УДК 517.968.23 DOI: 10.14529/mmph200104

О ЯВНОМ РЕШЕНИИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТИПА НЕЙМАНА ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ

К.М. Расулов
Смоленский государственный университет, г. Смоленск, Российская Федерация
E-mail: kahrimanr@yandex.ru

Для качественного исследования краевых задач в тех или иных классах функций комплексного переменного существенное значение имеет проблема разрешимости этих задач в явном виде, т. е. возможности построения общих решений рассматриваемых задач, используя лишь формулы решения классических скалярных краевых задач Римана или Гильберта для аналитических функций, а также решая конечное число систем линейных алгебраических уравнений и/или линейных дифференциальных уравнений, для которых матрица системы может быть выписана в квадратурах. В представленной статье рассматривается на комплексной плоскости одно семейство дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка с коэффициентом при искомой функции, зависящим от натурального параметра *n*, а решения которого принято называть обобщенными аналитическими функциями порядка *n*. Кроме того, в статье сформулирована общая постановка краевой задачи типа Неймана для обобщенных аналитических функций произвольного порядка *n*, а также получен явный метод решения поставленной краевой задачи в классе обобщенных аналитических функций первого порядка в случае, когда носителем краевых условий является единичная окружность. Установлено, что в рассматриваемом случае решение задачи типа Неймана для обобщенных аналитических функций первого порядка редуцируется к последовательному решению простейшей скалярной задачи Римана в классе ограниченных на бесконечности кусочно аналитических функций и одного линейного дифференциального уравнения Эйлера второго порядка, т. е. искомая задача в рассматриваемом случае допускает полное описание картины ее разрешимости. Полученные общие результаты иллюстрируются на конкретном примере.

Ключевые слова: краевая задача; задача типа Неймана; явное решение, обобщенная аналитическая функция; дифференциальное уравнение Эйлера; единичная окружность.

1. Для $z \in T^+$, где T^+ – некоторая область на плоскости переменного $z = x + iy$, рассмотрим семейство дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \overline{z}} + \frac{n(n+1)}{(1+z\overline{z})^2} W = 0, \tag{1}$$

здесь $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$, $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$, $n \in \boldsymbol{N}$, а $W(z) = U(x,y) + iV(x,y)$ – искомая функция.

Насколько нам известно, впервые на некоторые качественные свойства решений семейства уравнений (1) обратил внимание К.В. Бауэр (K.W. Bauer) в работе [1]. Более подробно функциональные свойства решений семейства уравнений (1) изложены в монографии [2]. В частности, в [2] установлено, что при каждом фиксированном значении параметра n общее решение дифференциального уравнения (1) в некоторой односвязной области T^+ можно представить в виде

$$W(z) = (1+z\overline{z})^{n+1}\left\{\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left[\frac{\varphi^+(z)}{(1+z\overline{z})^{n+1}}\right] + \frac{\partial^n}{\partial \overline{z}^n}\left[\frac{\overline{f^+(z)}}{(1+z\overline{z})^{n+1}}\right]\right\}, \quad z \in T^+, \tag{2}$$

где $\varphi^+(z)$, $f^+(z)$ – голоморфные в T^+ функции.

Далее, следуя [3], функции вида (2) будем называть *обобщенными аналитическими функциями порядка* n в области T^+, а функции $\varphi^+(z)$ и $f^+(z)$, входящие в правую часть равенства (2), для удобства назовем соответственно *первой и второй голоморфными компонентами* обобщенной аналитической функции $W(z)$. При этом класс всех обобщенных аналитических функций порядка n в области T^+ будем обозначать символом $GA_n(T^+)$.

Пусть граница L области T^+ – гладкая кривая Жордана. Для удобства символом $GA_n(T^+) \cap H^{(m)}(L)$ будем обозначать класс обобщенных аналитических порядка n ($n \geq 1$) в области T^+ функций $W(z)$, голоморфные компоненты которых непрерывны в смысле Гельдера в $T^+ \cup L$ вместе со своими производными до порядка m включительно, т. е. $\varphi^+(z),\ f^+(z) \in A(T^+) \cap H^{(m)}(L)$.

Сформулируем теперь общую постановку задачи Неймана для обобщенных аналитических функций порядка n или, короче, задачи N_n: *найти все функции* $W(z)$, *принадлежащие классу* $GA_n(T^+) \cap H^{(n+1)}(L)$, *граничные значения которых удовлетворяют следующему соотношению:*

$$\frac{\partial W(t)}{\partial n_-} = h(t), \quad t \in L, \tag{3}$$

где $\partial/\partial n_-$ *– производная по внешней нормали к* L, *а* $h(t)$ *– заданная функция, удовлетворяющая условию Гельдера, т. е.* $h(t) \in H(L)$.

