLE WALL

Kh.M. Gamzaev
Azerbaijan State Oil and Industry University, Baku, Azerbaijan
E-mail: xan.h@rambler.ru

The process of unsteady flow of viscous incompressible fluid in a pipe with a permeable wall described by a nonlinear system of partial differential equations in the velocity–pressure variables is considered. This system of equations is reduced to a single nonlinear equation of parabolic type with respect to velocity. Within the framework of the obtained model, the inverse problem is posed to determine the permeability coefficient of the pipe wall, which depends only on the time variable. In this case, an additional condition relative to the fluid pressure is set at the outlet of the pipe. A difference analogue of the coefficient inverse problem is built using finite-difference approximations. For the solution of the received difference problem, the special representation is offered allowing to split problems into two mutually independent linear difference problems of the second order on each discrete value of a time variable.

As a result, an explicit formula is obtained to determine the approximate value of the wall permeability coefficient for each discrete value of the time variable. On the basis of the proposed computational algorithm, numerical experiments were carried out for model problems.

Keywords: unsteady fluid flow; pipe with permeable wall; coefficient of permeability of the pipe wall; coefficient inverse problem; difference problem.

References

1. Marshall E.A., Trowbridge E.A. Flow of a Newtonian Fluid through a Permeable Tube: The application to the Proximal Renal Tubule. *Bulletin of Mathematical Biology*, 1974, Vol. 36, Iss. 5–6, pp. 457–476. DOI: 10.1007/BF02463260

2. Ross S.M. A mathematical model of mass transport in a long permeable tube with radial convection. *Journal of Fluid Mechanics*, 1974, Vol. 63, Iss. 1, pp. 157–175. DOI: 10.1017/S0022112074001066

3. Pozrikidis C. Stokes flow through a permeable tube. *Archive of Applied Mechanics*, 2010, Vol. 80, Iss. 4, pp. 323–333. DOI: 10.1007/s00419-009-0319-9

4. Zhang Q., Wang Z. Modeling Study on Fluid Flow in Horizontal Perforated Pipes with Wall Influx. *International Journal of Fluid Mechanics Research*, 2014, Vol. 41, Iss. 6, pp. 556–566. DOI: 10.1615/InterJFluidMechRes.v41.i6.80

5. Elshahed M. Blood flow in capillary under starling hypothesis. *Applied Mathematics and Computation*, 2004, Vol. 149, Iss. 2, pp. 431–439. DOI: 10.1016/S0096-3003(03)00151-6

6. Muthu P., Berhane T. Mathematical model of flow in renal tubules. *International Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2010, Vol. 6, no. 20, pp. 94–107.

7. Mariamma N.K., Majhi S.N. Flow of a Newtonian Fluid in a Blood Vessel with Permeable Wall – A theoretical model. *Computers & Mathematics with Applications*, 2000, Vol. 40, Iss. 12, pp. 1419–1432. DOI: 10.1016/S0898-1221(00)00250-9

8. Kabanikhin S.I. *Inverse and Ill-Posed Problems. Theory and Applications*. De Gruyter, Germany, 2011, 459 p.

9. Samarskiy A.A., Vabishchevich P.N. *Chislennye metody resheniya obratnykh zadach matematicheskoy fiziki* (Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics). Moscow, URSS, LKI Publ., 2014, 478 p. (in Russ.).

10. Vabishchevich P.N., Vasil'ev V.I. Computational algorithms for solving the coefficient inverse problem for parabolic equations. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 2016, Vol. 24, Iss. 1, pp. 42–59. DOI: 10.1080/17415977.2014.993984

11. Gamzaev Kh.M. Numerical Solution of Combined Inverse Problem for Generalized Burgers Equation. *Journal of Mathematical Sciences*, 2017, Vol. 221, Iss. 6, pp. 833–839. DOI: 10.1007/s10958-017-3271-1

Received January 26, 2019