Далее, говоря о том, что краевая (граничная) задача *решается в явном виде* (см. также [4–5]), мы будем иметь ввиду, что ее общее решение можно найти, используя лишь формулы для решения скалярной задачи сопряжения для голоморфных функций, а также решая конечное число линейных дифференциальных уравнений и (или) систем линейных алгебраических уравнений, матрицы которых определяются с помощью квадратур.

Ранее автором [7] было установлено, что краевая задача Дирихле для функций класса $GA_n(T^+) \cap H^{(n)}(L)$ в круговых областях решается в явном виде. Главной целью данной статьи является установление того факта, что задачу N_n в классах $GA_n(T^+) \cap H^{(n+1)}(L)$ также можно решить в явном виде, например, в случае, когда $n = 1$ и $T^+ = \{z : |z| < 1\}$.

2. Явный метод решения задачи N_n в случае, когда $n = 1$, $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ и $L = \{t : |t| = 1\}$. В силу представления (2) при $n = 1$ и $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ всякую обобщенную аналитическую функцию $W(z)$ из класса $GA_1(T^+) \cap H^{(2)}(L)$ можно задавать так:

$$W(z) = \frac{d\varphi^+(z)}{dz} - \frac{2\bar{z}}{1 + z\bar{z}}\varphi^+(z) + \overline{\frac{df^+(z)}{dz}} - \frac{2z}{1 + z\bar{z}}\overline{f^+(z)},\ z \in T^+, \tag{4}$$

где $\varphi^+(z),\ f^+(z) \in A(T^+) \cap H^{(2)}(L)$.

Итак, решения краевой задачи N_1 будем искать в виде (4). Тогда учитывая, что на $L = \{t : |t| = 1\}$ выполняется тождество $\bar{t} = \dfrac{1}{t}$ и справедливо соотношение (см., например, [4, с. 37] или [5, с. 303])

$$\frac{\partial W}{\partial n_-} = t\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{t}\frac{\partial W}{\partial \bar{t}}, \tag{5}$$

граничное условие (3) в рассматриваемом случае примет вид:

$$t\frac{d^2\varphi^+(t)}{dt^2} - \frac{d\varphi^+(t)}{dt} + t\overline{\frac{d^2 f^+(t)}{dt^2}} - \overline{\frac{df^+(t)}{dt}} = h(t),\ t \in L. \tag{6}$$

В свою очередь, из (6) получаем равенство

$$\Phi^+(t) = -\overline{F^+(t)} + h(t), \quad t \in L, \tag{7}$$

при получении которого были приняты обозначения:

$$\Phi^+(z) = z\frac{d^2\varphi^+(z)}{dz^2} - \frac{d\varphi^+(z)}{dz},\ F^+(z) = z\frac{d^2 f^+(z)}{dz^2} - \frac{df^+(z)}{dz}, \quad z \in T^+. \tag{8}$$

Пусть T^- – дополнение замкнутого единичного круга $T^+ \cup L$ до расширенной комплексной плоскости (т. е. $T^- = \overline{\boldsymbol{C}} \setminus (T^+ \cup L)$). Тогда, вводя в рассмотрение вспомогательную голоморфную в T^- функцию $F^-(z)$, связанную с $F^+(z)$ по формуле

$$F^-(z) = \overline{F^+}\left(\frac{1}{z}\right), z \in T^-, \tag{9}$$

равенству (7) можно придать следующий вид:

$$\Phi^+(t) = -F^-(t) + h(t),\ \ t \in L. \tag{10}$$

Полученное равенство (10) служит граничным условием простейшей задачи сопряжения относительно ограниченной на бесконечности кусочно голоморфной функции $\Phi(z) = \{\Phi^+(z), F^-(z)\}$ (см. [6, с. 106]).

Решения задачи сопряжения (10) задаются формулами (см., например, [6, с. 112]):

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{h(\tau)}{\tau - z}d\tau - C,\ z \in T^+, \tag{11}$$

$$F^-(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int \frac{h(\tau)}{\tau - z}d\tau + C,\ z \in T^-, \tag{12}$$

где $C = \alpha + i\beta$ – произвольная константа.

В силу формул (9) и (12) получаем

$$F^+(z) = \overline{F^-}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{z}{2\pi i}\int \frac{h(\tau)}{z\bar{\tau} - 1}d\bar{\tau} + \bar{C}, z \in T^+. \tag{13}$$

На основании (8), (11) и (12), относительно голоморфных компонент $\varphi^+(z)$, $f^+(z)$ искомой обобщенной аналитической функции $W(z)$, получаем следующие уравнения:

$$z\frac{d^2\varphi^+(z)}{dz^2} - \frac{d\varphi^+(z)}{dz} = \Phi^+(z),\ z \in T^+, \tag{14}$$

$$z\frac{d^2 f^+(z)}{dz^2} - \frac{df^+(z)}{dz} = F^+(z),\ z \in T^+, \tag{15}$$

здесь $\Phi^+(z)$ и $F^+(z)$ – функции, определяемые по формулам (11) и (13) соответственно.

Поскольку дифференциальные уравнения (14) и (15) отличаются лишь правыми частями, то достаточно построить общее решение одного из них, например, (14).

Сначала с помощью подстановки $\psi^+(z) = \dfrac{d\varphi^+(z)}{dz}$ уравнение (14) перепишем в виде

$$\frac{d\psi^+(z)}{dz} - \psi^+(z) = \Phi^+(z), z \in T, \tag{16}$$

Уравнение (16) в классе голоморфных функций $\psi^+(z) \in A(T^+) \cap H^{(1)}(L)$ разрешимо тогда и только тогда, когда выполняются условия [5, с. 161]:

$$\begin{cases} \dfrac{d\Phi^+(0)}{dz} = 0, \\ \left|\displaystyle\int \frac{\Phi^+(z)}{z^2}dz + \frac{\Phi^+(z)}{z}\right| \le \dfrac{M_1}{(1-r)^{1-\lambda_1}}, \\ \left|\dfrac{1}{z} \cdot \dfrac{d^+\Phi(z)}{dz}\right| \le \dfrac{M_2}{(1-r)^{1-\lambda_2}}, \end{cases} \tag{17}$$

здесь $r = |z|$; $M_k, \lambda_k\,(k = 1, 2)$ – положительные константы, при этом $0 < \lambda_k \le 1$; $\int \frac{\Phi^+(z)}{z^2}dz$ – вполне конкретная первообразная функции $\frac{\Phi^+(z)}{z^2}$ в T^+.

Предположим, что условие (17) выполняется и найдено общее решение уравнения (16) по формуле [5, с. 161]:

$$\psi^+(z) = A_1 z + z\int \frac{\Phi^+(z)}{z^2}dz,\ z \in T^+, \tag{18}$$

здесь $A_1 = \alpha_1 + i\beta_1$ – произвольная комплексная константа. Тогда, в силу $\psi^+(z) = \frac{d\varphi^+(z)}{dz}$, общее решение уравнения (14) задается так:

$$\varphi^+(z) = \frac{1}{2}A_1 z^2 + \int \Psi^+(z)dz + A_2,\ z \in T^+, \tag{19}$$

при этом $A_k = \alpha_k + i\beta_k, (k = 1, 2)$ – произвольные константы, а $\int \Psi^+(z)dz$ – какая-нибудь первообразная функции $\Psi^+(z) = z\int \frac{\Phi^+(z)}{z^2}dz$, в T^+.

Рассуждая аналогично, получаем, что при выполнении следующих условий

$$\begin{cases} \dfrac{dF^+(0)}{dz} = 0, \\ \left|\displaystyle\int \frac{F^+(z)}{z^2}dz + \frac{F^+(z)}{z}\right| \le \dfrac{P_1}{(1-r)^{1-\mu_1}}, \\ \left|\dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{d^+F(z)}{dz}\right| \le \dfrac{P_2}{(1-r)^{1-\mu_2}}, \end{cases} \tag{20}$$

где $r = |z|$; $P_k, \mu_k\ (k = 1, 2)$ – положительные константы, причем $0 < \mu_k \le 1$, все решения уравнения (15) определяются по формуле

$$f^+(z) = \frac{1}{2}B_1 z^2 + \int \Omega^+(z)dz + B_2,\ z \in T^+, \tag{21}$$

$B_k = \gamma_k + i\delta_k\ (k = 1, 2)$ – произвольные константы, $\int \Omega^+(z)dz$ – некоторая первообразная функции $\Omega^+(z) = z\int \frac{F^+(z)}{z^2}dz$ в T^+.

Если в правую часть формулы (4) подставим вместо $\varphi^+(z)$ и $f^+(z)$ их значения, определяемые формулами (19) и (21) соответственно, то получим решение задачи N_1:

$$\begin{gathered} W(z) = A_1 z + \Psi^+(z) - \frac{2\bar{z}}{1+z\bar{z}}\left(\frac{1}{2}A_1 z^2 + \int \Psi^+(z)dz + A_2\right) + \\ + \overline{B_1}\bar{z} + \overline{\Omega^+(z)} - \frac{2z}{1+z\bar{z}}\left(\frac{1}{2}\overline{B_1}\bar{z}^2 + \int \overline{\Omega^+(z)dz} + \overline{B}_2\right), \end{gathered} \tag{22}$$

здесь $A_k = \alpha_k + i\beta_k,\ B_k = \gamma_k + i\delta_k\ (k = 1, 2)$ – произвольные константы,

$$\Psi^+(z) = z\int \frac{\Phi^+(z)}{z^2}dz,\ \Omega^+(z) = z\int \frac{F^+(z)}{z^2}dz. \tag{23}$$

Вышеизложенные рассуждения позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема А. *Краевая задача* N_1 *в классе функций* $GA_1(T^+) \cap H^{(2)}(L)$, *где* $T^+ = \{z : |z| < 1\}$, *решается в явном виде, причем для ее разрешимости необходимо и достаточно, чтобы функция*

$h(t)$ *удовлетворяла условиям* (17) *и* (20). *В случае выполнения этих условий общее решение задачи* N_1 *определяется по формулам* (22)–(23).

Здесь важно отметить, что рассуждения, изложенные при доказательстве теоремы А, позволяют применить следующее *общее правило* для решения задачи N_1 в $T^+ = \{z : |z| < 1\}$:

1. Учитывая формулу (4), приводим граничное условие (3) к виду (6) и переходим к 2.
2. Рассматривая вспомогательные функции (8) и (9), из граничного условия (6) получаем равенство (10) и переходим к 3.
3. Решая задачу сопряжения (10), определяем функции (11)–(13) и переходим к 4.
4. Составляем дифференциальные уравнения (14), (15) и проверяем выполнение условий (17) и (20). Если выполняются оба условия (17) и (20), то по формулам (22), (23) находим решение искомой задачи N_1, и на этом завершается алгоритм. Если же не выполняется хотя бы одно из условий (17) и (20), то заключаем, что задача N_1 не имеет решения, и на этом завершается алгоритм.

Пример. Требуется найти функции $W(z) \in GA_1(T^+) \cap H^{(2)}(L)$, где $T^+ = \{z : |z| < 1\}$, $L = \{t : |t| = 1\}$, удовлетворяющие граничному условию

$$\frac{\partial W(t)}{\partial n_-} = t^3 + \frac{1}{t^4}, \quad t \in L. \tag{24}$$

Решение. Здесь $h(t) = t^3 + 1/t^4$. Следовательно, в данном случае по формулам (11) и (13), получаем: $\Phi^+(z) = z^3 - C$, $F^+(z) = z^4 + \overline{C}$, где $C = \alpha + i\beta$ – свободная константа. Нетрудно проверить, что функции $\Phi^+(z) = z^3 - C$ и $F^+(z) = z^4 + \overline{C}$ удовлетворяют требованиям (17) и (20) соответственно. Значит, в силу формул (22)–(23), все решения задачи (24) определяются по формуле:

$$W(z) = A_1 z + \frac{z^3}{2} - \frac{2\overline{z}}{1 + z\overline{z}}\left(\frac{1}{2}A_1 z^2 + \frac{z^4}{6} + Cz + A_2\right) +$$

$$+ \overline{B_1 z} + \frac{\overline{z}^4}{3} - \frac{2z}{1 + z\overline{z}}\left(\frac{1}{2}\overline{B_1 z}^2 + \frac{\overline{z}^5}{15} - C\overline{z} + \overline{B}_2\right),$$

здесь $C = \alpha + i\beta$, $A_k = \alpha_k + i\beta_k$, $B_k = \gamma_k + i\delta_k$ $(k = 1, 2)$ – свободные комплексные константы.

Литература

1. Bauer, K.W. Über eine der Differentialgleichung $(1 + z\overline{z})^2 W_{z\overline{z}} \pm n(n+1)W = 0$ zugeordnete Funktionentheorie / K.W. Bauer // Bonn. Math. Schr. – 1965. – Schrften 23. – 98 s.
2. Bauer, K.W. Differential Operators for Partial Differential Equations and Function Theoretic Applications / K.W. Bauer, S. Ruscheweyh. – Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1980. – 264 p. DOI: 10.1007/BFb0103468
3. Heersink, R. Uber Lösungen der Bauer-Peschl-Gleichung und polyanalytische Funktionen / R. Heersink // Ber. Math.-Stat. Sekt. Forschungsges. Johanneum. – 1986. – Bericht № 268. – S. 1–9.
4. Адуков, В.М. О явном и точном решениях задачи Маркушевича на окружности / В.М. Адуков, А.А. Патрушев // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия «Математика. Механика. Информатика». − 2011. – Т. 11, Вып. 2. − С. 9–20.
5. Расулов, К.М. Метод сопряжения аналитических функций и некоторые его приложения / К.М. Расулов. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2013. – 188 с.
6. Гахов, Ф.Д. Краевые задачи / Ф.Д. Гахов. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
7. Rasulov, K.M. On the Uniqueness of the Solution of the Dirichlet Boundary Value Problem for Quasiharmonic Functions in a Non-Unit Disk / K.M. Rasulov // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2018. – Vol. 39, no. 1. – P. 142–145.

Поступила в редакцию 7 октября 2019 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2020, vol. 12, no. 1, pp. 31–36

DOI: 10.14529/mmph200104

ON THE EXPLICIT SOLUTION OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEM OF NEUMANN TYPE FOR THE GENERALIZED ANALYTIC FUNCTIONS IN THE UNIT CIRCLE

K.M. Rasulov
Smolensk State University, Smolensk, Russian Federation
E-mail: kahrimanr@yandex.ru

To research the boundary value problems in some classes of functions of a complex variable and to develop the effective numerical solving methods for these problems, the problem of the explicit solution is of substantial significance, i.e. the possibility of solving these problems with formulas of the classical Riemann problem and Hilbert problem for analytical functions and finite number of linear algebraic equations and/or linear differential equations when the matrix of the system can be written in quadratures. In this article, on the complex plane we consider one family of differential equations with second-order partial derivatives and a coefficient at the sought-for function, depending on a natural parameter *n*. Solutions of these equations are commonly called generalized analytic functions of *n* order. In addition, in this article we give general formulation of the boundary value problem of Neumann type for the generalized analytic functions of the arbitrary order *n*. We obtain a new method of solving of the formulated problem for the generalized analytic functions of the first order in case when boundary is the unit circle. It is established that in the case under consideration the solution of the Neumann type problem for the generalized analytic functions is reduced to the consecutive solution of simple scalar Riemann problem in the class of limited at infinity piecewise analytic functions and Euler linear differential equation of the second order. The obtained general results are given as applied to a specific example.

Keywords: boundary value problem; Neumann type problem; explicit solution; generalized analytic function; Euler differential equation; unit circle.

References

1. Bauer K.W. Über eine der Differentialgleichung $(1+z\bar{z})^2 W_{z\bar{z}} \pm n(n+1)W = 0$ zugeordnete Funktionentheorie. *Bonn. Math. Schr.*, 1965, Schrften 23, 98 S. (in German).

2. Bauer K.W., Ruscheweyh S. *Differential Operators for Partial Differential Equations and Function Theoretic Applications*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 791, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1980, 264 p. DOI: 10.1007/BFb0103468

3. Heersink, R. Uber Lösungen der Bauer-Peschl-Gleichung und polyanalytische Funktionen. *Ber. Math.-Stat. Sekt. Forschungsges. Johanneum,* 1986, Bericht no. 268, pp. 1–9.

4. Adukov V.M., Patrushev A.A. On explicit and exact solutions of the Markushevich boundary problem for circle. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2011, Vol. 11, Iss. 2, pp. 9–20. (in Russ.).

5. Rasulov K.M. *Metod sopryazheniya analiticheskikh funktsiy i nekotorye ego prilozheniya* (Method of conjugation analytic functions and its applications). Smolensk, Izd-vo SmolGU Publ., 2013, 188 p. (in Russ.).

6. Gakhov F.D. *Kraevye zadachi* (Boundary value problems). Moscow, Nauka Publ., 1977, 640 p. (in Russ.).

7. Rasulov K.M. On the Uniqueness of the Solution of the Dirichlet Boundary Value Problem for Quasiharmonic Functions in a Non-Unit Disk. *Lobachevskii Journal of Mathematics,* 2018, Vol. 39, no. 1, pp. 142–145. DOI: 10.1134/S1995080218010237

Received October 7, 2019